Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 525, 2023 г.

А. Ю. Зайцев

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО КОЛИЧЕСТВУ СЛАГАЕМЫХ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЕКТОРОВ

§1. Близость распределений последовательных сумм на выпуклых множествах

Пусть X, X_1, X_2, $\ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы в пространстве $\mathbf{R}^d$ с распределением F. Произведения и степени мер будут пониматься в смысле свертки: $GH = G * H$, $H^m = H^{m*}$, $H^0 = E = E_0$, где E_x – распределение, сосредоточенное в точке $x \in \mathbf{R}^d$. Тогда $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ имеет распределение F^n. Рассмотрим последовательность распределений $F, F^2, F^3, \ldots, F^n, F^{n+1}, \ldots$. Мы будем изучать, насколько отличается распределение F^{n+1} от распределения F^n, т. е. насколько может измениться распределение суммы S_n после добавления к ней очередного независимого слагаемого.

Определим расстояния между распределениями

$$\rho_{\mathcal{C}_d}(F,G) = \sup_{A \in \mathcal{C}_d} |F\{A\} - G\{A\}|,$$
$$\rho_{\mathrm{TV}}(F,G) = \sup_{A \in \mathcal{B}_d} |F\{A\} - G\{A\}|,$$

где $\mathcal{C}_d$ – совокупность выпуклых, а $\mathcal{B}_d$ – борелевских подмножеств $\mathbf{R}^d$. В одномерном случае мы обозначаем $\rho(F,G) = \sup_{x \in \mathbf{R}} |F(x) - G(x)|$ расстояние Колмогорова (равномерное расстояние между функциями распределения $F(\,\cdot\,)$ и $G(\,\cdot\,)$). Ясно, что

$$\rho(F,G) \leqslant \rho_{\mathcal{C}_1}(F,G), \quad \rho_{\mathcal{C}_1}(F,G) \leqslant 2\,\rho(F,G).$$

Символами c и $c(\,\cdot\,)$ мы обозначаем вообще говоря различные положительные абсолютные постоянные и величины, зависящие только от

Ключевые слова: суммы независимых случайных векторов, близость последовательных сверток, выпуклые множества, расстояние Прохорова, неравенства.

Данная работа была поддержана Санкт-Петербургским международным математическим институтом имени Леонарда Эйлера, грантовое соглашение No. 075-15-2022-289 от 06.04.2022.

аргумента в скобках. Распределение случайного вектора ξ будет обозначаться $\mathcal{L}(\xi)$.

Следующая теорема является основным результатом настоящей статьи.

Теорема 1. *Для любого нетривиального распределения F найдется величина $c(F)$, зависящая только от F и такая что*

$$\rho_{\mathcal{C}_d}(F^n, F^{n+1}) \leqslant \frac{c(F)}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

при всех натуральных n.

Распределение F считается *тривиальным*, если оно сосредоточено на аффинной гиперплоскости, не содержащей начало координат (нулевой вектор). Ясно, что для таких F

$$\rho_{\mathcal{C}_d}(F^n, F^{n+1}) = 1. \tag{2}$$

В одномерном случае тривиальны распределения E_a, сосредоточенные в точках $a \neq 0$.

Теорема 1 является очень общим результатом. Неравенства (1) и (2) дают полное описание близости распределений F^n и F^{n+1} на произвольных выпуклых множествах для произвольных d-мерных распределений F. Константа $c(F)$ в неравенстве (1) может быть неограниченно большой, если распределение F близко к некоторому тривиальному распределению.

В одномерном случае утверждение теоремы 1 содержится в [1, теорема 4.2 главы V]. Оно хорошо известно для невырожденных гауссовских распределений F, причем оценка справедлива даже для расстояния по вариации:

$$\rho_{\mathrm{TV}}(F^n, F^{n+1}) \leqslant \frac{c(F)}{\sqrt{n}}. \tag{3}$$

Это неравенство можно вывести из следующей леммы 1 (см. [8, лемма 8], а также [4, неравенства (1.3), (1.7)]).

Лемма 1. *Пусть Φ_k, $k = 1, 2$, – гауссовские распределения с невырожденными ковариационными матрицами Σ_k и средними значениями b_k. Тогда*

$$\rho_{\mathrm{TV}}(\Phi_1, \Phi_2) \leqslant \frac{1}{2}\Big(\big\|\Sigma_1^{-1/2}\Sigma_2\Sigma_1^{-1/2} - I_d\big\|_F + \big\|\Sigma_2^{-1/2}(b_1 - b_2)\big\|\Big),$$

где $\|\cdot\|_F$ – норма Фробениуса, а I_d – d-мерная единичная матрица.

В монографии [1] содержатся и другие оценки близости n и $(n+1)$-кратных сверток одномерных распределений, в том числе с константами, не зависящими от распределения F. В конце параграфа мы сформулируем некоторые из этих результатов. В недавних совместных работах [5, 6] большинство из упомянутых результатов было перенесено на значения распределений в гильбертовом пространстве на выпуклых многогранниках, см. также [16]. Константы при этом зависят только от числа полупространств, участвующих в определении многогранника.

Теорема 1 сравнительно элементарно выводится из следующей леммы 2, принадлежащей В. В. Сазонову [9], см. также [2, 10].

Лемма 2. *Пусть F – d-мерное вероятностное распределение с*

$$\int_{\mathbf{R}^d} \|x\|^3 \, F\{dx\} < \infty,$$

а Φ – гауссовское распределение с той же ковариационной матрицей и тем же средним значением как у распределения F. Тогда найдется величина $c(F)$, зависящая только от F и такая что

$$\rho_{\mathcal{C}_d}(F^n, \Phi^n) \leqslant \frac{c(F)}{\sqrt{n}}$$

при всех натуральных n.

Биномиальное распределение с параметрами n, p имеет вид

$$B_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} b_k(n,p) \, E_k,$$

где

$$b_k(n,p) = C_n^k (1-p)^{n-k} p^k, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пусть $\eta_{n,p}$ – случайная величина с распределением $B_{n,p}$. Хорошо известно, что $\mathbf{E}\,\eta_{n,p} = np$, $\mathbf{D}\,\eta_{n,p} = np(1-p)$.

Нам потребуется следующая лемма о близости биномиальных распределений.

Лемма 3. *При $0 < p < 1$ для любого натурального n справедливо неравенство*

$$\rho_{\mathrm{TV}}(B_{n,p}, B_{n+1,p}) \leqslant \frac{c(p)}{\sqrt{n}}. \tag{4}$$

Доказательство. Отношение
$$\frac{b_k(n+1,p)}{b_k(n,p)} = \frac{n+1}{n+1-k} \cdot (1-p) \tag{5}$$
монотонно растет при росте k. При некотором k происходит переход от значений отношения, не превосходящих единицы, к значениям отношения, которые больше единицы. Поэтому разность между функциями распределения $B_{n,p}(x) - B_{n+1,p}(x)$ с ростом $x > 0$ сначала растет от нуля до максимального значения, а затем убывает до нуля. Из сказанного следует, что
$$\rho_{\mathrm{TV}}(B_{n,p}, B_{n+1,p}) = \rho(B_{n,p}, B_{n+1,p}). \tag{6}$$
Ясно, что
$$B_{n+1,p} = B_{n,p}B_{1,p} = B_{n,p}((1-p)E_0 + pE_1) = (1-p)B_{n,p} + pE_1B_{n,p}.$$
Поэтому
$$\rho(B_{n,p}, B_{n+1,p}) = p\,\rho(B_{n,p}, E_1B_{n,p}) = p\,\max_k \mathbf{P}\{\eta_{n,p} = k\} \leqslant \frac{c(p)}{\sqrt{n}}. \tag{7}$$
Последнее неравенство в формуле (7) несложно выводится с помощью формулы Стирлинга. Из (6) и (7) вытекает неравенство (4). □

Нам понадобится следующее свойство расстояния $\rho_{\mathcal{C}_d}$.

Лемма 4 (см. [17]). *Пусть $F, G, H \in \mathfrak{F}_d$ – произвольные распределения. Тогда $\rho_{\mathcal{C}_d}(FH, GH) \leqslant \rho_{\mathcal{C}_d}(F, G)$.*

Доказательство теоремы 1. Не нарушая общности, мы можем считать, что распределение F не сосредоточено на некотором собственном подпространстве $\mathbf{R}^d$. При доказательстве фактически используется индукция по размерности d, с учетом того, что если распределение F сосредоточено на некотором собственном подпространстве и тривиально на нем, то оно тривиально и на самом пространстве $\mathbf{R}^d$. Несложно понять, что существует p, такое что $0 < p < 1$ и
$$F = (1-p)U + pV, \tag{8}$$
где U – вероятностное распределение с ограниченным носителем и невырожденной ковариационной матрицей, а V – некоторое вероятностное распределение. Ясно, что распределения U и V можно выбрать таким образом, чтобы $(1-p)U$ было сужением меры F на центрированный шар достаточно большого радиуса, а pV – на дополнение к этому шару. Величина $c(F)$ из формулировки теоремы 1 будет

зависеть от p и от моментов распределения U до третьего порядка включительно. Имеют место представления

$$F^n = \sum_{k=0}^{n} b_k(n,p)\, V^k U^{n-k}, \quad F^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} b_k(n+1,p)\, V^k U^{n+1-k}.$$

Введем распределения

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} b_k(n,p)\, V^k U^{n+1-k}.$$

Пусть Φ – гауссовское распределение с тем же средним и той же ковариационной матрицей как у распределения U.

Применяя леммы 2 и 4 и неравенство (3), получаем, что для $k \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant k < n$,

$$\begin{aligned} &\rho_{\mathcal{C}_d}(V^k U^{n-k}, V^k U^{n+1-k}) \leqslant \rho_{\mathcal{C}_d}(U^{n-k}, U^{n+1-k}) \\ &\quad \leqslant \rho_{\mathcal{C}_d}(U^{n-k}, \Phi^{n-k}) + \rho_{\mathcal{C}_d}(\Phi^{n-k}, \Phi^{n+1-k}) + \rho_{\mathcal{C}_d}(\Phi^{n+1-k}, U^{n+1-k}) \\ &\qquad \leqslant \frac{c(F)}{\sqrt{n-k}} + \frac{c(\Phi)}{\sqrt{n-k}} + \frac{c(F)}{\sqrt{n+1-k}} \leqslant \frac{c(F)}{\sqrt{n-k}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{C}_d}(F^n, G_n) &\leqslant \sum_{k=0}^{n} b_k(n,p)\, \rho_{\mathcal{C}_d}(V^k U^{n-k}, V^k U^{n+1-k}) \\ &\leqslant b_n(n,p) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k(n,p)\, \frac{c(F)}{\sqrt{n-k}} \\ &\leqslant b_n(n,p) + c(F)\, \mathbf{E}\, \frac{\mathbf{1}\{\eta_{n,p} < n\}}{\sqrt{n-\eta_{n,p}}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\mathbf{1}\{A\}$ – индикатор события A.

Согласно неравенству Бернштейна (см. [1, теорема 4.1 главы I])

$$\mathbf{P}\{\eta_{n,p} - np \geqslant np(1-p)\} \leqslant \exp(-np(1-p)/4). \tag{11}$$

Легко видеть, что $0 < p(2-p) < 1$ при $0 < p < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\frac{\mathbf{1}\{\eta_{n,p} < n\}}{\sqrt{n-\eta_{n,p}}} &= \mathbf{E}\,\frac{1}{\sqrt{n-\eta_{n,p}}}\,\mathbf{1}\big\{\eta_{n,p} < np + np(1-p)\big\} \\ &\quad + \mathbf{E}\,\frac{\mathbf{1}\{\eta_{n,p} < n\}}{\sqrt{n-\eta_{n,p}}}\,\mathbf{1}\big\{\eta_{n,p} \geqslant np + np(1-p)\big\} \\ &\leqslant \frac{c(p)}{\sqrt{n}} + \exp(-np(1-p)/4) \leqslant \frac{c(p)}{\sqrt{n}} = \frac{c(F)}{\sqrt{n}}. \qquad (12)\end{aligned}$$

Ясно, что

$$\rho_{\mathcal{C}_d}(G_n, F^{n+1}) \leqslant \sum_{k=0}^{n+1} |b_k(n,p) - b_k(n+1,p)| = 2\,\rho_{\mathrm{TV}}(B_{n,p}, B_{n+1,p}) \quad (13)$$

(разумеется, мы предполагаем $b_{n+1}(n,p) = 0$). Более того, $b_n(n,p) = p^n \leqslant c(p)/\sqrt{n}$. Осталось применить (10), (12), (13) и лемму 3. □

Точка $a \in \mathbf{R}$ называется q-квантилью одномерного распределения F, если выполнены неравенства: $F\{(-\infty, a)\} \leqslant q$ и $F\{(a,\infty)\} \leqslant 1-q$, где $0 \leqslant q \leqslant 1$. При $q = 1/2$ q-квантиль называется медианой распределения F. Пусть точка 0 является q-квантилью распределения F. Тогда справедлива следующая оценка расстояния Колмогорова (см. [1, теорема 4.1 главы V], а также [14]):

$$\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant \frac{c}{\sqrt{n\min\{q, 1-q\}}} \leqslant \frac{c}{\sqrt{nq(1-q)}}. \quad (14)$$

Зависимость от n и q в данном неравенстве является правильной, так как справедлива аналогичная нижняя оценка, то есть оценка (14) является оптимальной (см. [1, пример 4.1 главы V]). Указанная оценка основана на частном случае неравенства Колмогорова–Рогозина (см. [1, теорема 2.4 главы II]). В неравенстве (14) абсолютную постоянную c можно взять равной $c_0 = \frac{1+2\sqrt{2\pi}}{e^{3/8}} \approx 4.132847$ [7].

Если 0 является медианой распределения F, то

$$\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant \frac{c_0\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \frac{c}{\sqrt{n}} \quad (15)$$

(см. [15]). В частности, это так, если распределение F симметрично. Для симметричных распределений F справедливо также следующее неожиданное и парадоксальное неравенство:

$$\rho(F^n, F^{n+2}) \leqslant \frac{c}{n} \quad (16)$$

(см. [1, теорема 5.2 главы V]). Для стандартного нормального распределения F оно следует из леммы 1.

Если $m = m(F)$ является медианой распределения F, то распределение FE_{-m} имеет нулевую медиану и

$$\rho((FE_{-m})^n, (FE_{-m})^{n+1}) = \rho(F^n, F^{n+1}E_{-m}) \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}. \tag{17}$$

Ясно, что если $F = E_a$ – вырожденное распределение с $a \neq 0$, то

$$\rho(F^n, F^{n+1}) = 1.$$

В любом другом случае $\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant c(F)/\sqrt{n}$. Действительно,

$$\begin{aligned}\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant \rho(F^n, F^{n+1}E_{-m}) + \rho(F^{n+1}, F^{n+1}E_{-m})\\ \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}} + Q(F^{n+1}, |m|) \leqslant c(F)/\sqrt{n}.\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $Q(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – функция концентрации Леви, а последнее неравенство следует из неравенства Колмогорова–Рогозина. Таким образом, мы получили одномерный вариант теоремы 1.

§2. Оценки расстояния Прохорова

Во время доклада автора, посвященного теореме 1, Ю. А. Давыдов задал вопрос о возможности получения аналога теоремы 1 для расстояния Прохорова. В этом параграфе мы сформулируем такой аналог (см. теорему 2).

Расстояние Прохорова между распределениями G и H определяется как

$$\begin{aligned}\pi(G,H) = \inf\Big\{\varepsilon : G\{A\} \leqslant H\{A^\varepsilon\} + \varepsilon, H\{A\} \leqslant G\{A^\varepsilon\} + \varepsilon\\ \text{для любого борелевского множества } A\Big\},\end{aligned} \tag{19}$$

где $A^\varepsilon = \{y \in \mathbf{R}^d : \inf_{x\in A} \|x - y\| < \varepsilon\}$ – ε-окрестность множества A.

Если X – случайный вектор с распределением F, мы будем обозначать через $F_{(n)}$ распределение нормированного случайного вектора $X/\sqrt{n}$.

Теорема 2. *Для любого d-мерного распределения F найдется величина $c(F)$, зависящая только от F и такая что*

$$\pi(F^n_{(n)}, F^{n+1}_{(n)}) \leqslant \frac{c(F)}{\sqrt{n}} \tag{20}$$

при всех натуральных n.

Ясно, что $F^n_{(n)}$ – это распределение нормированной суммы $S_n/\sqrt{n}$, которое не близко к вырожденному распределению, если не вырождено распределение F. Такая нормировка естественна при рассмотрении расстояния Прохорова, которое не инвариантно относительно преобразования масштаба. Для распределений ненормированных сумм утверждение теоремы 2 вообще говоря может не иметь места. Например, $\pi(F^n, F^{n+1}) = 1$ при $F = E_a$ с $\|a\| \geqslant 1$.

В теореме 2 мы не разделяем распределения на тривиальные и нетривиальные. Если распределение сосредоточено на аффинной гиперплоскости, не содержащей начало координат, его можно сдвинуть на некоторый вектор a так, чтобы после сдвига оно было сосредоточено на линейном подпространстве, содержащем нуль. А при нормировке сдвиг на постоянный вектор превращается в сдвиг на вектор, деленный на корень из n. Расстояние Прохорова между сдвинутым и несдвинутым распределениями оценивается через $\|a\|/\sqrt{n}$. При доказательстве используется индукция по размерности d. Другие шаги доказательства теоремы 2 почти буквально повторяют доказательство теоремы 1. Только вместо леммы 2 следует использовать следующую лемму 5, принадлежашую В. В. Юринскому [13]. Автор собирается посвятить подробному доказательству теоремы 2 отдельную публикацию.

Лемма 5. *В условиях леммы* 2 *найдется величина* $c(F)$, *зависящая только от* F *и такая что*

$$\pi(F^n_{(n)}, \Phi^n_{(n)}) \leqslant \frac{c(F)}{\sqrt{n}}$$

при всех натуральных n.

Из теоремы 2 и определения расстояния Прохорова несложно выводится следующая теорема 3. На самом деле теоремы 2 и 3 эквивалентны.

Теорема 3. *Для любого* d*-мерного распределения* F *найдется величина* $c(F)$, *зависящая только от* F *и такая что*

$$(F^n)\{A\} \leqslant (F^{n+1})\{A^{c(F)}\} + \frac{c(F)}{\sqrt{n}}$$
$$\text{и} \quad (F^{n+1})\{A\} \leqslant (F^n)\{A^{c(F)}\} + \frac{c(F)}{\sqrt{n}} \qquad (21)$$

для любого борелевского множества A при всех натуральных n.

По теореме Штрассена–Дадли (см. [3, 11, 12]), справедливо следующее следствие теоремы 3.

Следствие 1. *Для любого d-мерного распределения F найдется величина $c(F)$, зависящая только от F и такая что для любого натурального n можно построить на одном вероятностном пространстве случайные векторы ξ_n и η_n с $\mathcal{L}(\xi_n) = F^{n+1}$ и $\mathcal{L}(\eta_n) = F^n$, так что*

$$\mathbf{P}\left\{\|\xi_n - \eta_n\| > c(F)\right\} \leqslant \frac{c(F)}{\sqrt{n}}. \tag{22}$$

Заметим, что векторы $\xi_n = S_{n+1}$ и $\eta_n = S_n$ имеют требуемые распределения, но для вектора $\xi_n - \eta_n = X_{n+1}$ в этом случае не выполняется неравенство (22), если, конечно, распределение F имеет неограниченный носитель.

Автор благодарен Ю. А. Давыдову за вопрос о метрике Прохорова и В. В. Ульянову за полезные консультации по библиографическим вопросам.

Список литературы

1. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986).
2. R. N. Bhattacharya, R. Ranga Rao, *Normal Approximation and Asymptotic Expansions*, Wiley, 1976.
3. R. M. Dudley, *Distances of probability measures and random variables.* — Ann. Math. Statist. **39**, No. 5 (1968), 1563–1572.
4. F. Götze, A. Naumov, V. Spokoiny, V. Ulyanov, *Large ball probabilities, Gaussian comparison and anti-concentration.* — Bernoulli **25**, No. 4A (2019), 2538–2563.
5. Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев, *Оценки близости сверток вероятностных распределений на выпуклых многогранниках.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 108–117.
6. Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев, *Сходимость к бесконечномерным обобщенным распределениям Пуассона на выпуклых многогранниках.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **501** (2021), 118–125.
7. Я. С. Голикова, *Об улучшении оценки расстояния между распределениями последовательных сумм независимых случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 118–123.
8. M. Panov, V. Spokoiny, *Finite sample Bernstein — von Mises theorem for semiparametric problems.* — Bayesian Analysis **10**, No. 3 (2015), 665–710.
9. V. V. Sazonov, *On the multi-dimensional central limit theorem.* — Sankhyā, Ser. A **30** (1968), 181–204.

10. V. V. Sazonov, *Normal Approximation – some Recent Advances.* — Lecture Notes Math. **879** (1981), 105 pp.
11. G. Schay, *Nearest random variables with given distributions.* — Ann. Probab. **2** (1974), 163–166.
12. V. Strassen, *The existence of probability measures with given marginals.* — Ann. Math. Statist. **36** (1965), 423–439.
13. В. В. Юринский, *Неравенство сглаживания для оценок расстояния Леви–Прохорова.* — Теория вероятн. и ее примен. **20**, No. 1 (1975), 3–12.
14. А. Ю. Зайцев, *Оценка близости распределений последовательных сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **97** (1980), 83–87.
15. А. Ю. Зайцев, *Некоторые свойства n-кратных сверток распределений.* — Теория вероятн. и ее примен. **26**, No. 1 (1981), 152–156.
16. A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the closeness of successive convolutions of multidimensional symmetric distributions.* — Probab. Theory Relat. Fields **79**, No. 2 (1988), 175–200.
17. В. М. Золотарев, Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., Наука, 1986.

Zaitsev A. Yu. Estimates of stability with respect to the number of summands for distributions of successive sums of i.i.d. vectors.

Let $X_1, X_2, \dots$ be i.i.d. random vectors in $\mathbf{R}^d$ with distribution F. Then $S_n = X_1+\dots+X_n$ has distribution F^n (degree is understood in the sense of convolutions). Let $\rho(F,G) = \sup_A |F\{A\} - G\{A\}|$, where the supremum is taken over all convex subsets of $\mathbf{R}^d$. For any nontrivial distribution F there is $c_1(F)$ such that $\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant \frac{c_1(F)}{\sqrt{n}}$ for any natural n. The distribution F is called trivial if it is concentrated on a hyperplane that does not contain the origin. Clearly, for such F, $\rho(F^n, F^{n+1}) = 1$. A similar result for the Prokhorov distance is also formulated. For any d-dimensional distribution F there is $c_2(F)$ such that $(F^n)\{A\} \leqslant (F^{n+1})\{A^{c_2(F)}\} + \frac{c_2(F)}{\sqrt{n}}$ and $(F^{n+1})\{A\} \leqslant (F^n)\{A^{c_2(F)}\} + \frac{c_2(F)}{\sqrt{n}}$ for all Borel set A and all natural n. Here A^ε is ε-neighborhood of the set A.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27
Санкт-Петербург 191023, Россия
и Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9
Санкт-Петербург, 199034 Россия
E-mail: `zaitsev@pdmi.ras.ru`

Поступило 27 октября 2023 г.