Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 525, 2023 г.

Л. В. Розовский

О ПОЛНОЙ СХОДИМОСТИ МОМЕНТОВ СУММ Н.О.Р.С.В. С КОНЕЧНЫМИ ДИСПЕРСИЯМИ

§1. Введение и результаты

В дальнейшем, X, X_n, $n \geqslant 1$, обозначает последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения $V(x)$, $\mathbf{E}\,X = 0$, $\mathbf{E}\,X^2 = 1$; $\overline{S}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/\sqrt{n}$; δ, s, r – некоторые постоянные, причем $\delta > 0$, а $s+1$ и r неотрицательны. Положим

$$\Sigma_r(\varepsilon) = \sum_{n\geqslant 1} n^s \mathbf{E}\,\overline{S}_n^r\, I[\overline{S}_n \geqslant \varepsilon n^\delta], \quad \widetilde{\lambda} = 2s+4-r, \quad \lambda = \widetilde{\lambda}/(1+2\delta),$$
$$\overline{\mu}_r(u) = \int_u^\infty y^r\, dV(y), \quad L_r(\lambda) = \int_1^\infty \overline{\mu}_r(u)\, u^{\lambda-1}\, du. \tag{1.1}$$

Асимптотическому поведению суммы $\Sigma_r(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ (в основном, для $r=0$ и в двухсторонней постановке) посвящено значительное количество публикаций, начиная с работ [1] и [2]. Заинтересованный читатель может ознакомиться с обзорами [3] и [4], а также с работами [6] и [7]. Более поздние результаты, имеющие отношение к изучаемой проблематике, содержатся в [8–13].

Перейдем к изложению результатов настоящей работы.

Сначала приведем критерий сходимости ряда, асимптотическое поведение которого изучается.

Теорема 1. *Ряд $\Sigma_r(\varepsilon)$ сходится при любом/некотором $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда*

$$L_r(\lambda) < \infty. \tag{1.2}$$

Ключевые слова: скорость сходимости, точная асимптотика, полная сходимость моментов.

Замечание 1.1. Условие (1.2) равносильно предположениям ($X^+ = \max(X, 0)$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,(X^+)^{r+\lambda} < \infty, &\quad \text{если} \quad \lambda > 0 \text{ (т.е. } \ 0 \leqslant r < 2s+4), \\ \mathbf{E}\,(X^+)^r \log X^+ < \infty, &\quad \text{если} \quad \lambda = 0 \text{ (т.е. } \ r = 2s+4), \\ \mathbf{E}\,(X^+)^r < \infty, &\quad \text{если} \quad \lambda < 0 \text{ (т.е. } \ r > 2s+4). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Заметим, что если

$$r < 2 \quad \text{и} \quad s + 1 \leqslant \delta\,(2 - r), \tag{1.4}$$

то предположение (1.2) не является ограничением, поскольку вытекает из условия $\mathbf{E}\,X^2 < \infty$.

Далее, предполагая, что *необходимое* условие (1.2) выполняется, перейдем к более детальному исследованию суммы $\Sigma_r(\varepsilon)$.

Введем ряд дополнительных обозначений. Положим

$$\beta(y) = \int\limits_{|x|<y} |x|^3\,dV(x), \ \ \overline{D}(y) = \mathbf{E}\,X^2\,I[|X| \geqslant y],$$

$$\lambda(y) = \mathbf{E}\,X^2 \Big(1 \wedge \frac{|X|}{y}\Big)\Big(= \overline{D}(y) + \beta(y)/y = \frac{1}{y}\int\limits_0^y \overline{D}(u)\,du\Big), \ \ y > 0, \tag{1.5}$$

а также

$$\begin{aligned} J_2(y) &= y^{-2(r+1)\delta} \int\limits_1^y \lambda(u)\,u^{\tau-1}\,du \quad (\tau = 2s + 2 + 2\,(r+1)\,\delta), \\ J_3(y) &= y^{2\delta\lambda} \int\limits_y^\infty \overline{\mu}_r(u)\,u^{\lambda-1}\,du, \ \ y \geqslant 1; \\ A_r(\varepsilon) &= \sum_{1 \leqslant n \leqslant \varepsilon^{-1/\delta}} n^s\,\big(\mathbf{E}\,(\overline{S}_n^+)^r - \mathbf{E}\,|\xi|^r/2\big), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где через ξ обозначена случайная величина со стандартным нормальным распределением.

Предложение 1. *Пусть условие* (1.2) *выполнено. Тогда*

$$\begin{aligned}\Sigma_r(\varepsilon) = B(s,\varepsilon)\mathbf{E}\,|\xi|^{r+(s+1)/\delta} + B(s)/2 + A_r(\varepsilon) + o(1)\\ + O\big(I[2s+1=r=0]\,\log\rho + J_2(\rho)\\ + I[r<2s+4]J_3(\rho)\big), \quad \varepsilon\to+0.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь $\rho=\varepsilon^{-1/2\delta}$, $I[\cdots]$ *обозначает индикатор* $\cdots$,

$B(s,\varepsilon)=\rho^{2s+2}/(2s+2)$, $s+1>0$; $B_r(-1,\varepsilon)=\log\rho$,

$$B(s)=\mathbf{E}\,|\xi|^r \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N} n^s - N^{s+1}/(s+1)\right\}, \text{ *если* } s>-1, \text{ *и* } \tag{1.8}$$

$B(-1)=C\,\mathbf{E}\,|\xi|^r+(1/\delta)\,\mathbf{E}\,|\xi|^r\log|\xi|$,

где C *– постоянная Эйлера.*

Отметим (см. (1.6)), что если $\tau>1$, то слагаемое $J_2(\rho)$ в (1.7) можно без потери точности заменить на $\rho^{2s+2}\,\lambda(\rho)$. В частности, если $2s+1\geqslant 0$, то при $\varepsilon\to+0$

$$\begin{aligned}&\Sigma_r(\varepsilon)=B(s,\varepsilon)\,\mathbf{E}\,|\xi|^{r+(s+1)/\delta}+A_r(\varepsilon)\\ &+O\big(I[2s+1=r=0]\,\log\rho+\rho^{2s+2}\lambda(\rho)+I[r<2s+4]J_3(\rho)\big).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Заметим также, что

$$\liminf_{\varepsilon\to+0}\Sigma_r(\varepsilon)/J_3(\rho)\geqslant 1/2. \tag{1.10}$$

Предложение 1 является главным результатом работы. Основное его достоинство – справедливость при всех допустимых значениях параметров s, r, δ без каких-либо дополнительных моментных предположений. Последнее позволяет, налагая те или иные ограничения, получать новые результаты с более простыми формулировками, как, например, следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $-1\leqslant s<-1/2$. *Предположим, что выполнены условия* (1.3),

$$\text{*ряд* } A_r(+0)=\sum_{n\geqslant 1} n^s\left(\mathbf{E}\,(\overline{S}_n^{+})^r-\mathbf{E}\,|\xi|^r/2\right) \text{ *сходится,*} \tag{1.11}$$

$$\lim_{y\to\infty}\; y^{2s+2}\,\overline{D}(y)=0, \tag{1.12}$$

а также

$$\lim_{y\to\infty}\overline{\mu}_r(y)\,y^{2s+4-r}=0, \quad 2<r<2s+4. \tag{1.13}$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\Sigma_r(\varepsilon)-B(s,\varepsilon)\,\mathbf{E}\,|\xi|^{r+(s+1)/\delta}\Big)=B(s)/2+A_r(+0). \tag{1.14}$$

Отметим (см. замечание 2.2), что условие (1.11) здесь выполняется, если

$$\mathbf{E}\,|X|^{2s+4}<\infty\,(s>-1)\ \text{ и }\ \mathbf{E}\,X^2\,\log|X|<\infty\,(s=-1). \tag{1.15}$$

В частности, если выполнены условия (1.3) ($\lambda\leqslant 0$) и (1.15) ($-1\leqslant 2s+1<0$), то имеет место (1.14). Аналогичный более общий результат можно найти в [12, предложение 1].

Приведем еще одно полезное следствие предложения 1. Для этого нам понадобится дополнить обозначения из (1.1) и (1.6), положив

$$\begin{gathered}J_4(y)=\int_1^y\lambda(u)\,u^{2s+1}\,du,\quad J_5(y)=\int_1^y\overline{\mu}_r(u)\,u^{\tilde{\lambda}-1}\,du,\ y>1,\\ J_6(y)=J_3(y)+J_5(y)\bigg(=y^{2\,\delta\,\lambda}\int_1^\infty\overline{\mu}_r(u)\,u^{\lambda-1}\,(1\wedge u/y)^{2\delta\lambda}\,du\bigg).\end{gathered} \tag{1.16}$$

Заметим, что $J_5(y)\leqslant J_4(y)\,(0\leqslant r\leqslant 2)$

Предложение 2. *Пусть условие* (1.2) *выполнено. Тогда при* $\varepsilon\to+0$

$$\Sigma_r(\varepsilon)=B(s,\varepsilon)\,\mathbf{E}\,|\xi|^{r+(s+1)/\delta}+O\left(J_4(\rho)+I[\lambda>0]\,J_6(\rho)\right). \tag{1.17}$$

В частности,

$$\Sigma_r(\varepsilon)=B(s,\varepsilon)\,\mathbf{E}\,|\xi|^{r+(s+1)/\delta}+O\left(J_4(\rho)\right)+o\left(\rho^{2\,\delta\,\lambda}\right) \tag{1.18}$$

и, если $0\leqslant r\leqslant 2$, *то*

$$\begin{aligned}\Sigma_r(\varepsilon)=&B(s,\varepsilon)\,\mathbf{E}\,|\xi|^{r+(s+1)/\delta}\\ &+O\Big(J_4(\rho)+I[\lambda+r>2]\rho^{2\delta\lambda}\int_\rho^\infty u^{r+\lambda}\,dV(u)\Big).\end{aligned} \tag{1.19}$$

Замечание 1.2. При $y\to\infty$, если $s>-1/2$, то

$$J_4(y)\asymp y^{2s+2}\,\lambda(y); \tag{1.20}$$

если же $-1\leqslant s<-1/2$ и $J_4(\infty)=\infty$, то

$$J_4(y)\asymp\begin{cases}\mathbf{E}\,(y^2\wedge X^2)^{s+1}\,X^2, & -1<s<-1/2,\\ \mathbf{E}\,X^2\,\log\left(|y|\wedge|X|\right), & s=-1.\end{cases} \tag{1.21}$$

Кроме того, при $s = -1/2$

$$\lambda(1)\,\log y \leqslant J_4(y) \leqslant y\,\lambda(y)\,\log y, \quad y > 1. \tag{1.22}$$

Что касается условия $J_4(\infty) < \infty$, то при $-1 \leqslant s < -1/2$ оно равносильно (1.15) (если $s > -1/2$, то $J_4(\infty) = \infty$).

Замечание 1.3. Пусть $\beta \in (0, \infty)$. Соотношение $\lambda(y) \sim \beta/y$, $y \to \infty$, имеет место тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\,|X|^3 = \beta$.

Кроме того, если положительная функция $\tau(u)$, $u > 1$, не убывает, а $u/\tau(u)$ монотонно растет к бесконечности (например, $\tau(u) = u^\delta$, $0 \leqslant \delta < 1$), и $\mathbf{E}\,\tau(|X|)\,X^2 < \infty$, то $\lambda(u) = o\,(1/\tau(u))$, $u \to \infty$.

Также, если $\overline{D}(u) \leqslant \widetilde{D}(u)$, где $\widetilde{D}(u)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\alpha \in (-1, 0]$, то $\lambda(u) = O\,(\widetilde{D}(u))$, $u \to \infty$. Отсюда, в частности, при $s = -1/2$ следует оптимальная оценка $J_4(y) = O\left(y\,\widetilde{D}(y)\right)$, $y \to \infty$ (для сравнения см. (1.22)).

Далее приведем одно из следствий предложения 2.

Следствие 1. *Пусть* $2s+1 > 0$ *и* $0 \leqslant r < 2s+4$. *Тогда, если* $r+\lambda \leqslant 2$, *то при* $\varepsilon \to +0$

$$\varepsilon^{(s+1)/\delta}\,\Sigma_r(\varepsilon) = \frac{1}{2s+2}\,\mathbf{E}\,|\xi|^{r+(s+1)/\delta} + O\left(\lambda(\rho)\right) \quad (\rho = \varepsilon^{-1/2\delta});$$

в частности, если $s+1 = \delta\,(2-r)$, *то*

$$\varepsilon^{(s+1)/\delta}\,\Sigma_r(\varepsilon) = \frac{1}{2s+2} + O\left(\lambda(\rho)\right). \tag{1.23}$$

Если же $r+\lambda > 2$ *и* $\mathbf{E}\,(X^+)^{r+\lambda} < \infty$, *то*

$$\varepsilon^{(s+1)/\delta}\,\Sigma_r(\varepsilon) = \frac{1}{2s+2}\,\mathbf{E}\,|\xi|^{r+(s+1)/\delta} + O\left(\lambda(\rho)\right) + o\left(\rho^{-\lambda+2-r}\right),\ \varepsilon \to +0.$$

Имея в виду замечание 1.3, видим, что оценка (1.23) при $\delta = 1/2$ является уточнением пионерского результата [1] и всех известных автору (см. [5, 6]) его обобщений.

Приведем еще одно следствие теоремы 1 и предложения 2, которое при $r = 0$ включает “правосторонние” варианты утверждений из [2].

Теорема 3. *Если ряд* $\Sigma_r(\varepsilon)$ *сходится при некотором* $\varepsilon > 0$, *то*

$$\Sigma_r(\varepsilon) \sim B(s,\varepsilon)\,\mathbf{E}\,|\xi|^{r+(s+1)/\delta}, \quad \varepsilon \to +0.$$

В заключение заметим, что каждому предыдущему результату можно поставить в соответствие вытекающий из него “двухсторонний” аналог. Ограничимся вариантами теоремы 1 и предложения 1.

Положим

$$\overline{\Sigma}_r(\varepsilon) = \sum_{n\geqslant 1} n^s\,\mathbf{E}\,|\overline{S}_n^r|\,I[|\overline{S}_n| \geqslant \varepsilon\, n^\delta], \quad \overline{\nu}_r(u) = \mathbf{E}\,|X|^r\,I[|X| \geqslant u],$$

$$\overline{A}_r(\varepsilon) = \sum_{1\leqslant n\leqslant \varepsilon^{-1/\delta}} n^s\,d_{rn}, \quad d_{rn} = \mathbf{E}\,|\overline{S}_n|^r - \mathbf{E}\,|\xi|^r,$$

и пусть функция $\overline{J}_3(y)$ получена из $J_3(y)$ заменой $\overline{\mu}_r(u)$ на $\overline{\nu}_r(u)$.

Теорема 1$'$. *Ряд $\overline{\Sigma}_r(\varepsilon)$ сходится при любом/некотором $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\overline{J}_3(1) < \infty. \tag{1.24}$$

Заметим, что (1.24) равносильно условию (1.3), в котором X^+ заменен на $|X|$. Также напоминаем, что если выполнены условия (1.4), то (1.24) ограничением не является.

Предложение 1$'$. *Пусть условие* (1.24) *выполнено. Тогда*

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}_r(\varepsilon) &= 2\,B(s,\varepsilon)\,\mathbf{E}\,|\xi|^{r+(s+1)/\delta} + B(s) + \overline{A}_r(\varepsilon) + o(1)\\ &\quad + O\big(I[2s+1 = r = 0]\,\log\rho + J_2(\rho)\\ &\qquad + I[r < 2s+4]\,\overline{J}_3(\rho)\big), \quad \varepsilon \to +0.\end{aligned} \tag{1.25}$$

Проверяя (1.25) при $r = 0$, оцениваем $\mathbf{P}(\overline{S}_n = 0)$ по (2.2).

Очевидно, что $\overline{A}_r(\varepsilon) = 0$, если $r = 0$ или 2.

В случае произвольных $r > 0$, оценить сумму $\overline{A}_r(\varepsilon)$, а также найти условия, при которых ряд $\overline{A}_r(+0)$ сходится, можно воспользовавшись результатами работы [17].

Там, например, показано, что если $0<r<2$, $-1\leqslant s<\min\,(0,(r-1)/2)$ и выполнено условие (1.15), то $\overline{A}_r(+0) < \infty$; если же $2 < r < 4$, то сходимость ряда $\overline{A}_r(+0)$ обеспечивается выполнением условий (1.24) ($\lambda \leqslant 0$) (см. (1.1)) или $\mathbf{E}\,|X|^{2s+4} < \infty$ ($\lambda > 0$).

§2. Доказательства

Используя обозначения предыдущего параграфа, приведем несколько вспомогательных результатов.

Положим

$$
\begin{aligned}
\Delta_n(x) &= \mathbf{P}(\overline{S}_n < x) - \mathbf{P}(\xi < x),\\
\Delta_n &= \sup_x |\Delta_n(x)|, \quad \widetilde{\Delta}_n(x) = \Delta_n(x) - \Delta_n(0),\\
\overline{V}(x) &= 1 - V(x), \qquad\qquad (2.0)\\
d_{nr}(x) &= \int_x^\infty y^r\, d\Delta_n(y) (= \mathbf{E}\,\overline{S}_n^r\, I[\overline{S}_n \geqslant x] - \mathbf{E}\,\xi^r I[\xi \geqslant x]), \quad x \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Справедливы оценки

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n \geqslant x) \geqslant \bigl(1/2 - C\,\lambda(\sqrt{n})\bigr)\, n\,\overline{V}(x\sqrt{n}), \quad x \geqslant 1, \tag{2.1}$$

$$|\widetilde{\Delta}_n(y)| \leqslant C\,\bigl(1/\sqrt{n} + y\,\lambda(\sqrt{n})\bigr), \quad y \geqslant 0, \tag{2.2}$$

$$\Delta_n < C\,\lambda(\sqrt{n}), \tag{2.3}$$

где $C > 0$ – некоторая абсолютная постоянная. Кроме того, при любом $K \geqslant 4$ и некотором $A = A(K)$

$$|\Delta_n(x)| \leqslant A\,\lambda(\sqrt{n})\, x^{-K} + n\overline{V}(x\sqrt{n}/K), \quad x \geqslant 1. \tag{2.4}$$

Наконец, при $\varepsilon \to 0$

$$\widehat{I}_r(\varepsilon) = \sum_{n \geqslant 1} n^s \mathbf{E}\,\xi^r I[\xi > \varepsilon n^\delta] = B(s,\varepsilon)\mathbf{E}\,|\xi|^{r+(s+1)/\delta} + B(s)/2 + o(1). \tag{2.5}$$

Оценка (2.1) доказана в [14]; условия (2.3), 2.4) и (2.2) вытекают из [15, (1.9) и теорема 1.2] и [16], соответственно, а (2.5) – следствие [13, теорема 5].

Доказательство теоремы 1. Начнем с проверки необходимости. Из (2.1) следует

$$\mathbf{E}\,\overline{S}_n^r\, I[\overline{S}_n \geqslant x] \geqslant \bigl(1/2 - C\,\lambda(\sqrt{n})\bigr)\, n^{1-r/2}\, \overline{\mu}_r(x\sqrt{n}), \quad x \geqslant 1.$$

Поэтому, если $n \geqslant n_0$, где n_0 достаточно велико, то (см. (1.1))

$$\begin{aligned}
&\bigl(1/2 - C\lambda(\sqrt{n_0})\bigr)^{-1} \sum_{n \geqslant n_0} n^s \mathbf{E}\, \overline{S}_n^r\, I[\overline{S}_n \geqslant \varepsilon\, n^\delta] \\
&\geqslant \sum_{n \geqslant n_0} n^{s+1-r/2}\, \overline{\mu}_r(\varepsilon\, n^{\delta+1/2}) \\
&\geqslant \int_{n_0}^{\infty} u^{s+2-r/2}\, \overline{\mu}_r(\varepsilon\, u^{\delta+1/2})\, du/u = \varepsilon^{-\lambda} \int_{\varepsilon\, n_0^{\delta+1/2}}^{\infty} \overline{\mu}_r(u)\, u^{\lambda-1}\, du.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Таким образом, если ряд $\Sigma_r(\varepsilon)$ сходится при некотором $\varepsilon > 0$, то интеграл $J_3(1) = L_r(\lambda)$ также сходится, и наоборот, если интеграл $J_3(1)$ расходится, то и ряд $\Sigma_r(\varepsilon)$ расходится, причем при любом $\varepsilon > 0$, т.е. необходимость нами доказана.

Кроме того, полагая в (2.6) n_0 равным целой части $\varepsilon^{-1/\delta}$ (откуда $n_0 \leqslant \rho^2 = \varepsilon^{-1/\delta}$) и учитывая, что $\Sigma_r(+0) = \infty$, придем к (1.10).

Достаточность в теореме 1 (т.е. сходимость ряда $\Sigma_r(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$) несложно проверяется при помощи оценки (2.4).

Доказательство предложения 1. Пусть $\varepsilon > 0$ мало, $\rho = \varepsilon^{-1/2\delta}$, $N = [\rho^2] + 1$, целое $k \geqslant 1$.

Имеем (см. (1.1), (2.0) и (2.5)),

$$\begin{aligned}
\Sigma_r(\varepsilon) &= \widehat{I}_r(\varepsilon) + \sum_{n \geqslant 1} n^s\, d_{nr}(\varepsilon\, n^\delta); \\
\sum_{n \geqslant 1} n^s\, d_{nr}(\varepsilon\, n^\delta) &= \Biggl(\sum_{1 \leqslant n < k} + \sum_{n=k}^{N} + \sum_{n > N} \Biggr) n^s\, d_{nr}(\varepsilon\, n^\delta) \\
&= S_0(\varepsilon) + S_1(\varepsilon) + S_2(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Исследуя суммы $S_0(\varepsilon)$ и $S_1(\varepsilon)$, при $r > 0$ будем полагать $k = 1$, т.е. считать, что $S_0(\varepsilon) = 0$.

Если же $r = 0$, то в силу ЦПТ при любом фиксированном $k > 1$

$$S_0(\varepsilon) = \sum_{1 \leqslant n < k} n^s\, d_{nr}(0) + o\,(1), \quad \varepsilon \to +0. \tag{2.8}$$

Далее, при $x = \varepsilon\, n^{\delta}$

$$d_{nr}(x) = d_{nr}(0) - \int\limits_0^x y^r\, d\Delta_n(y),$$

$$\int\limits_0^x y^r\, d\Delta_n(y) = x^r\, \widetilde{\Delta}_n(x) - \int\limits_0^x \widetilde{\Delta}_n(y)\, dy^r, \tag{2.9}$$

причем по (2.2)

$$\Big| \int\limits_0^x y^r\, d\Delta_n(y) \Big| < 2\, C\, \big(x^r/\sqrt{n} + x^{r+1}\, \lambda(\sqrt{n})\big). \tag{2.10}$$

Таким образом,

$$d_{nr}(x) = d_{nr}(0) + \theta\, \big(x^r/\sqrt{n} + x^{r+1}\, \lambda(\sqrt{n})\big), \quad |\theta| < 2\, C. \tag{2.11}$$

В дальнейшем, параметры C, не всегда одни и те же, зависят лишь от постоянных s, r и δ.

Из (2.11) и (2.7) следует

$$S_1 - \sum_{n=k}^{N} n^s\, d_{nr}(0) = \theta_1 \sum_{n=k}^{N} n^s \big(\varepsilon^r n^{r\delta - 1/2} + \varepsilon^{r+1} n^{(r+1)\delta} \lambda(\sqrt{n})\big), \quad |\theta_1| < C.$$

Заменяя здесь сумму справа соответствующими интегралами, с учетом (2.8) и определения N, найдем (см. (1.6))

$$S_0(\varepsilon) + S_1(\varepsilon) = d_r(\varepsilon) + o\,(1) + O\,\big(J_1(\rho, k) + J_2(\rho)\big), \quad \varepsilon \to +0, \tag{2.12}$$

где

$$J_1(\rho, k) = \rho^{-2r\delta} \int\limits_{\sqrt{k}}^{\rho} u^{2s+2r\delta}\, du \quad (J_1(\rho) = J_1(\rho, 1)) \tag{2.13}$$

(напомним, что $k = 1$, если $r > 0$, и может быть любым при $r = 0$).

Далее, оценивая сумму $S_2(\varepsilon)$ интегралом, получим (см. (1.6) и (2.7))

$$S_2(\varepsilon) \leqslant C\, \big(\rho^{2s+2}\, \lambda(\rho) + J_3(\rho)\big). \tag{2.14}$$

Замечание 2.1. Положим $\overline{\tau} = 2s+1+2\, r\, \delta,$ т.е. (см. (1.6)) $\tau = 1+2\, \delta+\overline{\tau}$. Тогда при $y > 1$

$$\tau\, J_2(y) \geqslant y^{2s+2}\, \lambda(y) - \lambda(1) \geqslant \lambda(1)\, (y^{2s+1} - 1), \tag{2.15}$$

и, если $\tau > 1$ (как в случае $\overline{\tau} \geqslant 0$), то

$$\lambda(1)\, y^{-2r\delta}\,(y^{\overline{\tau}} - y^{-2\delta}) \leqslant (\tau - 1)\, J_2(y) \leqslant y^{2s+2}\,\lambda(y) - \lambda(1) \tag{2.16}$$

(это следует из монотонности функций $u\,\lambda(u)$ и $\lambda(u)$). При этом $1 \geqslant \lambda(1) \geqslant 23/27$. Чтобы убедиться в справедливости последней оценки, заметим, что $\lambda(1) = 1 - y + \mathbf{E}\,|X|^3\, I[|X| \leqslant 1] \geqslant 1 - y + y^{3/2} \geqslant 23/27$, где $y = \mathbf{E}\,X^2\, I[|X| \leqslant 1]$.

Принимая во внимание оценку (2.16) и равенства

$$J_1(y) = y^{-2r\delta}\,(y^{\overline{\tau}} - 1)/\overline{\tau}\ (\overline{\tau} > 0), \quad J_1(y) = y^{-2r\delta}\,\ln y\ (\overline{\tau} = 0),$$

видим, что $J_1(y) = O\,(J_2(y)) + o\,(1)$, $y \to \infty$, когда $r > 0$. С учетом произвольности k и оценки (2.15), несложно проверяется факт, что интеграл $J_1(\rho, k)$ при $r = 0$ имеет аналогичную оценку за исключением случая $2s + 1 = 0$, при котором $J_1(y, k) \leqslant \ln y$.

Кроме того, если $\lambda \leqslant 0$, то $\lim\limits_{y\to\infty} J_3(y) = 0$, а если $\lambda > 0$ (т.е. $r < 2s + 4$), то

$$\lambda\, J_3(y) \leqslant y^{2\delta\lambda} \int\limits_y^\infty u^{r+\lambda}\, dV(u), \tag{2.17}$$

откуда при $r + \lambda \leqslant 2$, в частности, получим

$$\lambda\, J_3(y) \leqslant y^{2s+2}\, \overline{D}(y) \leqslant y^{2s+2}\, \lambda(y). \tag{2.18}$$

Предложение 1, т.е. равенство (1.7), следует из оценок (2.5), (2.7), (2.12), (2.14) и замечания 2.1. Соотношение (1.9) вытекает из (1.7) и (2.15).

Далее проверим теорему 2. Если $\lambda > 0$, то соотношение $\lim\limits_{y\to\infty} J_3(y) = 0$ вытекает из (1.13) и правила Лопиталя. Если же $r \leqslant 2$, то (1.13) следует из (1.12), поскольку $\overline{\mu}_r(y) \leqslant y^{r-2}\, \overline{D}(y)$.

Рассмотрим замечание 1.2. Последнее утверждение и оценку (1.21) можно доказать, воспользовавшись соотношением

$$\widetilde{D}(y) \leqslant J_4(y) \leqslant (\widetilde{D}(y) + \lambda(1))/|2s + 1|, \tag{2.19}$$

в котором $\widetilde{D}(y) = \int\limits_1^y \overline{D}(u)\, u^{2s+1}\, du$, $-1 \leqslant s < -1/2$.

Условие, равносильное предположению $J_4(\infty) < \infty$, получим из (2.19) и замечания 1.1, заменив в нем (и в $L_r(\lambda)$) $\overline{\mu}_r(u)$ на $\overline{D}(u)$, а λ на $2s + 2$.

Оценка (1.20) проверяется аналогично (2.15) и (2.16).

Чтобы обосновать предложение 2, воспользуемся нижеследующим утверждением.

Замечание 2.2. Имеет место оценка ($\rho = \varepsilon^{-1/2\delta}$)

$$|A_r(\varepsilon)| = O\left(J_4(\rho) + J_5(\rho)\right), \quad \varepsilon \to +0. \tag{2.20}$$

Оценка (2.20) проверяется при помощи (2.3), (2.4) и неравенства

$$\begin{aligned} |d_n(0)| &\leqslant \Delta_n + \int_1^\infty |\Delta_n(y)|\, dy^r \\ &\leqslant C\left(\lambda(\sqrt{n}) + \gamma^{-r}\, n^{1-r/2}\, \overline{\mu}_r(\gamma\sqrt{n})\right) \quad (\gamma = 1/K), \end{aligned}$$

в котором $\overline{\mu}_r(\gamma\sqrt{n}) \leqslant \overline{\mu}_r(\sqrt{n}) + \gamma^{-(3-r)^+}\, n^{-1+r/2}\, \lambda(\sqrt{n})$.

Заметим, что если условие (1.2) выполнено и $\widetilde{\lambda}(= 2s+4-r) \leqslant 0$, то $J_5(\infty) < \infty$. Если же $\widetilde{\lambda} > 0$, то $\widetilde{\lambda}\, J_5(y) = -\overline{\mu}(1) + \int_1^\infty (y \wedge u)^{\widetilde{\lambda}}\, u^r\, dV(u)$.

Таким образом, если $0 \leqslant r < 2s+4$, то $J_5(\infty) < \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\,(X^+)^{2s+4} < \infty$.

Отсюда и из замечания 1.2 (см. также оценку после (1.16)) следует, что если условия $-1 \leqslant s < -1/2$ и (1.3) выполнены, то (1.11) вытекает из (1.15).

Отметим также, что при $y > 1$

$$J_2(y) \leqslant J_4(y),\ J_6(y) \leqslant y^{2\,\delta\,\lambda}\, L_r(\lambda) \quad (\lambda \geqslant 0), \tag{2.21}$$

и если $\lambda > 0$, то (см. (1.16)) $J_6(y) = o\,(y^{2\,\delta\,\lambda})$, $y \to \infty$.

Для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что

$$\lim_{y\to\infty} \left(J_4(y) + I[r < 2s+4]\, J_6(y)\right)/(\log y + y^{2s+2}) = 0.$$

При $\lambda \geqslant 0$ и $r > 2$ это следует из (1.16) и условия (1.2). Если же $r \leqslant 2$, надо воспользоваться (2.21), замечанием 2.1 и правилом Лопиталя.

Список литературы

1. C. C. Heyde, *A supplement to the strong law of large numbers.* — J. Appl. Probab. **12** (1975), 173-–175.
2. R. Chen, *A remark on the tail probability of a distribution.* — J. Multivariate Anal. **8** (1978), 328-–333.
3. V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach, *Precise asymptotics over a small parameter for a series of large deviation probabilities.* — Theory Stoch. Process. **13**, No. 1 (2007), 44-–56.
4. A. Gut, J. Steinebach, *Precise asymptotics a general approach.* — Acta. Math. Hungar. **138** (2013) 365-–385.
5. J. He, T. Xie, *Asymptotic property for some series of probability.* — Acta Math. Appl. Sin. **29** (2013) 179-–186.
6. L. T. Kong, H. S. Dai, *Convergence rates in precise asymptotics for a kind of complete moment convergence.* — Stoch, Dynam. **17**, No. 2 (2017) 1750015 (18 pages).
7. Л. В. Розовский, *О точной асимптотике в слабом законе больших чисел для сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения устойчивого закона. II.* — Теория вероятн. и ее примен. **49**, No. 4 (2004), 803–813.
8. Y. Zhang, *A note on the convergence rates in precise asymptotics.* — J. Ineq. Appl. (2019) 2019:15.
9. Л. В. Розовский, *Некоторые предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения устойчивого закона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **495** (2020), 250-–266.
10. L. V. Rozovsky, *One more on the convergence rates in precise asymptotics.* — Statist. Probab. Lett. **171** (2021).
11. Л. В. Розовский, *О скорости сходимости в "точных асимптотиках" для случайных величин с устойчивым распределением.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **501** (2021), 259–275.
12. Л. В. Розовский, *О полной сходимости моментов в точных асимптотиках.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **515** (2022), 180–188.
13. Л. В. Розовский, *К вопросу о скорости сходимости в точных асимптотиках.* — Теория вероятн. и ее примен. **68**, No. 1 (2023), 57–74.
14. Л. В. Розовский, *Оценка снизу вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин с конечными дисперсиями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **260** (1999), 218–239.
15. Л. В. Розовский, *Суммы независимых случайных величин с конечными дисперсиями - умеренные уклонения и неравномерные оценки в ЦПТ.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **311** (2004), 242-259.
16. Л. В. Розовский, *Оценки скорости сходимости в "интервальной" ЦПТ для сумм независимых случайных векторов.* — Вестник СпбГУ **4(62)**, No. 3 (2017), 466–476.
17. P. Hall, *Bounds on the rate of convergence of moments in the central limit theorem.* — Ann. Probab. **10**, No. 4 (1982), 1004–1018.

Rozovsky L. V. On complete convergence of moments of i.i.d.r.v. with finite variances.

Let $\{X_n\}$, $n \geqslant 1$, be a sequence of independent random variables with common distribution functions, zero means and unit variances, $\overline{S}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/\sqrt{n}$. The main goal of this note is a study of the behavior of sums

$$\Sigma_r(\varepsilon) = \sum_{n \geqslant 1} n^s \, \mathbf{E} \, \overline{S}_n^r \, I[\overline{S}_n \geqslant \varepsilon \, n^\delta],$$

as $\varepsilon \to +0$ under optimal (that is, necessary) moment assumptions, where δ, s, r are some constants, such that $\delta > 0$ and $s+1$ and r are non-negative. In particular, it is shown that if $s > -1/2$ and $(2-r)\,\delta = s+1$, then

$$\varepsilon^{2-r} \, \Sigma_r(\varepsilon) = \frac{1}{2\delta\,(2-r)} + O\big(\lambda(\rho)\big), \ \ \rho = \varepsilon^{-1/2\delta}, \ \ \lambda(\rho) = \mathbf{E} \, X_1^2 \left(1 \wedge \frac{|X_1|}{\rho}\right).$$

A similar estimate with a more complicated formulation holds also in the case $-1 < s \leqslant -1/2$. Thus, for $\delta = 1/2$ we generalize the pioneering result of Heyde (Appl. Probab., 1975) and most its refinements (e.g. due to He and Xie (Acta Math. Appl. Sin., 2013)), as well as the corresponding statements of Liu and Lin (Statist. Probab. Lett. 2006) and Kong and Dai (Stoch. Dynamics, 2017).

Санкт-Петербургский государственный
химико-фармацевтический университет
ул. Проф. Попова 14, Санкт-Петербург, 197376, Россия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 3 июля 2023 г.