Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 525, 2023 г.

А. С. Токмачев

О СРЕДНЕЙ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА, ВПИСАННОГО В ВЫПУКЛУЮ ФИГУРУ

§1. Введение

Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклый компакт на плоскости с непустой внутренностью. В дальнейшем класс таких компактов будем называть выпуклыми фигурами. Пусть X_1, X_2, X_3 – три точки, выбранные случайно и независимо внутри K. Обозначим через $\alpha(K)$ математическое ожидание площади треугольника $X_1X_2X_3$. В 1918 году Бляшке показал [1], что для любой выпуклой фигуры K на плоскости выполнены оценки

$$\frac{35}{48\pi^2} \leqslant \frac{\alpha(K)}{\operatorname{area} K} \leqslant \frac{1}{12},$$

причем левая граница достигается на эллипсах, а правая – на треугольниках. Данный результат дает оптимальную нижнюю и верхнюю оценку для нормированной средней площади треугольника, вершины которого независимо и равномерно распределены на K.

Рассмотрим теперь аналогичную задачу для среднего периметра треугольника. В силу линейности математического ожидания, она эквивалентна задаче о среднем расстоянии между двумя точками. Последняя была рассмотрена в работе [2]: оценивалась нормированная периметром K длина случайного отрезка с концами, независимо и равномерно выбранными внутри K. Было показано, что для

$$\Delta(K) = \mathbb{E}\,|X_1 - X_2|$$

выполняется

$$\frac{7}{60} < \frac{\Delta(K)}{\operatorname{per} K} < \frac{1}{6}. \tag{1}$$

Ключевые слова: геометрические неравенства, неравенство Бляшке, интегральная геометрия, метрика Хаусдорфа, ряды Фурье, средняя площадь.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075-15-2022-289. Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

Несмотря на то, что оба неравенства строгие, данные оценки точные: минимум достигается на последовательности равнобедренных треугольников, высота в которых стремится к нулю, а максимум – на узких прямоугольниках.

Рассмотрим функционалы, также заданные на классе выпуклых фигур и определяемые аналогично $\alpha(\,\cdot\,)$ и $\Delta(\,\cdot\,)$, с той лишь разницей, что точки теперь выбираются на *границе* тела:

$$\theta(K) = \mathbb{E}\,|Y_1 - Y_2|, \tag{2}$$

$$\psi(K) = \mathbb{E}\,\mathrm{area}\,(\mathrm{conv}(Y_1, Y_2, Y_3)), \tag{3}$$

где точки Y_1, Y_2, Y_3 независимы и равномерно распределены на границе K. В работе [3] было доказано, что при фиксированном периметре максимум функционала θ достигается на круге:

$$\frac{\theta(K)}{\mathrm{per}\,K} \leqslant \frac{\theta(\mathcal{B})}{\mathrm{per}\,\mathcal{B}} = \frac{2}{\pi^2}, \tag{4}$$

где $\mathcal{B}$ обозначает круг единичного радиуса.

В данной работе мы докажем аналогичный результат для функционала ψ.

§2. Основные результаты

Основным результатом данном работы является аналог изопериметрического неравенства для функционала ψ. А именно, выполнена следующая теорема.

Теорема 1. *Для всех выпуклых фигур $K \subset \mathbb{R}^2$ выполнено*

$$\frac{\psi(K)}{(\mathrm{per}\,K)^2} \leqslant \frac{\psi(\mathcal{B})}{(\mathrm{per}\,\mathcal{B})^2} = \frac{3}{8\pi^3}.$$

Ключом к изучению функционала ψ является следующая лемма. Рассмотрим фигуру K единичного периметра. Выберем систему координат таким образом, чтобы ее начало совпало с центром масс границы K. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ – натуральная параметризация границы. Рассмотрим кривую $\Gamma(t) = \int\limits_0^t \gamma(s)\, ds$. Заметим, что из–за выбора начала координат $\Gamma(1) = \Gamma(0)$, а значит $\Gamma([0,1])$ ограничивает некоторую фигуру K^*.

Лемма 1.

$$\psi(K) = 6\,\mathrm{area}\,(K^*).$$

В частности, данная лемма позволяет вычислить точное значение ψ для правильного n-угольника.

Следствие 1. *Пусть M_n – правильный n-угольник единичной площади. Тогда*

$$\psi(M_n) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{3}{2}\cot^2\frac{\pi}{n} + 1\right).$$

Доказательство леммы 1, теоремы 1 и вывод формулы для многоугольника приведены в разделе 3.

Помимо леммы 1 для доказательства теоремы потребуется определенная гладкость границы фигуры K. Возможность рассмотрения только фигур с гладкой границей гарантирует непрерывность функционала ψ, которая установлена в следующей теореме. Прежде чем ее сформулировать, напомним, что для двух непустых компактных множеств M, M' расстояние по Хаусдорфу между ними определено как

$$d_H(M, M') = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 : M \subset M'_\varepsilon, M' \subset M_\varepsilon\},$$

где $M_\varepsilon, M'_\varepsilon$ обозначают ε-окрестности M, M'.

Теорема 2. *Пусть $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность выпуклых фигур, сходящихся в метрике Хаусдорфа к некоторой выпуклой фигуре K. Тогда*

$$\psi(K_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(K).$$

Доказательство теоремы 2 приведено в §5.

Теорема 1 утверждает, что наибольшее значение средней площади треугольника, вписанного в фигуру данного периметра, достигается на круге. Рассмотрим аналогичную задачу с фиксированной *площадью* фигуры. Нетрудно убедиться, что круг уже не будет максимизировать функционал ψ: по следствию 1 значение ψ на правильном треугольнике единичной площади равно $\frac{1}{6}$, а для круга это значение равно $\frac{3}{2\pi^2} < \frac{1}{6}$.

Гипотеза. Среди всех фигур фиксированной площади наибольшее значение ψ имеет правильный треугольник.

Тем не менее, круг максимизирует среднюю площадь вписанного треугольника среди эллипсов той же площади.

Теорема 3. *Пусть K – эллипс площади π. Тогда $\psi(K) \leqslant \psi(\mathcal{B})$.*

Доказательство теоремы 3 приведено в §3.

§3. Вспомогательные результаты

В данном параграфе мы приведем доказательства вспомогательных результатов и их обобщений на случай неравномерного распределения вершин на границе.

3.1. Определения и основная формула. Как ранее упоминалось, ключом к изучению функционала ψ является лемма 1. Данную лемму можно обобщить на случай неравномерного распределения на границе. В данном пункте мы дадим основные определения и докажем обобщение леммы 1.

Рассмотрим выпуклую фигуру K с границей ∂K. Пусть A, B, C – три точки, выбранные независимо на границе фигуры K в соответствии с произвольным распределением $\mathcal{P}$. Пусть $S(A, B, C)$ – площадь треугольника с вершинами A, B, C. Обозначим среднюю площадь треугольника ψ следующим образом

$$\psi(K, \mathcal{P}) = \mathbb{E}S(A, B, C).$$

Скажем пару слов о том, как будем работать с распределением $\mathcal{P}$. Пусть $A_0 \in \partial K$ – фиксированная точка на границе. Мы хотим научиться генерировать точки из распределения $\mathcal{P}$ при помощи равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$. А именно, мы хотим построить такую функцию $\gamma_{A_0} \colon [0, 1] \to \partial K$, что $\gamma_{A_0}(0) = \gamma_{A_0}(1) = A_0$, и случайная точка $\gamma_{A_0}(U)$ имеет распределение $\mathcal{P}$, где U – случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Для этого сначала построим параметризацию границы $\widetilde{\gamma}_{A_0} \colon [0, 1] \to \partial K$, такую что $\widetilde{\gamma}_{A_0}(0) = \widetilde{\gamma}_{A_0}(1) = A_0$ и $|\widetilde{\gamma}'_{A_0}| \equiv \operatorname{per} K$. Затем рассмотрим распределение $\widetilde{\gamma}_{A_0}^{-1}\mathcal{P}$ и сгенерируем его при помощи равномерного распределения. То есть построим такую функцию $\varphi \colon [0, 1] \to [0, 1]$, что $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ и случайная величина $\varphi(U)$ имеет распределение $\widetilde{\gamma}_{A_0}^{-1}\mathcal{P}$ (преобразование Смирнова, см., например, [4, с. 32]). Тогда функция $\gamma_{A_0} = \widetilde{\gamma}_{A_0} \circ \varphi$ является искомой.

Для упрощения дальнейших записей, продолжим функцию γ_{A_0} по периодичности на всю прямую по правилу $\gamma_{A_0}(t) = \gamma_{A_0}(\{t\})$, где $\{\,\cdot\,\}$ – дробная часть числа. Пусть A_1 – точка на границе K, отличная от A_0. Построим функцию γ_{A_1} с описанными ранее свойствами при помощи γ_{A_0}. Если $A_1 = \gamma_{A_0}(t_0)$ для некоторого t_0, то функция $\gamma_{A_1}(t) = \gamma_{A_0}(t_0 + t)$ нам подходит. Если же A_1 не принадлежит образу функции γ_{A_0}, то можно найти $t_0 = \inf\{t > 0 \mid A_1 \in \gamma_{A_0}([0, t])\}$ и положить

$\gamma_{A_0}(t_0{+}m) = A_1$ для $m \in \mathbb{Z}$. Тогда свойства функции γ_{A_0} не изменятся, но A_1 уже будет лежать в ее образе.

Таким образом, для каждой точки A на границе K мы научились строить 1-периодическую функцию γ_A, отправляющую 0 в A и переводящую равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$ в $\mathcal{P}$. В дальнейшем будем изучать распределение в терминах функций γ_A.

Вернемся к изучению функционала $\psi(K, \mathcal{P})$. Пусть X – случайная точка на границе K, выбранная в соответствии с распределением $\mathcal{P}$. Выберем на плоскости систему координат так, чтобы $\mathbb{E}X = 0$. Зафиксируем A_0, $\gamma = \gamma_{A_0}$ и рассмотрим функцию Γ:

$$\Gamma(t) = \int\limits_0^t \gamma(s)\, ds.$$

Заметим, что

$$\Gamma(t+1) - \Gamma(t) = \int\limits_t^{t+1} \gamma(s)\, ds = \int\limits_0^1 \gamma(s)\, ds = \mathbb{E}X = 0,$$

поэтому Γ – периодическая функция с периодом 1. Тогда $\Gamma(\mathbb{R}) = \Gamma([0, 1]) = \partial K^*$ для некоторой выпуклой фигуры K^*. Данную фигуру будем называть *интегральной фигурой* K, и будем обозначать ее так же как и исходную фигуру, но со звездой сверху.

Стоит отметить, что K^* зависит от выбора точки A_0. Однако, эта зависимость несущественна: все фигуры K^* для разных точек получаются друг из друга параллельным переносом.

Утверждение 1. *Пусть $A_0, A_1 \in \partial K$. Тогда существует вектор $v \in \mathbb{R}^2$, такой что $K^*_{A_0} = K^*_{A_1} + v$.*

Доказательство. Пусть $A_1 = \gamma_{A_1}(0) = \gamma_{A_0}(t_0)$ и $\gamma_{A_1}(t) = \gamma_{A_0}(t_0 + t)$. Для Γ_{A_0} и Γ_{A_1} имеем

$$\begin{aligned}\Gamma_{A_0}(t_0 + t) - \Gamma_{A_1}(t) &= \int\limits_0^{t_0+t} \gamma_{A_0}(s)\, ds - \int\limits_0^t \gamma_{A_1}(s)\, ds \\ &= \int\limits_0^{t_0} \gamma_{A_0}(s)\, ds + \int\limits_{t_0}^{t_0+t} \gamma_{A_0}(s)\, ds - \int\limits_0^t \gamma_{A_1}(s)\, ds\end{aligned}$$

$$= \Gamma_{A_0}(t_0) + \int\limits_0^t \gamma_{A_1}(s)\, ds - \int\limits_0^t \gamma_{A_1}(s)\, ds = \Gamma_{A_0}(t_0).$$

Таким образом, $\Gamma_{A_0}(\mathbb{R}) = \Gamma_{A_1}(\mathbb{R}) + \Gamma_{A_0}(t_0)$ и вектор $v = \Gamma_{A_0}(t_0)$ нам подходит. $\square$

Следующая теорема является обобщением леммы 1 на случай неравномерного распределения.

Теорема 4 (Основная формула)**.** *Для любой фигуры K и распределения $\mathcal{P}$*

$$\psi(K, \mathcal{P}) = 6 \ \mathrm{area}(K^*),$$

где K^* – интегральная фигура K.

Доказательство. Обозначим через $u \wedge v$ ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на векторы u и v. Тогда площадь фигуры K можно записать следующим образом:

$$\mathrm{area}(K) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \gamma(t) \wedge \gamma'(t) \ dt.$$

Аналогично для K^*:

$$\mathrm{area}(K^*) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \Gamma(t) \wedge \Gamma'(t) \ dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \Gamma(t) \wedge \gamma(t) \ dt.$$

Более того, так как γ и Γ периодичны, для любого x

$$\mathrm{area}(K^*) = \frac{1}{2} \int\limits_x^{x+1} \Gamma(t) \wedge \gamma(t) \ dt. \tag{5}$$

В терминах $\wedge$ среднюю площадь треугольника можно вычислить следующим образом

$$\mathbb{E}[S(A,B,C)] = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{1}{2} |(\gamma(b) - \gamma(a)) \wedge (\gamma(c) - \gamma(a))| \ da \ db \ dc$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_a^{a+1} \int\limits_a^{a+1} \frac{1}{2} |(\gamma(b) - \gamma(a)) \wedge (\gamma(c) - \gamma(a))| \ dc \ db \ da$$

$$= \int_0^1 \int_a^{a+1} \int_a^b \frac{1}{2}(\gamma(c) - \gamma(a)) \wedge (\gamma(b) - \gamma(a))\ dc\ db\ da$$
$$+ \int_0^1 \int_a^{a+1} \int_b^{a+1} \frac{1}{2}(\gamma(b) - \gamma(a)) \wedge (\gamma(c) - \gamma(a))\ dc\ db\ da = \frac{1}{2}(I_1 + I_2).$$

Посчитаем интеграл I_1.

$$I_1 = \int_0^1 \int_a^{a+1} \int_a^b (\gamma(c) - \gamma(a)) \wedge (\gamma(b) - \gamma(a))\ dc\ db\ da$$
$$= \int_0^1 \int_a^{a+1} \int_a^b \gamma(c) \wedge \gamma(b) - \gamma(a) \wedge \gamma(b) - \gamma(c) \wedge \gamma(a)\ dc\ db\ da$$
$$= \int_0^1 \int_a^{a+1} (\Gamma(b) - \Gamma(a)) \wedge \gamma(b) - (b-a)\gamma(a) \wedge \gamma(b) - (\Gamma(b) - \Gamma(a)) \wedge \gamma(a)\ db\ da$$
$$= \int_0^1 \int_a^{a+1} \Gamma(b) \wedge \gamma(b) - \Gamma(a) \wedge \gamma(b) + (b\gamma(b)) \wedge \gamma(a)$$
$$+ (a\gamma(a)) \wedge \gamma(b) - \Gamma(b) \wedge \gamma(a) + \Gamma(a) \wedge \gamma(a)\ db\ da.$$

Заметим, что $\int_a^{a+1} \gamma(b)\ db = 0$, поэтому слагаемые $\Gamma(a) \wedge \gamma(b)$ и $(a\gamma(a)) \wedge \gamma(b)$ обнуляются. Более того, $\int_a^{a+1} \Gamma(b)\ db$ не зависит от a, так как Γ периодична. Поэтому

$$\int_0^1 \int_a^{a+1} \Gamma(b) \wedge \gamma(a)\ db\ da = \int_0^1 \left(\int_a^{a+1} \Gamma(b)\ db \right) \wedge \gamma(a)\ da$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \Gamma(b)\ db \right) \wedge \gamma(a)\ da = \left(\int_0^1 \Gamma(b)\ db \right) \wedge \left(\int_0^1 \gamma(a)\ da \right) = 0.$$

Наконец,

$$\int_a^{a+1} b\gamma(b)\ db = b\Gamma(b)\Big|_a^{a+1} - \int_a^{a+1} \Gamma(b)\ db = \Gamma(a) - \int_0^1 \Gamma(b)\ db.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_a^{a+1} (b\gamma(b))\wedge\gamma(a)\,db\,da \\
&\quad= \int_0^1 \int_a^{a+1} \Gamma(a)\wedge\gamma(a)\,db\,da - \left(\int_0^1 \Gamma(b)\,db\right) \wedge \left(\int_0^1 \gamma(a)\,da\right) \\
&\quad= \int_0^1 \int_a^{a+1} \Gamma(a)\wedge\gamma(a)\ db\ da.
\end{aligned}$$

Собирая все вместе и используя (5), получаем

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \int_a^{a+1} \Gamma(b)\wedge\gamma(b) + 2\Gamma(a)\wedge\gamma(a)\ db\ da \\
&= 3\int_0^1 \Gamma(t)\wedge\gamma(t)\ dt = 6\ \mathrm{area}(K^*).
\end{aligned}$$

Аналогично, $I_2 = 6\ \mathrm{area}(K^*)$. В результате получаем требуемое соотношение

$$\mathbb{E}[S(A,B,C)] = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) = 6\ \mathrm{area}(K^*). \qquad \square$$

3.2. Примеры. В данном пункте мы вычислим точные значения средней площади треугольника для конкретных фигур. Будем писать $\psi(K)$ вместо $\psi(K, \mathcal{P})$, когда $\mathcal{P}$ является равномерным распределением.

Пример 1.

$$\psi(\mathcal{B}) = \frac{3}{2\pi}.$$

Доказательство. Границу круга с равномерным распределением можно задать при помощи функции $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Поэтому, $\Gamma(t) = \left(\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}, \frac{1-\cos(2\pi t)}{2\pi}\right)$, а значит K^* – круг радиуса $\frac{1}{2\pi}$. По основной формуле (теорема 4), получаем

$$\psi(\mathcal{B}) = 6\ \mathrm{area}(K^*) = \frac{3}{2\pi}. \qquad \square$$

Пример 2. Пусть M_n – правильный n-угольник. Рассмотрим равномерное распределение $\mathcal{P}_n^{\mathrm{disc}}$ на его вершинах. Тогда

$$\psi(M_n, \mathcal{P}_n^{\mathrm{disc}}) = \frac{3R^2}{2n} \cot\frac{\pi}{n},$$

где R обозначает расстояние от центра многоугольника до его вершин.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $R = 1$, центр многоугольника совпадает с началом координат, а одна из вершин имеет координаты $(1, 0)$. Тогда границу с распределением $\mathcal{P}_n^{\mathrm{disc}}$ задает функция $\gamma(t) = \left(\cos\frac{2\pi[nt]}{n}, \sin\frac{2\pi[nt]}{n}\right)$, а фигура M_n^* представляет из себя правильный n-угольник со стороной $\frac{1}{n}$. По основной формуле получаем

$$\psi(M_n, \mathcal{P}_n^{\mathrm{disc}}) = 6\ \mathrm{area}(M_n^*) = \frac{3}{2n}\cot\frac{\pi}{n}. \qquad \square$$

Пример 3. Пусть M_n – правильный n-угольник единичной площади. Тогда

$$\psi(M_n) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{3}{2}\cot^2\frac{\pi}{n} + 1\right).$$

Доказательство. Пронумеруем вершины многоугольника $M_n = A_0A_1\ldots A_{n-1}$. Выберем параметризацию границы γ так, чтобы $A_k = \gamma(\frac{k}{n})$. Заметим, что для любого t вектор $\gamma(t + \frac{1}{n})$ получается из вектора $\gamma(t)$ поворотом относительно центра M_n на угол $\frac{2\pi}{n}$. Следовательно, вектор $\Gamma(\frac{k+1}{n}) - \Gamma(\frac{k}{n}) = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \gamma(s + \frac{k}{n})\ ds$ получается из вектора $\Gamma(\frac{1}{n}) - \Gamma(0)$ поворотом на угол $\frac{2\pi k}{n}$. Таким образом, точки $\Gamma(\frac{k}{n})$ являются вершинами правильного n-угольника $\widetilde{M_n}$, а фигура M_n^* представляет собой правильный n-угольник с "выпуклостями" на сторонах, получающимися в результате интегрирования $\gamma(t)$ по промежутку $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. При этом M_n^* переходит в себя при повороте относительно своего центра на угол $\frac{2\pi}{n}$. Таким образом, чтобы посчитать площадь M_n^*, достаточно найти длину вектора $\Gamma(\frac{1}{n}) - \Gamma(0)$ и посчитать площадь выпуклости на отрезке $[0, \frac{1}{n}]$.

Пусть длина стороны M_n равна $2a$, а расстояние от центра до стороны равно h. В таком случае $\frac{h}{a} = \cot\frac{\pi}{n}$. Не уменьшая общности, можно считать, что центр M_n находится в нуле, $A_0 = \gamma(0) = (h, -a)$, $A_1 = \gamma(\frac{1}{n}) = (h, a)$, а $\Gamma(0) = 0$. Тогда на отрезке $[0, \frac{1}{n}]$ функция γ имеет вид $\gamma(t) = (h, -a + 2ant)$. В таком случае $\Gamma(t) = (ht, -at + ant^2)$, $t \in [0, \frac{1}{n}]$. Длина вектора $\Gamma(\frac{1}{n}) - \Gamma(0)$ равна $|\Gamma(\frac{1}{n})| = |(\frac{h}{n}, 0)| = \frac{h}{n}$. Следовательно, сторона многоугольника $\widetilde{M_n}$ равна $\frac{h}{n}$.

Найдем площадь одной "выпуклости". Поскольку $\Gamma(\frac{1}{n})$ лежит на оси абсцисс, то нужно найти площадь между осью и кривой $\Gamma(t) = (ht, -at + ant^2)$. Данная площадь равна $\frac{ah}{6n^2}$.

Итого, учитывая, что $\operatorname{area}(M_n) = ahn = 1$, по основной формуле получаем

$$\begin{aligned}\psi(M_n) &= 6\ \operatorname{area}(M_n^*) = 6\frac{\operatorname{area}(M_n^*)}{\operatorname{area}(M_n)}\\ &= 6\left(\frac{\operatorname{area}(\widetilde{M_n})}{\operatorname{area}(M_n)} + \frac{n\cdot\operatorname{area}(\text{выпуклость})}{\operatorname{area}(M_n)}\right)\\ &= 6\left(\left(\frac{hn}{2a}\right)^2 + n\cdot\frac{ah}{6n^2}\cdot\frac{1}{ahn}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{3}{2}\cot^2\frac{\pi}{n} + 1\right). \qquad \square\end{aligned}$$

3.3. Доказательство теоремы 3. В данном пункте мы выведем из основной формулы теорему 3. Данная теорема является следствием следующего результата.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{B}$ – единичный круг, $\mathcal{P}$ – распределение на его границе. Тогда*

$$\psi(\mathcal{B}, \mathcal{P}) \leqslant \psi(\mathcal{B}).$$

Доказательство. Из примера 1 следует, что нужно доказать оценку $\psi(\mathcal{B}, \mathcal{P}) \leqslant \frac{3}{2\pi}$. По основной формуле, достаточно проверить, что $6\operatorname{area}(\mathcal{B}^*) \leqslant \frac{3}{2\pi}$ или $\operatorname{area}(\mathcal{B}^*) \leqslant \frac{1}{4\pi}$. Напомним, что фигура $\mathcal{B}^*$ задается границей Γ, которая в свою очередь является первообразной γ, задающей распределение $\mathcal{P}$. Поэтому периметр $\mathcal{B}^*$ можно вычислить по формуле

$$\operatorname{per}(\mathcal{B}^*) = \int_0^1 |\Gamma'(t)|\ dt = \int_0^1 |\gamma(t)|\ dt = \mathbb{E}|X|,$$

где X имеет распределение $\mathcal{P}$, а начало координат $O = \mathbb{E}X$. Пусть O_1 – центр круга. Ниже под произведением векторов подразумеваем скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$\operatorname{per}(\mathcal{B}^*)^2 = (\mathbb{E}|X|)^2 \leqslant \mathbb{E}|X|^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X - O_1)^2 = \mathbb{E}1 = 1.$$

Поясним второе неравенство:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 &\leqslant \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}X - O_1)^2 = \\ &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}X)^2 - 2\mathbb{E}X \cdot O_1 + O_1^2 = \\ &= \mathbb{E}(X - O_1)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{per}(\mathcal{B}^*) \leqslant 1$, а значит в силу изопериметрического неравенства $\operatorname{area}(\mathcal{B}^*) \leqslant \frac{1}{4\pi}$, что и требовалось доказать. □

Все готово для доказательства теоремы 3.

Теорема 3. Пусть K – эллипс площади π. Тогда $\psi(K) \leqslant \psi(\mathcal{B})$.

Доказательство. Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее эллипс в круг площади π. При таком преобразовании равномерное распределение на границе K перейдет в некоторое распределение на границе круга, а средняя площадь треугольника не изменится. По предыдущей теореме получим требуемое неравенство. □

§4. Доказательство теоремы 1

В данном параграфе мы докажем основной результат работы – теорему 1. Зафиксировав $\operatorname{per} K = 2\pi$, можно доказывать следующую теорему.

Теорема 1*. Пусть K – выпуклая фигура периметра 2π. Тогда

$$\psi(K) \leqslant \psi(\mathcal{B}).$$

Доказательство. По теореме 2 можно считать, что граница тела K гладкая. Пусть равномерное распределение на границе K задает функция $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, а границу K^* – функция $\Gamma(t) = (X(t), Y(t))$. Тогда $X'(t) = x(t)$, $Y'(t) = y(t)$ и $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \equiv 2\pi$. Разложим функции $X(t)$ и $Y(t)$ в ряды Фурье

$$X(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt),$$
$$Y(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(2\pi kt) + d_k \sin(2\pi kt).$$

Тогда функции $x(t)$ и $y(t)$ в том же базисе имеют вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k \left(b_k \cos(2\pi kt) - a_k \sin(2\pi kt)\right),$$
$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k \left(d_k \cos(2\pi kt) - c_k \sin(2\pi kt)\right).$$

А их производные раскладываются следующим образом

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 \left(-a_k \cos(2\pi kt) - b_k \sin(2\pi kt)\right),$$
$$y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 \left(-c_k \cos(2\pi kt) - d_k \sin(2\pi kt)\right).$$

Воспользуемся условием на периметр фигуры K

$$(2\pi)^2 = \int_0^1 x'(t)^2 + y'(t)^2 \, dt = \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^4 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2). \tag{6}$$

По основной формуле и примеру 1, нужно доказать, что $6 \operatorname{area}(K^*) \leqslant \frac{3}{2\pi}$ или $\operatorname{area}(K^*) \leqslant \frac{1}{4\pi}$. Найдем площадь фигуры K^* в терминах коэффициентов разложения:

$$\operatorname{area}(K^*) = \int_0^1 X(t)Y'(t) \, dt = \int_0^1 X(t)y(t) \, dt = \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k(a_k d_k - b_k c_k). \tag{7}$$

Заметим, что $|a_k d_k - b_k c_k| \leqslant \frac{(a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2)}{2}$, а $2\pi k = \frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi)^4 k \leqslant \frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi k)^4$, для $k \geqslant 1$. Используя равенства (6) и (7), получаем оценку

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(K^*) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k(a_k d_k - b_k c_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k|a_k d_k - b_k c_k| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi k)^4 \cdot \frac{(a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2)}{2} = \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^3 \cdot 2} = \frac{1}{4\pi},\end{aligned}$$

что и требовалось. □

§5. Доказательство непрерывности в метрике Хаусдорфа

Целью данного параграфа является доказательство теоремы 2.

Сформулируем общий факт, частным случаем которого будет являться непрерывность функционала ψ. Пусть $f\colon (\mathbb{R}^2)^k \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Рассмотрим выпуклую фигуру K. Пусть $X_1, X_2, \ldots X_k$ – точки, выбранные случайно и независимо на границе K (в соответствии с равномерным распределением). Определим функционал $\mathbf{f}$ по правилу

$$\mathbf{f}(K) = \mathbb{E} f(X_1, X_2, \ldots, X_k).$$

Лемма 2. *Пусть $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность выпуклых фигур, сходящихся в метрике Хаусдорфа к некоторой выпуклой фигуре K. Тогда*

$$\mathbf{f}(K_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{f}(K).$$

Доказательство. Начнем с простого утверждения, которое понадобится в дальнейшем.

Утверждение 2. *Пусть K, L – выпуклые фигуры, такие что $d_H(K,L) < \varepsilon$. Тогда $|\operatorname{per} K - \operatorname{per} L| < 2\pi\varepsilon$.*

Доказательство. По формуле Коши [5], периметр выпуклого тела равен его средней ширине, помноженной на π. Ширина тела K в любом направлении отличается от ширины L в этом же направлении меньше, чем на 2ε, в силу определения метрики Хаусдорфа. Следовательно, то же верно и для средней ширины. Поэтому после домножения периметры отличаются меньше чем на $2\pi\varepsilon$, что и требовалось. □

Поскольку мы рассматриваем компакты на плоскости, можем считать, что они все лежат внутри некоторого шара B. Тогда функция f равномерно непрерывна на B. Следующее утверждение является основным при доказательстве леммы.

Утверждение 3. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$, *такое что для любых компактов* $K_1 \subset K_2 \subset B$, $d_H(K_1, K_2) < \delta$, *выполнено* $|\mathbf{f}(K_1) - \mathbf{f}(K_2)| < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим кривые, являющиеся границами тел K_1 и K_2. Пусть их длины равны l_1 и l_2 соответственно. Рассмотрим параметризации γ_1 и γ_2 данных кривых, такие что $|\gamma_1'| \equiv l_1$, $|\gamma_2'| \equiv l_2$ и $|\gamma_1(0) - \gamma_2(0)| \leqslant \delta$. Пусть при этом $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ обходят границы против часовой стрелки. В терминах параметризованных кривых функционал $\mathbf{f}$ от данных тел можно записать следующим образом:

$$\mathbf{f}(K_1) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_2), \ldots, \gamma_1(t_k))\ dt_1 dt_2 \cdots dt_k,$$

$$\mathbf{f}(K_2) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\gamma_2(t_1), \gamma_2(t_2), \ldots, \gamma_2(t_k))\ dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

Покажем, что для любого $t \in [0, 1]$ точки $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ близки. Выберем $s \in [0, 1]$ так, что $|\gamma_1(t) - \gamma_2(s)| < \delta$. Тогда

$$\begin{aligned} l_1 t &= |\gamma_1([0, t])| \\ &\leqslant |\gamma_1(0) - \gamma_2(0)| + |\gamma_2([0, s])| + |\gamma_2(s) - \gamma_1(t)| \\ &\leqslant l_2 s + 2\delta. \end{aligned} \tag{8}$$

Первое неравенство выполняется, поскольку множество, ограниченное дугой $\gamma_1([0, t])$ и отрезком $[\gamma_1(0), \gamma_1(t)]$, является выпуклым и лежит внутри множества, ограниченного отрезками $[\gamma_2(0), \gamma_1(0)]$, $[\gamma_1(0), \gamma_1(t)]$, $[\gamma_1(t), \gamma_2(s)]$ и дугой $\gamma_2([0, s])$, а значит периметр первого не больше, чем второго. Аналогично можем оценить длину дуги $\gamma_1([t, 1])$:

$$\begin{aligned} l_1(1 - t) &= |\gamma_1([t, 1])| \\ &\leqslant |\gamma_2(s) - \gamma_1(t)| + |\gamma_2([s, 1])| + |\gamma_2(1) - \gamma_1(1)| \\ &\leqslant l_2(1 - s) + 2\delta. \end{aligned}$$

Поскольку $|l_2 - l_1| \leqslant 2\pi\delta < 8\delta$ по утверждению 2, из предыдущего неравенства получаем следующую оценку:

$$l_2 s \leqslant l_1 t - l_1 + l_2 + 2\delta < l_1 t + 10\delta. \tag{9}$$

Совмещая неравенства (8) и (9), получаем

$$|l_2 s - l_1 t| \leqslant 10\delta.$$

Поскольку $|l_2 - l_1| < 8\delta$, а $t \in [0,1]$, имеем $|l_1 t - l_2 t| < 8\delta$, а значит $|l_2 s - l_2 t| < 18\delta$. Тогда расстояние между $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| &\leqslant |\gamma_1(t) - \gamma_2(s)| + |\gamma_2(s) - \gamma_2(t)| \leqslant \delta + |\gamma_2([t,s])| \\ &= \delta + |l_2(s-t)| < 19\delta. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что $|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < 19\delta$ для любого $t \in [0,1]$. Осталось подобрать δ. Так как f равномерно непрерывна на B, можно выбрать δ так, чтобы для любых $x, y \in (\mathbb{R}^2)^k$, таких что $|x - y| < 19\delta$, выполнялось $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} &|\mathbf{f}(K_1) - \mathbf{f}(K_2)| \\ &\quad \leqslant \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 |f(\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_2), \ldots, \gamma_1(t_k)) \\ &\quad\quad - f(\gamma_2(t_1), \gamma_2(t_2), \ldots, \gamma_2(t_k))|\, dt_1 dt_2 \cdots dt_k \\ &\quad < \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varepsilon\, dt_1 dt_2 \cdots dt_k = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Все готово для того, чтобы доказать лемму. Зафиксируем ε и найдем δ из утверждения 3. Рассмотрим δ-окрестность множества K: $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(x, K) < \delta\}$. Ясно, что $K_\delta \in \mathcal{K}$ и $d_H(K, K_\delta) = \delta$. Выберем номер N, начиная с которого $d_H(K_n, K) < \delta$. Тогда при $n > N$ имеем включение $K_n \subset K_\delta$. В силу неравенства треугольника,

$$d_H(K_n, K_\delta) \leqslant d_H(K_n, K) + d_H(K, K_\delta) \leqslant 2\delta.$$

По утверждению 3, $|\mathbf{f}(K) - \mathbf{f}(K_\delta)| < \varepsilon$ и $|\mathbf{f}(K_n) - \mathbf{f}(K_\delta)| < 2\varepsilon$, а значит $|\mathbf{f}(K_n) - \mathbf{f}(K)| < 3\varepsilon$. Устремив ε к нулю, получим требуемую непрерывность. □

Теорема 2 является частным случаем леммы 2, для $f = \text{area}$ и $k = 3$.

§6. Благодарности

Автор благодарит Дмитрия Запорожца за полезные обсуждения и помощь при подготовке статьи, а также Анну Гусакову за ценные замечания по тексту.

Список литературы

1. W. Blaschke, *Über affine Geometrie XI: Lösung des "Vierpunktproblems" von Sylvester äus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten.* — Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. **69** (1917), 436—453.
2. G. Bonnet, A. Gusakova, Ch. Thäle, D. Zaporozhets, *Sharp inequalities for the mean distance of random points in convex bodies* — Adv. Math. **326** (2021).
3. А. С. Токмачев, *Среднее расстояние между случайными точками на границе выпуклой фигуры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **510** (2022), 248–261.
4. Р. Н. Вадзинский, *Справочник по вероятностным распределениям.* Наука, СПб. (2001).
5. S. N. Majumdar, A. Comtet, J. Randon-Furling, *Random convex hulls and extreme value statistics.* — J. Stat. Phys. **138** (2010), 955–1009.
6. A. Hurwitz, *Sur le probleme des isoperimetres.* — CR Acad. Sci. Paris **132** (1901), 401–403.

Tokmachev A. S. On the average area of a triangle inscribed in a convex figure.

Let K be a convex figure in the plane, and let A, B, C be random points on its boundary given by a uniform distribution. In this paper, we prove that the maximum average area of triangle ABC is obtained on the circle when the perimeter of K is fixed. We also prove that the average area of the triangle is continuous in the Hausdorff metric as a functional of K.

Международный математический
институт им. Леонарда Эйлера,
С.-Петербург, Россия

E-mail: chief.tokma4eff@yandex.ru

Поступило 17 октября 2023 г.