Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 525, 2023 г.

М. В. Платонова

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА–КАЦА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

§1. Введение

Уравнения математической физики не всегда могут быть решены явно. Поэтому полезными оказываются интегральные представления решений, дающие возможность получить их качественные свойства, а также оценить погрешность решений, полученных с помощью приближенных методов. В частности, в квантовой механике таким интегральным представлением является формула Фейнмана–Каца (см. [1]). Эта формула для широкого класса операторов $H = \frac{\Delta}{2} + V$ дает интегральное представление решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Hu, \quad u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$$

в виде математического ожидания некоторого функционала от траекторий винеровского процесса.

К сожалению, формула Фейнмана–Каца не может быть написана для решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\Delta u + V(\mathbf{x})u, \quad u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где Δ – оператор, действующий в пространстве $L_2(\mathbf{R}^d)$ на области определения $W_2^2(\mathbf{R}^d)$ как оператор Лапласа. Формально решение задачи Коши для уравнения (1) может быть записано с использованием интеграла по так называемой мере Фейнмана. Обычно такой интеграл называют континуальным или функциональным. Известно (см. [2]), что комплекснозначная мера Фейнмана, заданная на алгебре цилиндрических множеств, не может быть продолжена до счетно-аддитивной функции на σ-алгебре, порожденной цилиндрическими множествами.

Ключевые слова: уравнение Шрёдингера, пуассоновские случайные меры, формула Фейнмана–Каца.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 22-21-00016.

Это означает, что в данном случае функциональный интеграл не является интегралом по конечной мере в пространстве траекторий. Тем не менее, интеграл по мере Фейнмана может быть корректно определен для достаточно широкого класса функций (не только для цилиндрических, см. [10]).

Мы предложим другой подход для построения уже вероятностной аппроксимации решения задачи Коши (1), используя идеи из [4, 5, 6].

В настоящей работе мы будем предполагать, что потенциал V является вещественным и ограниченным.

Обозначим через P^t и Q^t полугруппы

$$P^t = e^{-it\frac{\Delta}{2}}, \quad Q^t = e^{-it(\frac{\Delta}{2}+V)}.$$

Полугруппа P^t переводит начальную функцию φ в решение $u(t,\,\cdot\,)$ уравнения Шрёдингера (1) с $V=0$, а полугруппа Q^t переводит начальную функцию φ в решение $u(t,\,\cdot\,)$ уравнения Шрёдингера (1).

В работах [5, 6] был рассмотрен случай $d=1$. Была построена вероятностная аппроксимация операторов P^t, Q^t в смысле сильной операторной сходимости математическими ожиданиями функционалов от некоторого точечного случайного поля. Именно, было показано, что полугруппа $P^t_\varepsilon = e^{tA_\varepsilon}$, где оператор A_ε – некоторый псевдодифференциальный оператор, приближает полугруппу P^t. Далее был построен аналог формулы Фейнмана–Каца для оператора $A_\varepsilon - iV$. Так как данная формула не может быть записана в терминах элементарных функций, авторы определяли ее через интегральное представление.

Позже в работе [4] данный подход был обобщен на многомерный случай для полугруппы P^t.

В параграфе 2 мы подробно напомним результаты работ [4, 5]. В параграфе 3, опираясь на результаты параграфа 2, мы построим вероятностную аппроксимацию для полугруппы Q^t.

§2. Случай отсутствия потенциала

Начнем со случая $d=1$. Пусть ν – пуассоновская случайная мера на $[0,\infty)^2$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt,dx) = \frac{dt\,dx}{x^3}.$$

Для $\varepsilon > 0$ определим сложный пуассоновский процесс $\xi_\varepsilon^1(t)$, полагая

$$\xi_\varepsilon^1(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,e\varepsilon]} x\nu(ds,dx),$$

где e – основание натурального логарифма.

Можно показать (см. [8]), что характеристическая функция случайной величины $\xi_\varepsilon^1(t)$ равна

$$f_{\xi_\varepsilon^1(t)}(p) = \exp\Big(t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}(e^{ipx}-1)\frac{dx}{x^3}\Big).$$

Положим

$$\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Представим начальную функцию φ в виде

$$\varphi(x) = P_+\varphi(x) + P_-\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x),$$

где P_+, P_- – проекторы Рисса, определяемые на $L_2(\mathbf{R})\cap L_1(\mathbf{R})$ как

$$P_+\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp, \quad P_-\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp.$$

Отметим, что функция φ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а функция φ_- аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость.

При фиксированном $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P_ε^t, которая действует на $\varphi\in L_2(\mathbf{R})$ как

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \mathbf{E}\left[(\varphi_- * h_\varepsilon)\big(x-\sigma\xi_\varepsilon^1(t)\big) + (\varphi_+ * h_\varepsilon)\big(x+\sigma\xi_\varepsilon^1(t)\big)\right], \tag{2}$$

где функция $h_\varepsilon(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{h}_\varepsilon(p) = \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(i|p|\sigma x + \frac{(i|p|\sigma x)^3}{6}\Big)\frac{dx}{x^3}\Big). \tag{3}$$

В работе [5] было показано, что оператор P_ε^t является псевдодифференциальным оператором с символом

$$\exp\Big(-\frac{itp^2}{2}\Big)\,H(t,\varepsilon,p),$$

где

$$H(t,\varepsilon,p)=\exp\Big(t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(e^{i|p|\sigma x}-1-i|p|\sigma x-\frac{(i|p|\sigma x)^2}{2}-\frac{(i|p|\sigma x)^3}{6}\Big)\frac{dx}{x^3}\Big). \quad (4)$$

Также было показано, что для любых t, ε, p справедливо неравенство

$$\big|H(t,\varepsilon,p)\big|\leqslant 1.$$

Заметим, что в силу (4) генератор A_ε полугруппы P^t_ε есть псевдодифференциальный оператор с символом $\widehat{g}_\varepsilon(p)$, где

$$\widehat{g}_\varepsilon(p)=-\frac{ip^2}{2}+\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(e^{i|p|\sigma x}-1-i|p|\sigma x-\frac{(i|p|\sigma x)^2}{2}-\frac{(i|p|\sigma x)^3}{6}\Big)\,\frac{dx}{x^3}.$$

Основной целью работы [5] было показать, что построенная полугруппа операторов P^t_ε аппроксимирует полугруппу P^t в смысле сильной операторной сходимости. Именно, была доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Существует постоянная $C>0$, такая что для любой функции $\varphi\in W^4_2(\mathbf{R})$ и всех $t\geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\|P^t\varphi-P^t_\varepsilon\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})}\leqslant Ct\varepsilon^2\|\varphi\|_{W^4_2(\mathbf{R})}.$$

Из последней теоремы и теоремы Банаха–Штейнгауза (см. [3]) вытекает, что для любого $t\geqslant 0$ и $\varphi\in L_2(\mathbf{R})$ справедливо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|P^t\varphi-P^t_\varepsilon\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})}=0.$$

Теперь мы обобщим утверждение теоремы 2.1 (и следствия из нее) на $d>1$ (подробнее см. [4]). Для этого нам понадобится ввести ряд новых обозначений.

Для каждых $\varepsilon>0$, $t>0$ определим оператор $R^t_\varepsilon : L_2(\mathbf{R})\to L_2(\mathbf{R})$, полагая для $\varphi\in L_2(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned}R^t_\varepsilon\varphi(y)&=\varphi_+ * h^t_\varepsilon(y)+\varphi_- * h^t_\varepsilon(-y)\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-ipy}\,\widehat{\varphi}(p)\,\widehat{h}^t_\varepsilon(|p|)\,dp+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}e^{ipy}\,\widehat{\varphi}(p)\,\widehat{h}^t_\varepsilon(|p|)\,dp,\end{aligned}$$

где функция h^t_ε определяется в (3).

Через T_a обозначим оператор сдвига на a, действующий как

$$T_a\varphi(x) = \varphi(x+a).$$

В этих обозначениях формула (2) переписывается в виде

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \mathbf{E}\, F_\varepsilon^t(x, \sigma\xi_\varepsilon^1(t)),$$

где функция

$$F_\varepsilon^t(x,y) = R_{\varepsilon,y}^t T_x\varphi(y) = \varphi_+ * h_\varepsilon^t(x+y) + \varphi_- * h_\varepsilon^t(x-y),$$

а нижний индекс y у оператора $R_{\varepsilon,y}^t$ обозначает действие этого оператора по переменной y.

Далее, мы будем использовать те же идеи, но будем применять их "покоординатно". Пусть $\xi_\varepsilon^k(t)$, $k = 2,\ldots,d$, – независимые копии $\xi_\varepsilon^1(t)$. Через $\mathcal{U}$ обозначим набор всех возможных векторов из $\mathbf{R}^d$, координаты которых принимают значения ±1.

Для каждого $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^d) \in \mathcal{U}$ определим оператор $S_\mathbf{u} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ следующим образом: для любого $\mathbf{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^d)$

$$S_\mathbf{u}\mathbf{y} = (u^1y^1, u^2y^2, \ldots, u^dy^d).$$

Для любых $\varepsilon > 0$, $t > 0$ определим функцию $G_\varepsilon^t(\mathbf{y})$, которая определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{G}_\varepsilon^t(\mathbf{p}) = \widehat{h}_\varepsilon^t(p_1)\widehat{h}_\varepsilon^t(p_2)\ldots\widehat{h}_\varepsilon^t(p_d).$$

Для любого $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ введем естественный аналог проектора Рисса $\varphi \mapsto \varphi_\mathbf{u}$ как оператор, переводящий функцию φ в функцию $\varphi_\mathbf{u}$, преобразование Фурье которой совпадает с преобразованием Фурье функции φ на следующем множестве: для любых $j = 1,\ldots,d$

$$\text{если } u^j = 1, \text{то } p^j < 0,$$
$$\text{если } u^j = -1, \text{то } p^j > 0,$$

и равно 0 во всем остальном $\mathbf{R}^d$.

Для каждых $\varepsilon > 0, t > 0$ определим оператор $R_\varepsilon^t : L_2(\mathbf{R}^d) \to L_2(\mathbf{R}^d)$, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^d)$

$$R_\varepsilon^t\varphi(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \varphi_\mathbf{u} * G_\varepsilon^t(S_\mathbf{u}\mathbf{y}). \tag{5}$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P_ε^t, которая действует на $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^d)$ как

$$P_\varepsilon^t\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\, F_\varepsilon^t(x^1,\ldots,x^d, \sigma\xi_\varepsilon^1(t),\ldots,\sigma\xi_\varepsilon^d(t)), \tag{6}$$

где функция
$$F^t_\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y}) = R^t_{\varepsilon,\mathbf{y}} T_\mathbf{x}\varphi(\mathbf{y}),$$
а нижний индекс $\mathbf{y}$ у оператора $R_{\varepsilon,\mathbf{y}}$ обозначает действие этого оператора по переменным $\mathbf{y}$.

В работе [4] было показано, что оператор P^t_ε является псевдодифференциальным оператором с символом
$$\prod_{k=1}^d \exp\Big(-\frac{it(p^k)^2}{2}\Big)\, H(t,\varepsilon,p^k),$$
где функция $H(t,\varepsilon,p)$ определена в (4).

Заметим, что генератор A_ε полугруппы P^t_ε есть псевдодифференциальный оператор с символом $\widehat{g}_\varepsilon(\mathbf{p})$, где
$$\widehat{g}_\varepsilon(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^d \Bigg(-\frac{i(p^k)^2}{2} + \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} \Big(e^{i|p^k|\sigma x} - 1 - i|p^k|\sigma x - \frac{(i|p^k|\sigma x)^2}{2} - \frac{(i|p^k|\sigma x)^3}{6}\Big)\,\frac{dx}{x^3}\Bigg). \quad (7)$$

В работе [4] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Существует постоянная $C>0$, такая что для любой функции $\varphi\in W^4_2(\mathbf{R}^d)$ и всех $t\geqslant 0$ справедливо неравенство*
$$\|P^t\varphi - P^t_\varepsilon\varphi\|_{L_2(\mathbf{R}^d)} \leqslant Ct\varepsilon^2\|\varphi\|_{W^4_2(\mathbf{R}^d)}.$$

§3. Построение эволюционного семейства операторных функционалов

Итак, мы показали, как строится вероятностная аппроксимация оператора эволюции в случае отсутствия потенциала. При этом в качестве аппроксимации оператора P^t использовался оператор $P^t_\varepsilon = e^{tA_\varepsilon}$, где A_ε – псевдодифференциальный оператор с символом (7). Оператор P^t_ε допускает вероятностное представление (6) в виде математического ожидания функционала от стохастического процесса. Далее мы построим аналог формулы Фейнмана–Каца для оператора $A_\varepsilon - iV$. Данная формула не может быть записана в терминах элементарных функций, поэтому мы определим ее через интегральное представление, как это было сделано в работах [6, 9] для построения вероятностной аппроксимации решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера и для уравнения Шрёдингера высокого порядка. Для этого мы прежде всего должны построить функционал от траектории процесса, стоящий под знаком математического ожидания. Этот функционал будет построен в виде интеграла по пуассоновской случайной мере на положительной полуоси с лебеговой интенсивностью.

Перейдем непосредственно к построению требуемого функционала от траектории процесса. Обозначим $U(\mathbf{x}) = -iV(\mathbf{x}) + 1$. Определим семейство операторов $N_k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k+1}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots$, зависящее от неотрицательных параметров $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k+1}$ и параметров $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{k+1} \in \mathbf{R}^d$, действующих на функцию $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^d)$ как

$$\Big[N_k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k+1}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k+1})\varphi\Big](\mathbf{x})$$
$$= R^{\tau_1}_{\varepsilon,\mathbf{y}_1} T^{\mathbf{y}_1}_{\mathbf{x}} U(\mathbf{y}_1) R^{\tau_2}_{\varepsilon,\mathbf{y}_2} T^{\mathbf{y}_2}_{\mathbf{y}_1} U(\mathbf{y}_2) \ldots T^{\mathbf{y}_k}_{\mathbf{y}_{k-1}} U(\mathbf{y}_k) R^{\tau_{k+1}}_{\varepsilon,\mathbf{y}_{k+1}} T^{\mathbf{y}_{k+1}}_{\mathbf{y}_k} \varphi(\mathbf{y}_{k+1}).$$

Здесь оператор регуляризации $R^{\tau}_{\varepsilon,\mathbf{y}}$ определен в (5), нижний индекс $\mathbf{y}$ обозначает действие оператора $R^{\tau}_{\varepsilon,\mathbf{y}}$ по переменной $\mathbf{y}$. Запись $T^{\mathbf{y}_1}_{\mathbf{a}}$ означает, что оператор сдвига $T^{\mathbf{y}_1}_{\mathbf{a}}$ применяется по переменной $\mathbf{y}_1$.

Оператор N_k зависит также от переменной ε, но мы опустим этот индекс в обозначениях.

Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathbf{R}_+)$ – пространство конфигураций на $\mathbf{R}_+$. Каждая точка X пространства $\mathcal{X}$ представляет из себя некоторую строго возрастающую локально конечную последовательность положительных чисел $0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$. Далее, пусть $\mathbf{P}_0$ — пуассоновская мера на $\mathcal{X}$, мера интенсивности которой есть мера Лебега (см., напр., [8]).

Пусть $\gamma(\,\cdot\,)$ – измеримая локально ограниченная функция на $[0,\infty)$ со значениями в $\mathbf{C}^d$. Для каждой пары чисел s,t, таких что $0 \leqslant s \leqslant t$, определим оператор $H_{s,t}(\gamma, X)$, зависящий от $\gamma(\,\cdot\,)$ и конфигурации $X \in \mathcal{X}$.

Для любых t, s будем использовать обозначение

$$\mathbf{m}(t,s) = \gamma(s) - \gamma(t).$$

Предположим, что $s, t \notin X$ и

$$l = \mathrm{card}\big(X \cap (0,s)\big), \quad k = \mathrm{card}\big(X \cap (s,t)\big).$$

Теперь определим оператор $H_{s,t}(\gamma, X)$, полагая

$$\Big[H_{s,t}(\gamma,X)\varphi\Big](\mathbf{x}) = \Big[N_k\big(t_{l+1}-s, t_{l+2}-t_{l+1},\dots,t_{l+k}-t_{l+k-1}, t-t_{l+k}, \mathbf{m}(s,t_{l+1}),\mathbf{m}(t_{l+1},t_{l+2}),\dots,\mathbf{m}(t_{l+k-1},t_{l+k}),\mathbf{m}(t_{l+k},t)\big)\varphi\Big](\mathbf{x}).$$

Лемма 3.1. *При фиксированных X, γ семейство $H_{s,t}(\gamma,X)$ является эволюционным, то есть для любых $s\leqslant r\leqslant t$, таких что $s,r,t\notin X$, справедливо равенство*

$$H_{s,t}(\gamma,X)=H_{s,r}(\gamma,X)H_{r,t}(\gamma,X).$$

Доказательство. Докажем сначала вспомогательное утверждение: для любых $s_1,s_2,s_3,s_4>0$ и $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\mathbf{y}_3,\mathbf{y}_4$ выполнено

$$N_1(s_1,s_2,\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)N_1(s_3,s_4,\mathbf{y}_3,\mathbf{y}_4)=N_2(s_1,s_2+s_3,s_4,\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2+\mathbf{y}_3,\mathbf{y}_4). \tag{8}$$

Пусть $\varphi\in L_2(\mathbf{R}^d)$. Имеем

$$\Big[N_1(s_1,s_2,\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)N_1(s_3,s_4,\mathbf{y}_3,\mathbf{y}_4)\varphi\Big](\mathbf{x}) = R^{s_1}_{\varepsilon,\mathbf{y}_1}T^{\mathbf{y}_1}_{\mathbf{x}}U(\mathbf{y}_1)R^{s_2}_{\varepsilon,\mathbf{y}_2}T^{\mathbf{y}_2}_{\mathbf{y}_1}R^{s_3}_{\varepsilon,\mathbf{y}_3}T^{\mathbf{y}_3}_{\mathbf{y}_2}U(\mathbf{y}_3)R^{s_4}_{\varepsilon,\mathbf{y}_4}T^{\mathbf{y}_4}_{\mathbf{y}_3}\varphi(\mathbf{y}_4). \tag{9}$$

Заметим, что

$$R^{s_2}_{\varepsilon,\mathbf{y}_2}T^{\mathbf{y}_2}_{\mathbf{y}_1}R^{s_3}_{\varepsilon,\mathbf{y}_3}T^{\mathbf{y}_3}_{\mathbf{y}_2}f(\mathbf{y}_3)=R^{s_2}_{\varepsilon,\mathbf{y}_2}T^{\mathbf{y}_2}_{\mathbf{y}_1}\Big(\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}}f_{\mathbf{u}}*G^{s_3}_{\varepsilon}\big(\mathbf{y}_2+S_{\mathbf{u}}\mathbf{y}_3\big)\Big)$$
$$=\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}}f_{\mathbf{u}}*G^{s_2+s_3}_{\varepsilon}\big(\mathbf{y}_1+S_{\mathbf{u}}\mathbf{y}_2+S_{\mathbf{u}}\mathbf{y}_3\big)=R^{s_2+s_3}_{\varepsilon,\mathbf{z}}T^{\mathbf{z}}_{\mathbf{y}_1}f(\mathbf{z})\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{y}_2+\mathbf{y}_3}.$$

Подставляя последнее выражение в правую часть (9), получаем (8).

Теперь вернемся к доказательству леммы. Достаточно доказать наше утверждение в случае, когда $s=0$, то есть

$$H_{0,t}(\gamma,X)=H_{0,r}(\gamma,X)H_{r,t}(\gamma,X).$$

Докажем наше утверждение в случае, когда $X\cap(0,t)=\{t_1,t_2\}$, $0<t_1<r<t_2<t$, то есть

$$l=\operatorname{card}\big(X\cap(0,r)\big)=1,$$
$$k=\operatorname{card}\big(X\cap(r,t)\big)=1.$$

Общий случай рассматривается аналогично.

Имеем

$$\begin{aligned} H_{0,r}(\gamma,X)H_{r,t}(\gamma,X) &= N_1(t_1, r-t_1, \mathbf{m}(0,t_1), \mathbf{m}(t_1,r)) \\ &\qquad N_1(t_2-r, t-t_2, \mathbf{m}(r,t_2), \mathbf{m}(t_2,t)) \\ &= N_2(t_1, t_2-t_1, t-t_2, \mathbf{m}(0,t_1), \mathbf{m}(t_1,t_2), \mathbf{m}(t_2,t)) = H_{0,t}(\gamma,X). \end{aligned}$$

□

Определим теперь новое семейство операторов $\Phi_{s,t}(\gamma)$, зависящее от γ и ε, полагая

$$\Phi_{s,t}(\gamma) = \int\limits_{\mathcal{X}} \mathbf{P}_0(dX) H_{s,t}(\gamma,X) = \int\limits_{\mathcal{X}\cap[s,t]} \mathbf{P}_0(dX) H_{s,t}(\gamma,X).$$

Из независимости значений пуассоновской меры на непересекающихся интервалах и леммы 3.1 вытекает эволюционное свойство: для любых $s \leqslant r \leqslant t$

$$\Phi_{s,t}(\gamma) = \Phi_{s,r}(\gamma)\Phi_{r,t}(\gamma). \tag{10}$$

3.1. Построение вероятностной аппроксимации решения. Для каждого $t \geqslant 0$ определим оператор Q_ε^t, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^d)$

$$\Big[Q_\varepsilon^t \varphi\Big](\mathbf{x}) = \mathbf{E}\Big[\Phi_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon^1(t), \dots, \sigma\xi_\varepsilon^d(t)\big)\varphi\Big](\mathbf{x}).$$

Теорема 3.2. 1. *Существует константа $C = C(V)$, такая что с вероятностью единица выполняется неравенство*

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d} \Big|\Big[\Phi_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon^1(\,\cdot\,), \dots, \sigma\xi_\varepsilon^d(\,\cdot\,)\big)\varphi\Big](\mathbf{x})\Big| \leqslant C\|\varphi\|_{L_2(\mathbf{R}^d)}.$$

2. *Для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ функция $\big[H_{0,t}(\sigma\xi_\varepsilon^1(\,\cdot\,), \dots, \sigma\xi_\varepsilon^d(\,\cdot\,), X)\varphi\big](\mathbf{x})$ как функция на $\Omega \times \mathcal{X}$ интегрируема по мере $\mathbf{P} \times \mathbf{P}_0$ и*

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\Big[\Phi_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon^1(\,\cdot\,), \dots, \sigma\xi_\varepsilon^d(\,\cdot\,)\big)\varphi\Big](\mathbf{x}) \\ &\qquad = \int\limits_{\mathcal{X}} \mathbf{P}_0(dX)\mathbf{E}\Big[H_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon^1(\,\cdot\,), \dots, \sigma\xi_\varepsilon^d(\,\cdot\,), X\big)\varphi\Big](\mathbf{x}) \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{X}_k} \mathbf{P}_0(dX)\mathbf{E}\Big[H_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon^1(\,\cdot\,), \dots, \sigma\xi_\varepsilon^d(\,\cdot\,), X\big)\varphi\Big](\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\mathcal{X}_k = \{X \in \mathcal{X} : \mathrm{card}\ (X \cap (0,t)) = k\}$.

3. *Для любого* $k = 0, 1, \ldots$ *выполнено*

$$\int\limits_{\mathcal{X}_k} \mathbf{P}_0(dX)\mathbf{E}\Big[H_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon^1(\,\cdot\,), \ldots, \sigma\xi_\varepsilon^d(\,\cdot\,), X\big)\varphi\Big](\mathbf{x})$$
$$= e^{-t} \int\limits_{0<t_1<\cdots<t_k<t} dt_1 \cdots dt_k\, P_\varepsilon^{t_1} U P_\varepsilon^{t_2-t_1} U \cdots P_\varepsilon^{t_k-t_{k-1}} U P_\varepsilon^{t-t_k} \varphi(\mathbf{x}). \tag{12}$$

Доказательство. Для всех $k \geqslant 1$ и $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t$ справедливо неравенство

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d} \sup_{\mathbf{y}_j\in\mathbf{R}^d} \Big|\Big[N_k(t_1, t_2 - t_1, \ldots, t - t_k, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{k+1})\varphi\Big](\mathbf{x})\Big|$$
$$\leqslant \|V\|_\infty^k \|\varphi\|_{L_2(\mathbf{R}^d)}.$$

Таким образом, для $X \in \mathcal{X}_k$ мы получаем

$$\Big|\Big[H_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon^1(\,\cdot\,), \ldots, \sigma\xi_\varepsilon^d(\,\cdot\,), X\big)\varphi\Big](\mathbf{x})\Big| \leqslant \|V\|_\infty^k \|\varphi\|_{L_2(\mathbf{R}^d)}.$$

Интегрируя последнее неравенство по мере $\mathbf{P}_0$, получаем утверждение 1 теоремы. Утверждение пункта 2 очевидно. Утверждение пункта 3 следует из независимости приращений процессов $\xi_\varepsilon^1(t), \ldots, \xi_\varepsilon^d(t)$. $\square$

Теорема 3.3. *Операторы* Q_ε^t *образуют однопараметрическую полугруппу*

$$Q_\varepsilon^{t+s} = Q_\varepsilon^t Q_\varepsilon^s$$

с генератором $A_\varepsilon - iV(x)$.

Доказательство. Полугрупповое свойство операторов Q_ε^t следует из независимости и однородности приращений процессов $\xi_\varepsilon^1(t), \ldots, \xi_\varepsilon^d(t)$, а также из (10).

Для вычисления генератора полугруппы воспользуемся (11) и (12). Отметим, что в (11) достаточно оставить только слагаемые при $k = 0$ и $k = 1$. При $k = 0$ имеем

$$e^{-t} P_\varepsilon^t \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})(1 - t) + tA_\varepsilon\varphi(\mathbf{x}) + o(t), \quad t \to 0.$$

При $k = 1$ имеем

$$e^{-t} \int\limits_0^t dt_1\, P_\varepsilon^{t_1}\, U\, P_\varepsilon^{t-t_1}\, \varphi(\mathbf{x}) = t\, U(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) + o(t), \quad t \to 0.$$

Из последних соотношений вытекает, что генератор полугруппы Q_ε^t есть $A_\varepsilon - iV(\mathbf{x})$. □

Предположим, что потенциал V имеет ограниченные производные до четвертого порядка. Обозначим

$$L = \max(\|V\|_\infty, \|V^{(1)}\|_\infty, \dots, \|V^{(4)}\|_\infty).$$

Несложно показать, что для любого $t \geqslant 0$ и $l = 0, 1, \dots, 4$ существует положительная константа $C = C(l)$, такая что выполнено неравенство

$$\|Q^t\|_{W_2^l(\mathbf{R}^d)\to W_2^l(\mathbf{R}^d)} \leqslant C(1 + t^l L^l). \tag{13}$$

Лемма 3.4. *Для любого* $t \geqslant 0$ *выполнено неравенство*

$$\|Q_\varepsilon^t\|_{L_2(\mathbf{R}^d)\to L_2(\mathbf{R}^d)} \leqslant 1.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что генератор полугруппы Q_ε^t имеет вид $A_\varepsilon - iV(\mathbf{x})$.

□

Теорема 3.5. *Пусть* $V \in \mathbf{C}^{(4)}(\mathbf{R}^d)$. *Тогда существует положительная константа* C, *такая что для любой функции* $\varphi \in W_2^4(\mathbf{R}^d)$ *и любого* $t \geqslant 0$ *выполнено неравенство*

$$\|Q_\varepsilon^t\varphi - Q^t\varphi\|_{L_2(\mathbf{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2 t\bigl(1 + t^4\bigr)\|\varphi\|_{W_2^4(\mathbf{R}^d)}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа e^{tA}. Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа $e^{t(A+B)}$ также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [7, гл. IX, §2, п. 1, с. 614])

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A} d\tau. \tag{14}$$

Положим

$$A = -i\frac{\Delta}{2} - iV, \quad A + B = A_\varepsilon - iV,$$

где оператор A_ε – оператор с символом $\widehat{g}_\varepsilon(\mathbf{p})$, определенным в (7). Отсюда следует, что в данном случае

$$B = A_\varepsilon + i\frac{\Delta}{2}.$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi(\mathbf{x})$. Получим

$$\widehat{B\varphi}(\mathbf{p})=\widehat{\varphi}(\mathbf{p})\sum_{k=1}^{d}\Big(\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(e^{i|p^k|\sigma x}-1-i|p^k|\sigma x-\frac{(i|p^k|\sigma x)^2}{2}-\frac{(i|p^k|\sigma x)^3}{6}\Big)\frac{dx}{x^3}\Big).$$

Заметим, что для некоторой константы $C > 0$ справедливо неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(\mathbf{p})| \leqslant C\varepsilon^2|\mathbf{p}|^4|\widehat{\varphi}(\mathbf{p})|,$$

откуда следует, что

$$\|B\varphi\|^2_{L_2(\mathbf{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big|\widehat{B\varphi}(\mathbf{p})\big|^2 d\mathbf{p} \leqslant C\varepsilon^4\|\varphi\|^2_{W_2^4(\mathbf{R}^d)}. \tag{15}$$

Утверждение теоремы следует из (13), леммы 3.4 и (15):

$$\begin{aligned}\Big\|\int\limits_0^t Q_\varepsilon^\tau B Q^{t-\tau}\varphi\,d\tau\Big\|_{L_2(\mathbf{R}^d)} &\leqslant \int\limits_0^t \|BQ^{t-\tau}\varphi\|_{L_2(\mathbf{R}^d)}\,d\tau\\ &\leqslant \int\limits_0^t C\,\varepsilon^2\,\|Q^{t-\tau}\varphi\|_{W_2^4(\mathbf{R}^d)}\,d\tau\\ &\leqslant \int\limits_0^t C\,\varepsilon^2\,(1+(t-\tau)^4L^4)\|\varphi\|_{W_2^4(\mathbf{R}^d)}\,d\tau\\ &\leqslant C\varepsilon^2\,t\,\big(1+t^4\big)\|\varphi\|_{W_2^4(\mathbf{R}^d)}.\end{aligned}$$

□

Теорема 3.6. *Пусть V – произвольный ограниченный вещественный потенциал. Тогда для любой функции $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^d)$ выполнено*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|Q_\varepsilon^t\varphi - Q^t\varphi\|_{L_2(\mathbf{R}^d)} = 0.$$

Доказательство. Если $V \in \mathbf{C}^{(4)}(\mathbf{R}^d)$, то утверждение теоремы следует из теоремы 3.5 и теоремы Банаха–Штейнгауза (см. [3, II.1.18]). В общем случае зафиксируем последовательность $\{V_n\}$ из $\mathbf{C}^{(4)}(\mathbf{R}^d)$, сходящуюся к V почти всюду по мере Лебега и равномерно ограниченную. Тогда, применяя снова формулу (14) с операторами

$$A = -i\frac{\Delta}{2} - iV, \quad A + B = -i\frac{\Delta}{2} - iV_n,$$

получаем утверждение теоремы. □

Список литературы

1. Дж. Глимм, А. Джаффе, *Математические методы в квантовой физике*, М., Мир, 1984.
2. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах*, М., Наука, 1983.
3. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, М., Издательство иностранной литературы, 1962.
4. П. Н. Иевлев, *Вероятностное представление решения задачи Коши для многомерного уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 145–158.
5. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши с оператором Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–175.
6. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностная аппроксимация оператора эволюции.* — Функц. анализ и его прил. **52**, No. 2 (2018), 25–39.
7. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М., Мир, 1972.
8. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* М., МЦНМО, 2007.
9. М. В. Платонова, *О вероятностной аппроксимации одной группы унитарных операторов* — Зап. научн. семин. ПОМИ **510** (2022), 211–224.
10. О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Континуальные интегралы*, М., ЛЕНАНД, 2015.

Platonova M. V. An analogue of the Feynman–Kac formula for the multidimensional Shrödinger equation.

A probabilistic approximation of the solution of the Cauchy problem for the multidimensional Schrödinger equation with limited potential is constructed. The approximation has the form of expectations of functionals of a random point field.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова;
С.-Петербургский
государственный университет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербург, Россия
E-mail: mariyaplat@gmail.com

Поступило 4 октября 2023 г.