Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 525, 2023 г.

А. А. Тадевосян

ОБ mm-ЭНТРОПИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

§1. Введение

Пусть $(\mathcal{X}, d)$ – метрическое пространство, $A \subset \mathcal{X}$ – некоторое компактное множество. Обозначим $N(A, \varepsilon)$ минимальное число замкнутых шаров радиуса ε, достаточное, чтобы покрыть A. Величина

$$H(A, \varepsilon) = \log N(A, \varepsilon)$$

называется *метрической энтропией* A в пространстве $\mathcal{X}$.

Пусть теперь дано сепарабельное банахово пространство $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$, на котором задана центрированная гауссовская мера P. Мере P соответствует ядро $H_P \subset \mathcal{X}$. Выделим в ядре единичный шар D, который также называется эллипсоидом рассеяния меры P. Пусть $B(x, r)$ далее обозначает замкнутый шар радиуса r с центром в x.

В работе [1] изучается связь метрической энтропии эллипсоида рассеяния и энтропии $H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) = \log N^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta)$, где

$$N^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) = \min \left\{ n \,\middle|\, \exists\, x_1, \ldots, x_n : \; P\left(\mathcal{X} \setminus \cup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)\right) \leqslant \delta \right\}.$$

Целью данной работы является обобщение результатов работы [1], в которой авторы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Положим*

$$\Psi(\varepsilon, \delta) = \begin{cases} |\log \delta|^{\beta/2}\, \varepsilon^{-\beta}, & \text{если } |\log \delta| \geqslant \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}; \\ \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}, & \text{если } |\log \delta| \leqslant \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}. \end{cases}$$

Пусть $0 < \beta < 2$ *и при малых* $\varepsilon > 0$ *для некоторых* $c_1, c_2 > 0$ *верно*

$$c_1 \varepsilon^{-\beta} \leqslant H(D, \varepsilon) \leqslant c_2 \varepsilon^{-\beta}.$$

Тогда при малых ε, δ *верно*

$$B_- \Psi(\varepsilon, \delta) \leqslant H^{mm}(\varepsilon, \delta) \leqslant B_+ \Psi(\varepsilon, \delta),$$

где B_-, B_+ *– константы, зависящие только от* $\beta, c_1, c_2, c_3, c_4$.

Ключевые слова: гауссовские меры, mm-энтропия, энтропия компактов.
Работа поддержана грантом РНФ No. 21-11-00047.

Далее нам пригодятся следующие обозначения.

Определение 2. Для функций f, g будем писать

$$f(x) \preceq g(x), \qquad \text{при } x \to a,$$

если $\limsup_{x\to a} f(x)/g(x) < \infty$, и

$$f(x) \approx g(x), \qquad \text{при } x \to a,$$

если $g(x) \preceq f(x) \preceq g(x)$.

Запись $f \sim g$, $x \to a$ означает

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1.$$

Нам потребуется специальный подкласс медленно меняющихся функций на бесконечности.

Определение 3. Будем называть медленно меняющуюся функцию на бесконечности $J : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *логарифмически медленно меняющейся функцией на бесконечности*, если для любого $\rho > 0$ справедливо

$$J(x) \approx J(x^\rho) \qquad \text{при } x \to \infty. \tag{1}$$

Не всякая медленно меняющаяся функция J удовлетворяет условию (1). Например, медленно меняющаяся функция на бесконечности $J(x) = (\log x)^\theta$ при $\theta \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (1). Однако функция $J(x) = \exp((\log x)^\theta)$ при $0 < \theta < 1$ хотя и является медленно меняющейся на бесконечности, но условию (1) не удовлетворяет.

В данной работе приводится обобщение теоремы 1 на более широкий класс гауссовских мер. Основной результат имеет следующий вид.

Теорема 4. *Пусть $0 < \beta < 2$ и при малых $\varepsilon > 0$ для некоторых $c_1, c_2 > 0$ верно*

$$c_1\varepsilon^{-\beta}J(1/\varepsilon) \leqslant H(D,\varepsilon) \leqslant c_2\varepsilon^{-\beta}J(1/\varepsilon), \tag{2}$$

где $J(\,\cdot\,)$ – логарифмически медленно меняющаяся функция на бесконечности. Положим

$$\Psi(\varepsilon,\delta) := \begin{cases} |\log\delta|^{\beta/2}\,\varepsilon^{-\beta}J(1/\varepsilon), & \text{если } |\log\delta| \geqslant \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}\,J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}};\\ \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}\,J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}, & \text{если } |\log\delta| \leqslant \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}\,J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}. \end{cases}$$

Пусть при малых ε, δ, выполнено условие

$$|\log\delta| = o(\varepsilon^{-\gamma}), \qquad \varepsilon \to 0,$$

для некоторого $\gamma > 0$.

Тогда при малых ε, δ верно

$$B_-\Psi(\varepsilon,\delta) \leqslant H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) \leqslant B_+\Psi(\varepsilon,\delta), \tag{3}$$

где B_-, B_+ – константы, зависящие только от $\beta, c_1, c_2, c_3, c_4$ и поведения функции J на бесконечности.

Работа организована следующим образом. В §2 приводятся предложения, на которые мы будем опираться. В §3 приведены примеры гауссовских процессов, к которым применим основной результат этой работы. В §4 представлено доказательство основной теоремы.

§2. Гауссовские меры

Существуют глубокие связи между энтропией эллипсоида рассеяния $H(D,\cdot)$ и функцией малых уклонений

$$\phi(\varepsilon) := -\log P(B(0,\varepsilon)).$$

В частности, имеет место соотношение, установленное в работах Дж. Кэлбса, Венбо Ли и В. Линде [7, 9] (см. также [3, следствия 11.1 и 11.2]).

Теорема 5. *Пусть $0<\alpha<2$ и $J(\cdot)$ – логарифмически медленно меняющаяся функция на бесконечности. Тогда для малых ε справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если $\varepsilon^{-\alpha}J(1/\varepsilon) \preceq \phi(\varepsilon) \preceq \phi(2\varepsilon)$, то*

$$H(D,\varepsilon) \succeq \varepsilon^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2+\alpha}}.$$

(2) *Если $\phi(\varepsilon) \preceq \varepsilon^{-\alpha}J(1/\varepsilon)$, то*

$$H(D,\varepsilon) \preceq \varepsilon^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2+\alpha}}.$$

(3) *Если $H(D,\varepsilon) \succeq \varepsilon^{-\alpha}J(1/\varepsilon)$, то*

$$\phi(\varepsilon) \succeq \varepsilon^{-\frac{2\alpha}{2-\alpha}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\alpha}}.$$

(4) *Если $H(D,\varepsilon) \preceq \varepsilon^{-\alpha}J(1/\varepsilon)$, то*

$$\phi(\varepsilon) \preceq \varepsilon^{-\frac{2\alpha}{2-\alpha}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\alpha}}.$$

Здесь нам потребуется такое следствие этой теоремы.

Предложение 6. *Пусть $0 < \beta < 2$ и при малых $\varepsilon > 0$ для некоторых $c_1, c_2 > 0$ верно*

$$c_1 \varepsilon^{-\beta} J(1/\varepsilon) \leqslant H(D, \varepsilon) \leqslant c_2 \varepsilon^{-\beta} J(1/\varepsilon), \tag{4}$$

где $J(\,\cdot\,)$ – логарифмически медленно меняющаяся функция на бесконечности. Тогда при малых $\varepsilon > 0$ для некоторых $c_3, c_4 > 0$ верно

$$c_3 \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}} \leqslant \phi(\varepsilon) \leqslant c_4 \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}. \tag{5}$$

Сравнивая (3) и (5), видим, что в широком диапазоне значений δ энтропия $H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta)$ ведет себя как логарифм меры малого шара. Однако при малых δ происходит фазовый переход и его значение начинает влиять на mm-энтропию.

§3. Примеры асимптотик функций малых уклонений

Приведем несколько примеров асимптотик функций малых уклонений $\log \mathbb{P}\left(\|X\| \leqslant \varepsilon\right)$ при $\varepsilon \to 0$ для случайного процесса X в некотором нормированном пространстве.

Примеры классических результатов малых уклонений в L_2-норме имеются в [8], приведем здесь несколько из них. В каждом случае мы укажем вид функции $J(x) := J(1/\varepsilon)$, участвующей в асимптотике $\log \mathbb{P}\left(\|X\| \leqslant \varepsilon\right)$.

- Пусть $W(s,t)$ – двумерный стандартный броуновский лист. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

$$\log \mathbb{P}\left(\iint\limits_{[0,1]^2} W^2(s,t)\,dt\,ds \leqslant \varepsilon^2 \right) \sim -\frac{1}{8\pi^2} \varepsilon^{-2} \left(\log \frac{1}{\varepsilon^2} \right)^2.$$

  В данном случае $J(x) = |\log x|^2$.

В работе [6] приведены примеры асимптотики функции малых уклонений. В ней авторы показывают, что для L_2-нормы с весом ρ, заданной формулой

$$\|X\|_\rho^2 = \int X^2(x) \rho(x)\,dx,$$

можно доказать общий результат о вероятности малых уклонений, зная асимптотику собственных чисел $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$, интегрального уравнения

$$\lambda f(x) = \int G_X(x,y) \sqrt{\rho(x)\rho(y)} f(y)\,dt, \tag{6}$$

где G_X – ковариационная функция случайного процесса X. В частности, в работе [6] рассматривается следующий пример:

- Пусть собственные числа λ_n уравнения (6) имеют асимптотику

$$\lambda_n \sim C^* \frac{\log^\sigma(n+1)}{n^p}, \quad n \to \infty, \quad \sigma \in \mathbb{R},\ p > 1,\ C^* > 0.$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

$$\log \mathbb{P}\,(\|X\|_\rho \leqslant \varepsilon) \sim C\varepsilon^{-\frac{2}{p-1}} \log^{\frac{\sigma}{p-1}}(1/\varepsilon),$$

где

$$C = C(\sigma, p, C^*) = -(C^*)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{p-1}{2}\right)^{1-\frac{\sigma}{p-1}} \left(\frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

Здесь $J(x) = \log^{\frac{\sigma}{p-1}}(x)$.

В работах [2, 5] рассматривается специальный класс процессов, называемых мультифрактальным броуновским движением (mBM),

$$W^{H(\cdot)}(x) = C_*(H(x)) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}-1}{|\xi|^{H(x)+\frac{1}{2}}}\, dW(\xi), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $W(\xi)$ – обычный винеровский процесс, а функциональный параметр Хёрста $H(x)$ подчинен условию $0 < H(x) < 1$. Множитель

$$C_*(H) = \left(\frac{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

обеспечивает равенство $\mathbb{E}\,(W^{H(\cdot)})^2(1) = 1$. Процесс $W^{H(\cdot)}$ представляет собой обобщение дробного броуновского движения для переменного параметра H.

Положим $h(x)=H(x)$–$\min H(x)$. Далее считаем, что $\min H(x)=1/2$.

- Пусть $H(x) = \frac{1}{2} + |x - x_0|^\gamma, \gamma > 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

$$\log \mathbb{P}\left(\left\|W^{H(\cdot)}\right\|_{L_2(0,1)} \leqslant \varepsilon\right) \sim -C(x_0)\Gamma^2(1+1/\gamma)\,\varepsilon^{-2}|\log\varepsilon|^{-2/\gamma},$$

где $C(x_0) = 2^{-1-2/\gamma}\mathbf{1}(0 < x_0 < 1) + 2^{-3-2/\gamma}\mathbf{1}(x_0 = 0, 1)$.
Здесь $J(x) = |\log x|^{-2/\gamma}$.

- Пусть $H(x)=\frac{1}{2}+|x-x_0|^\gamma\log^b(|x-x_0|^{-1}), x_0\in(0,1), \gamma>0, b\in\mathbb{R}$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ верно

$$\log\mathbb{P}\left(\left\|W^{H(\cdot)}\right\|_{L_2(0,1)}\leqslant\varepsilon\right)\sim-\frac{\gamma^{2b/\gamma}\Gamma^2(1+1/\gamma)}{2^{1+2/\gamma}}\,\varepsilon^{-2}|\log\varepsilon|^{-2/\gamma}\left|\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right|^{-2b/\gamma}.$$

  Здесь $J(x)=|\log x|^{-2/\gamma}|\log\log x|^{-2b/\gamma}$.
- Пусть функция распределения для $h(x)=H(x)-1/2$ имеет степенную асимптотику:

  $$\mu_h(s):=|\{0<x<1:0<h(x)<s\}|\sim cs^\sigma,\quad s\to 0.$$

  Тогда при $\varepsilon\to 0$ верно

  $$\log\mathbb{P}\left(\left\|W^{H(\cdot)}\right\|_{L_2(0,1)}\leqslant\varepsilon\right)\sim-\frac{c^2\Gamma^2(\sigma+1)}{2^{2\sigma+3}}\varepsilon^{-2}|\log\varepsilon|^{-2\sigma}.$$

  Здесь $J(x)=|\log x|^{-2\sigma}$.
- Пусть параметр Хёрста достигает своего минимального значения на канторовом множестве. Положим $H(x)=h(x)+1/2$, $h(x)=(\mathrm{d}(x))^\gamma$, $\gamma>0$, где $\mathrm{d}(x)$ – расстояние от точки x до канторова множества. Здесь $\mu_h(s):=|\{0\leqslant x\leqslant 1:0<h(x)<s\}|=s^{1-\frac{\log 2}{\log 3}}\varphi(\log s^{-1})$, где φ – периодичная функция. Тогда при $\varepsilon\to 0$ верно

$$\log\mathbb{P}\left\{\left\|W^{H(\cdot)}\right\|_{L_2(0,1)}\leqslant\varepsilon\right\}\sim-2^{-\left(\frac{2}{\gamma}+5\right)}\varepsilon^{-2}|\log\varepsilon|^{-\frac{2}{\gamma}}\widetilde{\Psi}^2\Big(\log\log\frac{1}{\varepsilon^2}\Big),$$

  где функция $\widetilde{\Psi}$ периодична с периодом $\gamma\log 3$.

  Здесь $J(x)=|\log x|^{-\frac{2}{\gamma}}\widetilde{\Psi}^2\left(\log\log x^2\right)$.

Как видно из вышеприведенных примеров, функция $J(x)$ часто оказывается отличной от константы и встречается в разнообразных примерах асимптотик малых уклонений для гауссовских процессов. Для всех этих случаев применима наша теорема 4.

§4. Доказательства

4.1. Общие оценки mm-энтропии: леммы. В данном параграфе приводятся леммы, необходимые для доказательства основной теоремы. Даются лишь формулировки, их доказательства аналогичны приведенным в работе [1, с. 5–7].

Лемма 7. *Для любых $r, \varepsilon > 0$ верно*

$$H^{mm}\Big(\varepsilon, \widehat{\Phi}\Big(\Phi^{-1}(e^{-\phi(\varepsilon/2)}) + r\Big)\Big) \leqslant H\Big(D, \frac{\varepsilon}{2r}\Big). \tag{7}$$

В частности, если выполнено (5) и r, ε, δ таковы, что при $q := 2^{(2+\beta)/(2-\beta)^2}$ выполнено

$$r - q\sqrt{c_4}\,\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}} \geqslant \sqrt{2|\log\delta|}, \tag{8}$$

где J – логарифмически медленно меняющаяся функция на бесконечности, c_4 – постоянная из оценки (5), то

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) \leqslant H\left(D, \frac{\varepsilon}{2r}\right). \tag{9}$$

Лемма 8. *Если выполнено (5), то справедливо соотношение*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \inf_{\delta\leqslant 1/2} H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta)\,\varepsilon^{\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{-\frac{2}{2-\beta}} \geqslant c_3, \tag{10}$$

где J – логарифмически медленно меняющаяся функция на бесконечности, c_3 – постоянная из оценки (5).

Лемма 9. *Для любых $r, \varepsilon > 0$ верно*

$$H^{\mathrm{mm}}\left(\varepsilon, \exp\{-\phi(\varepsilon) - r^2/2\}\right) \geqslant H\Big(D, \frac{4\varepsilon}{r}\Big). \tag{11}$$

В частности, если выполнено (5) и r, ε, δ таковы, что

$$c_4\,\varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}} + \frac{r^2}{2} \leqslant |\log\delta|, \tag{12}$$

где J – логарифмически медленно меняющаяся функция на бесконечности, c_4 – постоянная из оценки (5), то

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) \geqslant H\Big(D, \frac{4\varepsilon}{r}\Big). \tag{13}$$

4.2. Доказательство основной теоремы.

Верхняя оценка. Положим

$$r := \sqrt{2|\log\delta|} + q\sqrt{c_4}\,\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}.$$

Тогда выполнено (8) и по лемме 7 с учетом верхней оценки в (4) получаем

$$\begin{aligned}
&H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) \leqslant H\left(D, \frac{\varepsilon}{2r}\right) \leqslant c_2 \left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^{-\beta} J(2r/\varepsilon)\\
&= 2^{\beta} c_2\, \varepsilon^{-\beta} r^{\beta} J(2r/\varepsilon)\\
&\leqslant 2^{2\beta} c_2\, \varepsilon^{-\beta} J(2r/\varepsilon) \max\left\{\sqrt{2|\log\delta|}; q\sqrt{c_4}\, \varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}\right\}^{\beta}\\
&\leqslant 2^{2\beta} c_2\, \varepsilon^{-\beta} J(2r/\varepsilon) \max\left\{\sqrt{2}; q\sqrt{c_4}\right\}^{\beta} \max\left\{|\log\delta|; \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}\right\}^{\beta/2}\\
&= 2^{2\beta} c_2 \max\left\{\sqrt{2}; q\sqrt{c_4}\right\}^{\beta} \Psi(\varepsilon,\delta) \frac{J(2r/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Теперь разберем два случая влияния δ на поведение величины r.

1) Пусть $|\log\delta| \geqslant \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}$. Поскольку $J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}$ – медленно меняющаяся функция, то для $\kappa := \sqrt{2}+q\sqrt{c_4}$, $\rho > 0$ при малых ε верно

$$\begin{aligned}
2r/\varepsilon &\geqslant \frac{2}{\varepsilon}\kappa\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}\\
&= 2\kappa\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}-1} \underbrace{\frac{J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}}{\varepsilon^{\rho}}}_{\geqslant 1/2\kappa} \varepsilon^{\rho} \geqslant \varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}+\rho}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, пусть $r_1 := \kappa\sqrt{|\log\delta|}$, тогда верно $r_1 \geqslant r$. Учитывая условие на малость δ, получаем $\sqrt{|\log\delta|} = o(\varepsilon^{-\gamma/2})$ с $\gamma > 0$. Таким образом, получаем двусторонюю оценку на $2r/\varepsilon$ при малых ε:

$$\varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}+\rho} \leqslant 2r/\varepsilon \leqslant 2r_1/\varepsilon \leqslant \varepsilon^{-\gamma/2-1}.$$

Следовательно, $2r/\varepsilon = \varepsilon^{-\phi}$ для $2/(2-\beta) - \rho \leqslant \phi \leqslant \gamma/2 + 1$, откуда, используя следствие теоремы 2.0.1 из книги [4], получим

$$J(2r/\varepsilon) \preceq \sup_{2/(2-\beta)-\rho\leqslant\nu\leqslant\gamma/2+1} J(1/\varepsilon^{\nu}) \preceq J(1/\varepsilon).$$

Значит существует такое $\alpha_1 > 0$, что при малых ε верно

$$\begin{aligned}
H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) &\leqslant 2^{2\beta} c_2 \max\left\{\sqrt{2}; q\sqrt{c_4}\right\}^{\beta} \frac{J(2r/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)} \Psi(\varepsilon,\delta)\\
&\leqslant 2^{2\beta} c_2 \max\left\{\sqrt{2}; q\sqrt{c_4}\right\}^{\beta} \frac{\alpha_1 J(1/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)} \Psi(\varepsilon,\delta) =: B_+^{(1)} \Psi(\varepsilon,\delta).
\end{aligned}$$

2) Пусть теперь $|\log\delta| \leqslant \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}$. При $\delta \leqslant 1/2$ получаем $\sqrt{|\log\delta|} \geqslant \sqrt{\log 2}$. Введя $r_2 := \kappa\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}$, аналогичным образом получаем двустороннюю оценку на $2r/\varepsilon$ для любого $\rho > 0$ при малых ε:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1/2} \leqslant 2\kappa\sqrt{|\log\delta|}/\varepsilon \leqslant 2r/\varepsilon&\\ &\leqslant 2r_2/\varepsilon = \frac{2\kappa}{\varepsilon}\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}\\ &= 2\kappa\varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}}\frac{1}{\varepsilon^\rho}\underbrace{J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}\varepsilon^\rho}_{\leqslant 1/2\kappa} \leqslant \varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}-\rho}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$J(2r/\varepsilon) \preceq \sup_{1/2\leqslant\nu\leqslant 2/(2-\beta)+\rho} J(1/\varepsilon^\nu) \preceq J(1/\varepsilon),$$

откуда получаем при $\alpha_2 > 0$ и малых ε

$$\begin{aligned}H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) &\leqslant 2^{2\beta}c_2\max\left\{\sqrt{2}; q\sqrt{c_4}\right\}^\beta \frac{J(2r/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)}\Psi(\varepsilon,\delta)\\ &\leqslant 2^{2\beta}c_2\max\left\{\sqrt{2}; q\sqrt{c_4}\right\}^\beta \frac{\alpha_2 J(1/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)}\Psi(\varepsilon,\delta) =: B_+^{(2)}\Psi(\varepsilon,\delta).\end{aligned}$$

Таким образом, в любом случае

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) \leqslant B_+\Psi(\varepsilon,\delta)$$

с константой

$$B_+ := \max\{B_+^{(1)}; B_+^{(2)}\}.$$

Нижняя оценка. Рассмотрим три возможных случая.

1) Пусть $|\log\delta|\varepsilon^{\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{-\frac{2}{2-\beta}} \geqslant \max\{2c_4, 1\}$. Положим $r := \sqrt{|\log\delta|}$. Тогда выполнено (12) и по лемме 9 с учетом нижней оценки в (4) получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) &\geqslant H\Big(D, \frac{4\varepsilon}{r}\Big) \geqslant c_1\Big(\frac{4\varepsilon}{r}\Big)^{-\beta} J(r/4\varepsilon)\\ &= 2^{-2\beta}c_1\, r^\beta\,\varepsilon^{-\beta} J(r/4\varepsilon)\\ &= 2^{-2\beta}c_1\,|\log\delta|^{\beta/2}\varepsilon^{-\beta}J(1/\varepsilon)\frac{J(r/4\varepsilon)r^\beta}{J(1/\varepsilon)|\log\delta|^{\beta/2}}\\ &= 2^{-2\beta}c_1\,\Psi(\varepsilon,\delta)\frac{J(r/4\varepsilon)r^\beta}{J(1/\varepsilon)|\log\delta|^{\beta/2}}\end{aligned}$$

$$= 2^{-2\beta} c_1 \, \Psi(\varepsilon,\delta) \frac{J(r/4\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)}.$$

Поскольку

$$r = \sqrt{|\log\delta|} \geqslant \sqrt{\max\{2c_4, 1\}} \varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}},$$

то

$$r/4\varepsilon \;\geqslant\; \alpha_0 \varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}} \; J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}},$$

где $\alpha_0 = \sqrt{\max\{2c_4, 1\}}/4$. Функция $J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}$ – медленно меняющаяся, значит для любого $\rho > 0$ верно

$$r/4\varepsilon \geqslant \alpha_0 \varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}} \underbrace{\frac{J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}}{\varepsilon^{\rho}}}_{\geqslant 1/\alpha_0} \varepsilon^{\rho} \geqslant \varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}+\rho}$$

при малых ε. Поскольку $|\log\delta| = o(\varepsilon^{-\gamma})$ для $\gamma > 0$, то $r = o(\varepsilon^{-\gamma/2})$, тогда $r/4\varepsilon \leqslant \varepsilon^{-\gamma/2-1}$. Следовательно, $r/4\varepsilon = \varepsilon^{-\phi}$ для $2/(2-\beta) - \rho \leqslant \phi \leqslant \gamma/2 + 1$, откуда получаем двустороннюю оценку для $1/\phi$:

$$\frac{1}{1+\gamma/2} \leqslant \frac{1}{\phi} \leqslant \frac{1}{2/(2-\beta)-\rho}.$$

Используя следствие теоремы 2.0.1 из книги [4], имеем

$$J(1/\varepsilon) \preceq \sup_{1/(1+\gamma/2)\leqslant\nu\leqslant 1/(2/(2-\beta)-\rho)} J((r/4\varepsilon)^{\nu}) \preceq J(r/4\varepsilon),$$

откуда для $\alpha > 0$ получаем

$$\frac{J(r/4\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)} \geqslant \frac{\alpha J(1/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)} = \alpha.$$

Значит при малых ε верна оценка снизу

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) \geqslant 2^{-2\beta} c_1 \alpha \Psi(\varepsilon,\delta).$$

2) Пусть $1 \leqslant |\log\delta| \, \varepsilon^{\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{-\frac{2}{2-\beta}} \leqslant 2c_4$. Тогда по лемме 8 при малых ε имеем

$$\begin{aligned}
H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) &\geqslant \frac{c_3}{2} \, \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}} \\
&= \frac{c_3}{2} \, |\log\delta|^{\beta/2} \varepsilon^{-\beta} J(1/\varepsilon) \left(|\log\delta| \varepsilon^{\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{-\frac{2}{2-\beta}} \right)^{-\beta/2} \\
&\geqslant \frac{c_3}{2} |\log\delta|^{\beta/2} \varepsilon^{-\beta} \, J(1/\varepsilon) (2c_4)^{-\beta/2} \\
&= 2^{-1-\beta/2} c_3 c_4^{-\beta/2} \Psi(\varepsilon,\delta).
\end{aligned}$$

3) Пусть $|\log\delta|\,\varepsilon^{\frac{2\beta}{2-\beta}}J(1/\varepsilon)^{-\frac{2}{2-\beta}}\leqslant 1$. Тогда по лемме 8 при малых ε получаем

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta)\geqslant\frac{c_3}{2}\,\varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}=\frac{c_3}{2}\,\Psi(\varepsilon,\delta).$$

Таким образом, в любом случае

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta)\geqslant B_-\Psi(\varepsilon,\delta)$$

с константой

$$B_-:=\min\Big\{2^{-2\beta}c_1\alpha;2^{-1-\beta/2}c_3c_4^{-\beta/2};\frac{c_3}{2}\Big\}.$$

Список литературы

1. А. М. Вершик, М. А. Лифшиц, *О mm-энтропии банахова пространства с гауссовской мерой.* — Теория вероятн. и ее примен. **68**, No. 3 (2023), 532–543.
2. А. И. Кароль, *Сингулярные числа компактных псевдодифференциальных операторов переменного порядка с негладким символом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **519** (2022), 67–104.
3. М. А. Лифшиц, *Лекции по гауссовским процессам*, Лань, 2016.
4. N. Bingham, C. Goldie, J. Teugels, *Regular Variation* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications), Cambridge University Press, 1987.
5. A. I. Karol, A. I. Nazarov, *Spectral analysis for some multifractional Gaussian processes.* — Russ. J. Math. Phys. **28** (2021), 488–500.
6. A. I. Karol, A. I. Nazarov, Ya. Yu. Nikitin, *Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators.* — Trans. Amer. Math. Soc. **360**, No. 3 (2008), 1443–1474.
7. J. Kuelbs, W. V. Li, *Metric entropy and the small ball problem for Gaussian measures.* — J. Func. Anal. **116** (1993), 133–157.
8. W. Li, *Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms.* — J. Theor. Probab. **5**, No. 1 (1992), 1–31.
9. W. V. Li, W. Linde, *Approximation, metric entropy and small ball estimates for Gaussian measures.* — Ann. Probab. **27** (1999), 1556–1578.

Tadevosian A. A. On the mm-entropy of distributions of Gaussian processes.

For a wide class of Banach spaces with Gaussian measure, it is shown that their Shannon entropy (mm-entropy) is closely related to the entropy of the corresponding kernel's ball and behaves in a certain range in the same way as the logarithm of the measure of small balls. The obtained results generalize the recent results of A. M. Vershik and M. A. Lifshits.

С-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., 7-9
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: tadevosiaan@yandex.ru

Поступило 30 сентября 2023 г.