Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 525, 2023 г.

М. С. Ермаков

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ЛОГАРИФМА ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ В ЗОНЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ

§1. Введение

При решении задач доверительного оценивания и проверки гипотез нами задаются события, имеющие малые вероятности. Для обоснования подобных решений нам естественно базироваться на утверждениях, которые относятся к области вероятностей больших или умеренных уклонений. В тоже время, используемые для этого ключевые результаты, часто не охватывают подобного рода постановку задачи или охватывают ее при очень жестких предположениях. В частности, часто они базируются на теоремах о локальной асимптотической нормальности отношения правдоподобия, в которых предполагается, что предельные вероятности отделены от нуля константой.

Цель работы показать, что для выборки независимых наблюдений теоремы о локальной асимптотической нормальности логарифма отношения правдоподобия продолжаются на зону вероятностей умеренных уклонений. При этом предположения те же самые или близкие к тем, при которых обычно доказывается локальная асимптотическая нормальность. Эти результаты охватывают как логарифмическую, так и точную асимптотики вероятностей умеренных уклонений. Также в зоне вероятностей умеренных уклонений будет получен аналог второй леммы Ле Кама для контигуальных альтернатив [7, 11]. Отметим,что в [2] для последовательности независимых одинаково распределенных наблюдений доказаны нижние границы для асимптотики вероятностей умеренных уклонений логарифма отношения правдоподобия при условиях, совпадающих с данной работой.

Логарифм отношения правдоподобия имеет экспоненциальные моменты и поэтому допускает изучение в зонах вероятностей больших

Ключевые слова: отношение правдоподобия, асимптотическая нормальность, умеренные уклонения.

и умеренных уклонений уже хорошо развитой вероятностной техникой. Однако изучение его поведения, а также функционалов от него (оценок максимума правдоподобия, байесовских оценок и др.), в зоне вероятностей умеренных уклонений обычно связывают с обременительными условиями существования экспоненциальных моментов его производной по параметру [1, 5, 9, 12, 15, 16] и часто даже вторых производных. Цель настоящей работы – продемонстрировать на постановке задачи локальной асимптотической нормальности, что подобные условия не нужны. Достаточны обычные условия, при которых доказывается локальная асимптотическая нормальность, или близкие к ним [10, 6, 8]. Хотя развитие данного подхода на более сложные статистические модели (оценки максимума правдоподобия, байесовские оценки и критерии) представляет определенные трудности, с нашей точки зрения оно возможно.

В разделе 2 будут даны основные результаты и простейшие доказательства. В разделе 3 приведены доказательства наиболее трудоемких теорем.

Мы будем использовать буквы c и C, а также эти буквы с различными индексами, для обозначения различных положительных постоянных. Обозначим $\mathbf{1}(A)$ – индикатор события A. Для любых двух последовательностей чисел a_n и b_n, $a_n \asymp b_n$ означает, что найдутся такие c и C, что $c < a_n/b_n < C$ для всех n, и $a_n = o(b_n)$ означает $a_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Наконец $a_n = O(b_n)$ означает, что $a_n \leqslant Cb_n$.

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\{-t^2/2\}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

функцию стандартного нормального распределения.

Для дифференцируемой вещественной функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, обозначим $f'(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x}$.

§2. Основные результаты

2.1. Вторая лемма Ле Кама в зоне вероятностей умеренных уклонений. Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ – измеримое пространство. Пусть для каждого натурального n на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ заданы две совокупности вероятностных мер $\mathbf{P}_{n1}, \dots, \mathbf{P}_{nn}$ и $\mathbf{Q}_{n1}, \dots, \mathbf{Q}_{nn}$ абсолютно непрерывных относительно меры μ.

Зададим плотности распределения

$$p_{ni} = \frac{d\mathbf{P}_{ni}}{d\mu}, \quad q_{ni} = \frac{d\mathbf{Q}_{ni}}{d\mu}$$

для $1 \leqslant i \leqslant n$.

Независимые случайные величины $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ имеют одну из вероятностных мер $\mathbf{P}_{n1}, \ldots, \mathbf{P}_{nn}$ или $\mathbf{Q}_{n1}, \ldots, \mathbf{Q}_{nn}$ соответственно.

Нас будут интересовать вероятности умеренных уклонений логарифма отношения правдоподобия продакт мер $\mathbf{Q}_{n1} \times \ldots \times \mathbf{Q}_{nn}$ и $\mathbf{P}_{n1} \times \ldots \times \mathbf{P}_{nn}$.

Асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия в такой постановке часто исследуется с помощью второй леммы Ле Кама о контигуальности вероятностных мер. Цель раздела – получить определенный ее аналог для логарифмической асимптотики логарифма отношения правдоподобия в зоне вероятностей умеренных уклонений.

Для $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим

$$\eta_{ni} = g_{ni}(X_{ni}) = \Big(\frac{q_{ni}(X_{ni})}{p_{ni}(X_{ni})}\Big)^{1/2} - 1$$

и положим

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_{ni}.$$

Введем условие равномерной асимптотической пренебрежимости (UAN)

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{P}_{ni}(|\eta_{ni}| > \varepsilon) \to 0 \tag{2.1}$$

при $n \to \infty$ для всех $\varepsilon > 0$.

Вторая лемма Ле Кама утверждает, что при выполнении условия UAN, из асимптотической нормальности W_n следует асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия

$$\log L_n = \sum_{i=1}^{n} \log\Big(\frac{q_{ni}(X_{ni})}{p_{ni}(X_{ni})}\Big).$$

Обозначим

$$\Psi_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_{ni}[\eta_{ni}^2].$$

Согласно теореме Линдеберга–Феллера [4] из сходимости распределения W_n к нормальному $N(-\sigma^2/4, \sigma^2)$ и условия UAN следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_{ni}[\eta_{ni}^2 \mathbf{1}(|\eta_{ni}| > \varepsilon)] = o(\Psi_n) = o(1). \tag{2.2}$$

Ясно, что $\Psi_n \to \sigma^2$ при $n \to \infty$.

При этом же условии

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_{ni}[\eta_{ni}^2 \mathbf{1}(|\eta_{ni}| > \varepsilon)] = o(\Psi_n), \tag{2.3}$$

предполагая, что

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \infty, \tag{2.4}$$

мы покажем, что логарифмическая асимптотика распределений логарифма отношения правдоподобия в зоне вероятностей умеренных уклонений сходится к соответствующей логарифмической асимптотике нормального распределения. Таким образом, данное утверждение можно рассматривать как аналог второй леммы Ле Кама для зоны вероятностей умеренных уклонений.

В работе [13] показано, что для данной постановки задачи условие Линдеберга (2.2) и условия

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{ni}(|\eta_{ni}| > \varepsilon) = o\Big(\Psi_n\Big) \tag{2.5}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Q}_{ni}(|\eta_{ni}| > \varepsilon) = o\Big(\Psi_n\Big) \tag{2.6}$$

являются эквивалентными, когда $\Psi_n \asymp 1$ при $n \to \infty$.

В точности те же самые оценки (см. [13, с. 163]) позволяют утверждать эквивалентность условия (2.3) и условий (2.5), (2.6), когда $\Psi_n \to \infty$ при $n \to \infty$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.3), (2.4).

Для любого фиксированного δ, $0 < \delta < 1$, *для любой последовательности* C_n, *такой что* $-(1-\delta)\Psi_n^{1/2} < C_n < (1-\delta)\Psi_n^{1/2}$, *имеет место*

$$\log \mathbf{P}(\Psi_n^{-1/2} \log L_n > C_n) = -\frac{(C_n + 2\Psi_n^{1/2})^2}{2}(1 + o(1)) \tag{2.7}$$

и

$$\log \mathbf{Q}_n(\Psi_n^{-1/2}\log L_n < C_n) = -\frac{(2\Psi_n^{1/2} - C_n)^2}{2}(1 + o(1)) \tag{2.8}$$

при $n \to \infty$.

2.2. Вероятности умеренных уклонений логарифма отношения правдоподобия в терминах дифференцируемости функций g_{nj} в $\mathbb{L}_2$. В случае дифференцируемости функций g_{nj} в $\mathbb{L}_2$ из условий локальной асимптотической нормальности для параметрических семейств неодинаково распределенных случайных величин (см. условия (3.1), (3.2) в гл. 2, [8]) следует выполнение условий (2.3), (2.4).

Независимые случайные наблюдения $X_{n1}, \dots, X_{nn}$ заданы на вероятностных пространствах $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbf{P}_{\theta ni})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\theta \in \Theta$, и данные статистические эксперименты являются регулярными (см. параграф 1.7 в [8]), то есть Θ - открытое множество в $\mathbb{R}^1$, вероятностные меры $\mathbf{P}_{\theta ni}$ абсолютно непрерывны относительно некоторой меры μ, заданной на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, и имеют плотности

$$p_{ni}(x,\theta) = \frac{d\,\mathbf{P}_{\theta ni}}{d\,\mu}$$

и $p_{ni}(x,\theta) > 0$ для всех $x \in \mathcal{X}$ и $\theta \in \Theta$.

Будем предполагать, что плотности $p_{ni}(x,\theta)$ непрерывны по θ на Θ и существуют производные $g_{ni}(x,\theta,\theta+u) = p_{ni}^{1/2}(x,\theta+u)p_{ni}^{-1/2}(x,\theta) - 1$ в $\mathbb{L}_2(d\mathbf{P}_{ni})$ по u равные $\psi_{ni}(x,\theta)$, иначе говоря,

$$\int\limits_{\mathcal{X}} (g_{ni}(x,\theta,\theta+u) - u\psi_{ni}(x,\theta))^2\, d\,\mathbf{P}_{\theta ni} = o(u^2) \tag{2.9}$$

при $u \to 0$.

Информационные количества Фишера равны

$$I_{ni}(\theta) = 4\int\limits_{\mathcal{X}} \psi_{ni}^2(x,\theta)\, d\,\mathbf{P}_{\theta ni}.$$

Будем предполагать, что информационные количества Фишера $I_{ni}(\theta)$ существуют и конечны.

Предположим также, что функции $\psi_{ni}(x,\theta)$ непрерывны в $\mathbb{L}_2(d\mathbf{P}_{ni})$ по параметру $\theta \in \Theta$. Обозначим

$$\Upsilon_n(\theta) = \sum_{i=1}^n I_{ni}(\theta). \tag{2.10}$$

Теорема 2.2. *Пусть* $t \in \Theta$. *Пусть* $u_n \to 0$ *и* $u_n^2 \Upsilon_n(t) \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Пусть статистические эксперименты регулярны и*

$$\sum_{i=1}^{n} \int (\psi_{ni}(x, t+u) - \psi_{ni}(x,t))^2 \, d\,\mu = o(\Upsilon_n(t)) \tag{2.11}$$

для $|u| < u_n$ *при* $n \to \infty$.

Пусть также выполнены условия Линдеберга

$$\lim_{n\to\infty} \Upsilon_n(t)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_t \Big\{ \Big[\frac{f'_{ni}(x,t)}{f_{ni}(x,t)} \Big]^2 \mathbf{1} \Big(\frac{f'_{ni}(x,t)}{f_{ni}(x,t)} > \varepsilon \Upsilon_n^{1/2}(t) \Big) \Big\} = 0. \tag{2.12}$$

Тогда для любого фиксированного δ, $0 < \delta < 1$, *для любой последовательности* C_n, *такой что*

$$-(1-\delta) u_n \Upsilon_n^{1/2}(t)/2 < C_n < (1-\delta) u_n \Upsilon_n^{1/2}(t)/2,$$

имеет место

$$\log \mathbf{P}(u_n^{-1} \Upsilon_n^{-1/2}(t) \log L_n > C_n) = -\frac{(C_n + u_n \Upsilon_n^{1/2}(t)/2)^2}{2}(1 + o(1)) \tag{2.13}$$

и

$$\log \mathbf{P}_{t+u_n}(u_n^{-1} \Upsilon_n^{-1/2}(t) \log L_n < C_n) = -\frac{(u_n \Upsilon_n^{1/2}(t)/2 - C_n)^2}{2}(1 + o(1)) \tag{2.14}$$

при $n \to \infty$.

Замечание. Условие (2.11) можно заменить на

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\eta_{ni} - u\psi_{ni}(X_{ni}, t))^2 = o(u^2 \Upsilon_n(t)) \tag{2.15}$$

для $|u| < u_n$ при $n \to \infty$.

Следствие 2.1. *Пусть* $t \in \Theta$. *Пусть случайные величины* $X_{ni} = X_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *одинаково распределены, имеет место*

$$\int (g(x,t,t+u) - u\psi(x,t))^2 d\,\mathbf{P}_t = o(u^2), \quad u \to 0, \tag{2.16}$$

и эксперименты $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta)$ *регулярны. Пусть* $u_n \to 0$, $nu_n^2 \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Тогда для любого фиксированного δ, $0 < \delta < 1$, *и для любой последовательности* C_n, *такой что* $-(1-\delta)n^{1/2}u_n I^{1/2}(t)/2 < C_n < (1-\delta)n^{1/2}u_n I^{1/2}(t)/2$, *имеет место*

$$\log \mathbf{P}((n^{1/2}u_n I^{1/2}(t))^{-1}\log L_n > C_n) = -\frac{(C_n + n^{1/2}u_n I^{1/2}(t)/2)^2}{2}(1+o(1)) \quad (2.17)$$

и

$$\log \mathbf{P}_{t+u_n}((n^{1/2}u_n I^{1/2}(t))^{-1}\log L_n < C_n) = -\frac{(n^{1/2}u_n I^{1/2}(t)/2 - C_n)^2}{2}(1+o(1)). \quad (2.18)$$

при $n \to \infty$.

Отметим, что условия локальной асимптотической нормальности для неодинаково распределенных случайных наблюдений в [8, теорема 3.1 главы 2] совпадают с условиями теоремы 2.2. Достаточно положить $u_n = u$. В свою очередь, теорема о локальной асимптотической нормальности для одинаково распределенных независимых наблюдений [8] справедлива при тех же самых условиях, что и следствие. Таким образом, эти результаты могут рассматриваться как расширение теорем о нормальной аппроксимации распределений логарифма отношения правдоподобия на зону вероятностей умеренных уклонений.

Доказательство теоремы 2.2. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(|\eta_{ni}| > \varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(|\eta_{ni} - u_n\psi_{ni}| > \varepsilon/2) + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(u_n|\psi_{ni}| > \varepsilon/2) \doteq I_{1n} + I_{2n}. \quad (2.19)$$

Применяя неравенство Чебышева к I_{1n} и I_{2n}, получаем, что $I_{1n} = o(u_n^2\Upsilon_n(t))$ в силу последней оценки доказательства [8, лемма 3.1 главы 2] и $I_{2n} = o(u_n^2\Upsilon_n(t))$ в силу условия Линдеберга. Справедливость следствия также вытекает из этих оценок. □

2.3. Точная асимптотика вероятностей умеренных уклонений. Введем следующие условия.

Пусть $\omega(u)$, $u \in \mathbb{R}^1$, – четная функция, возрастающая при $u > 0$, принимающая неотрицательные значения, и $\omega(0) = 0$, $\omega(u) > Cu$, $\omega(2u) < C\omega(u)$ для $u > 0$.

Найдется такое u_0, что для $u \in [0, u_0]$ имеет место

$$\int (g(x,t,t+u) - u\psi(x))^2 \, d\,\mathbf{P}_t < Cu^2\omega(u), \tag{2.20}$$

$$\left|4\,\mathbf{E}_t[g^2(X_1,t,t+u)] - u^2 I(t)\right| < Cu^2\omega(u) \tag{2.21}$$

и

$$\int \psi^2(x)\omega^{-1}(\psi^{-1}(x))\, d\,\mathbf{P}_t < \infty. \tag{2.22}$$

Теорема 2.3. *Пусть $t \in \Theta$. Пусть $u_n > 0$, $nu_n^2 \to \infty$ и $nu_n^2\omega(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть выполнены условия* (2.20)–(2.22).

Тогда для любого фиксированного δ, $0 < \delta < 1$, для любой последовательности C_n, такой что $-(1-\delta)n^{1/2}u_n I^{1/2}(t)/2 < C_n < (1-\delta)n^{1/2}u_n I^{1/2}t)/2$, имеет место

$$\mathbf{P}_t((n^{1/2}u_n I^{1/2}(t))^{-1}\log L_n > C_n) = \Phi(-C_n - n^{1/2}u_n I^{1/2}(t)/2)(1+o(1)) \tag{2.23}$$

и

$$\mathbf{P}_{t+u_n}((n^{1/2}u_n I^{1/2}(t))^{-1}\log L_n < C_n) = \Phi(C_n - n^{1/2}u_n I^{1/2}(t)/2)(1+o(1)) \tag{2.24}$$

при $n \to \infty$.

§3. Доказательство теорем

3.1. Доказательство теоремы 2.1. Для изучения логарифмической асимптотики вероятностей умеренных уклонений используется теорема Феллера 3.1 [3], приведенная ниже.

Для треугольного массива независимых случайных величин $Z_{n1}, \dots, Z_{nn}$ предположим, что существует

$$\phi_{ni}(h) = \mathbf{E}\,[\exp\{sZ_{ni}\}] < \infty, \quad 0 < s < 1, \tag{3.1}$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.

Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_{ni}.$$

Обозначим

$$\tau_n(s) = \sum_{i=1}^{n} [\phi_{ni}(s) - 1],$$

$$\zeta_n(s) = \sum_{i=1}^{n} \phi'_{ni}(s)$$

и $\gamma_n(s) = s\zeta_n(s) - \tau_n(s)$.

Теорема 3.1. *Пусть $C_n = z_n, r_n, s_n$ связаны уравнениями*

$$z_n = \zeta_n(s_n), \quad r_n = \gamma_n(s_n). \tag{3.2}$$

Тогда

$$\mathbf{P}(S_n > z_n) = \exp\{-r_n + o(r_n)\}, \tag{3.3}$$

если выполнены следующие условия

A.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leqslant i\leqslant n} [\phi_{ni}(s_n) - 1] = 0, \tag{3.4}$$

B. *Найдется $\varepsilon > 0$, такое что*

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\varepsilon\zeta_n(s_n)}^{\infty} y \exp\{s_n y\} \mathbf{P}_{ni}(dy) = o(\zeta_n(s_n)) \tag{3.5}$$

при $n \to \infty$.

C. *Для некоторой постоянной $c > 0$ имеет место*

$$cs_n\zeta_n(s_n) \leqslant \gamma_n(s_n) < s_n\zeta_n(s_n). \tag{3.6}$$

D. *Найдется последовательность H_n, такая что для некоторого $c > 0$ имеет место*

$$\zeta_n(H_n) > (1+c)z_n \tag{3.7}$$

и условия **A**–**C** *выполнены для всех троек $t_n, \zeta_n(t_n), \gamma_n(t_n)$ при всех $s_n < t_n < H_n$.*

Мы положим $Z_{ni} = \log(1+\eta_{ni}) + \rho_{ni}^2$. Тогда

$$\tau_n(s) = \sum_{i=1}^{n} \exp\{s\rho_{ni}^2\}\, \mathbf{E}[(1+\eta_{ni})^s] = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ni}(s), \tag{3.8}$$

$$
\begin{aligned}
\zeta_n(s) = \sum_{i=1}^{n} &\exp\{s\rho_{ni}^2\}\,\mathbf{E}\left[\log(1+\eta_{ni})\,(1+\eta_{ni})^s\right] \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \rho_{ni}^2 \phi_{ni}(s) = I_{1n} + I_{2n}.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Используя разложение в ряд Тейлора, имеем

$$
\begin{aligned}
&\phi_{ni}(s) - 1 = s\,\rho_{ni}^2 + s\,\mathbf{E}\,[\eta_{ni}] \\
&+ s(s-1)\,\mathbf{E}\left[\eta_{ni}^2 \int_0^1 \frac{(1-\lambda)}{(1+\lambda\eta_{ni})^{2-s}}\,d\,\lambda\right] + o(\rho_{ni}^2)
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Используя неравенство

$$
(1+\lambda\eta_{ni})^{s-2} \leqslant (1-\lambda)^{s-2}, \tag{3.11}
$$

получаем из (3.10)

$$
\exp\{s\rho_{ni}^2\}\,\mathbf{E}\,[(1+\eta_{ni})^s \mathbf{1}(|\eta_{ni}| > \varepsilon)] = o(\rho_{ni}^2) \tag{3.12}
$$

и следовательно

$$
\begin{aligned}
&\phi_{ni}(s) - 1 = s\rho_{ni}^2 + s\mathbf{E}\,[\eta_{ni}] \\
&+ \frac{s(s-1)}{2}\mathbf{E}\,[\eta_{ni}^2] + o(\rho_{ni}^2) = \frac{s^2}{2}\rho_{ni}^2 + o(\rho_{ni}^2).
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Рассуждая аналогично, имеем

$$
I_{1n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\eta_{ni} \int_0^1 (s\log(1+\lambda\eta_{ni})+1)(1+\lambda\eta_{ni})^{s-1}\,d\,\lambda\right] \exp\{s\rho_{ni}^2\} \tag{3.14}
$$

Используя $1+\lambda\eta_{ni} > 1-\lambda$ при $\lambda > 0$ и

$$
\mathbf{E}\,[\eta_{ni}^2\,\mathbf{1}(|\eta_{ni}| > \varepsilon)] \leqslant 2(\mathbf{Q}_{ni}(|\eta_{ni}| > \varepsilon) + \mathbf{P}_{ni}(|\eta_{ni}| > \varepsilon)),
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\eta_{ni} \int_0^1 (s\log(1+\lambda\eta_{ni})+1)(1+\lambda\eta_{ni})^{s-1}\,d\,\lambda\;\mathbf{1}(|\eta_{ni}| > \varepsilon)\right] \\
&\leqslant C\mathbf{E}\left[|\eta_{ni}| \int_0^1 (s\lambda|\eta_{ni}|+1)(1-\lambda)^{s-1}\,d\,\lambda\;\mathbf{1}(|\eta_{ni}| > \varepsilon)\right] \\
&\leqslant C(\mathbf{Q}_{ni}(|\eta_{ni}| > \varepsilon) + \mathbf{P}_{ni}(|\eta_{ni}| > \varepsilon)).
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Из (3.14), (3.15) и (2.5), (2.6) следует, что

$$\begin{aligned} I_{1n} &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}\,[\eta_{ni}] - \frac{1}{2}\mathbf{E}\,[\eta_{ni}^2] + s\mathbf{E}\,[\eta_{ni}^2])(1+o(1)) \\ &= -(1-s)\Psi_n/2(1+o(1)) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Следовательно

$$\zeta_n(s) = s\Psi_n(1+o(1)) \tag{3.17}$$

и

$$\gamma_n(s) = (s^2\Psi_n - s^2\Psi_n/2)(1+o(1)) = s^2\Psi_n/2(1+o(1)), \tag{3.18}$$

что завершает доказательство (2.7).

Имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}_n\Big(\sum_{i=1}^{n} \log \frac{q_{ni}(X_{ni})}{p_{ni}(X_{ni})} < C_n\Big) \\ &\quad = \mathbf{Q}_n\Big(\sum_{i=1}^{n} \log \frac{p_{ni}(X_{ni})}{q_{ni}(X_{ni})} > -C_n\Big). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Таким образом (2.8) следует из (2.7).

3.2. Доказательство теоремы 2.3. Начнем с доказательства (2.23). Случайные величины

$$Z_{ni} = \frac{1}{2}\log \frac{f(X_i, t+u)}{f(X_i, t)} + \rho_{n1}^2, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{3.20}$$

имеют различные распределения при каждом n. Поэтому для доказательства применяется теорема Крамера, распространенная на случай схемы серий. Для рассматриваемой постановки задачи третьи моменты могут расти с ростом n. Это обуславливает отличие в доказательстве поскольку в доказательстве используется неравенство Эссеена (см. [4]).

Обозначим через F_n функцию распределения случайной величины Z_{n1}. Пусть $\bar{Z}_{n1}$ – случайная величина, имеющая функцию распределения

$$\bar{F}_n(x) = \phi_{n1}^{-1}(s) \int_{-\infty}^{x} \exp\{s\, y\} dF_n(y). \tag{3.21}$$

Тогда $m_n(s) \doteq \mathbf{E}\,[\bar{Z}_{n1}] = \phi_{n1}'(s)$.

Зададим $s = s_n$ уравнением

$$C_n = n\,\phi'_{n1}(s_n). \tag{3.22}$$

Обычно при доказательстве теоремы Крамера вместо переменной s_n вводят переменную $h = h_n = n^{1/2}u_n I^{1/2}(t)s_n$ (см. [3, 4, 14]). В данной постановке дисперсии случайных величин Z_{ni} зависят от n и рассматриваемая нормировка более наглядна.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены* (2.20)–(2.22). *Тогда имеет место*

$$\sigma_n^2(s) \doteq \mathbf{E}_t[\bar Z_{n1}^2] = u_n^2\, I(t) + O(u_n^2\,\omega(u_n)), \tag{3.23}$$

$$\mathbf{E}_t[\bar Z_{n1}^3] = O(u_n^2\,\omega(u_n)), \tag{3.24}$$

$$\phi_{ni}(s) - 1 = \frac{s^2}{8}\,u_n^2\, I(t) + O(u_n^2\,\omega(u_n)), \tag{3.25}$$

и

$$\zeta_n(s) = \frac{s}{4}\,u_n^2\, I(t) + O(u_n^2\,\omega(u_n)). \tag{3.26}$$

Докажем (3.23). Элементарными оценками показывается, что

$$\mathbf{E}_t[Z_{n1}^2\,\exp\{sZ_{n1}\}] = \mathbf{E}_t[\log^2(1+\eta_{n1})\,(1+\eta_{n1})^s] + O(u_n^2\,\omega(u_n)). \tag{3.27}$$

Таким образом, для доказательства (3.23) достаточно показать, что

$$\mathbf{E}_t[\log^2(1+\eta_{n1})\,(1+\eta_{n1})^s\,\mathbf{1}(|\eta_{n1}|>\varepsilon)] = O(u_n^2\,\omega(u_n)), \tag{3.28}$$

поскольку остальная часть слагаемого по существу оценена в (3.15) в [2].

Для $0 < \delta < 1 - s$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_t[\log^2(1+\eta_{n1})\,(1+\eta_{n1})^s\,\mathbf{1}(|\eta_{n1}|>\varepsilon)]\\
&\leqslant 4s^{-2}e^{-2}\mathbf{P}_t(\eta_{n1}<-\varepsilon)+\mathbf{E}_t[\log^2(1+\eta_{n1})(1+\eta_{n1})^s]\mathbf{1}(\eta_{n1}>\varepsilon)]\\
&\leqslant 4s^{-2}\,e^{-2}\,\mathbf{P}_t(\eta_{n1}<-\varepsilon) + C_\delta\,\mathbf{E}_t[(1+\eta_{n1})^{s+\delta}\,\mathbf{1}(\eta_{n1}>\varepsilon)]\\
&\leqslant C_s\,\mathbf{P}_t(|\eta_{n1}|>\varepsilon) = O(u_n^2\,\omega(u_n)),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

так как в силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_t[(1+\eta_{n1})^{s+\delta}\,\mathbf{1}(\eta_{n1}>\varepsilon)]\\
&\qquad\leqslant \mathbf{P}_t^{s+\delta}(\eta_{n1}>\varepsilon)\,\mathbf{P}_{t+u_n}^{1-s-\delta}(\eta_{n1}>\varepsilon) \leqslant C\,u_n^2\,\omega(u_n).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Последнее неравенство следует из (3.5) и (3.7) в [2], учитывая что в них $|\eta_{n1}| > \varepsilon$.

Доказательство (3.24) осуществляется аналогичным образом. При этом вместо (3.15) в [2] мы применяем (2.7),(3.3),(3.6) и (3.44) в [2].

Элементарными оценками получаем, что

$$\mathbf{E}_t[Z_{n1}^3 \exp\{sZ_n\}] = \mathbf{E}_t[\log^3(1+\eta_{n1})\,(1+\eta_{n1})^s]\,(1+o(1)) + O(u_n^2\,\omega(u_n)), \tag{3.31}$$

Имеем

$$\mathbf{E}_t[\log^3(1+\eta_{n1})\,(1+\eta_{n1})^s\,\mathbf{1}(\eta_{n1} < -\varepsilon)] \leqslant 27\,s^{-3}e^{-3}\,\mathbf{P}_t(\eta_{n1} < -\varepsilon) \tag{3.32}$$

и, для $0 < \delta < 1 - s$,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_t[\log^3(1+\eta_{n1})\,(1+\eta_{n1})^s\,\mathbf{1}(\eta_{n1} > \varepsilon)] \\ &\quad \leqslant C_\delta\,\mathbf{E}_t[(1+\eta_{n1})^{s+\delta}\,\mathbf{1}(\eta_{n1} > \varepsilon)] \\ &\quad \leqslant C_s\mathbf{P}_t(|\eta_{n1}| > \varepsilon) = O(u_n^2\,\omega(u_n)). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Таким образом остается оценить

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_t[\log^3(1+\eta_{n1})\,(1+\eta_{n1})^s\,\mathbf{1}(|\eta_{n1}| < \varepsilon)] \\ &\quad \leqslant C\,\mathbf{E}_t[|\eta_{n1}|^3\,\mathbf{1}(|\eta_{n1}| < \varepsilon)]. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Оценка правой части (3.34) аналогична оценке (3.6) в [2]. Имеем

$$\mathbf{E}_t[|\eta_{n1}|^3\,\mathbf{1}(|\eta_{n1}| < \varepsilon)] \leqslant J_{n1} + J_{n2} + J_{n3} \leqslant C\,u_n^2\,\omega(u_n), \tag{3.35}$$

где

$$\begin{aligned} J_{n1} &= 8\,\mathbf{E}_t[|\eta_{n1} - u_n\psi_{n1}|^3\,\mathbf{1}(|\eta_{n1} - u_n\psi_1| < \varepsilon)] \\ &\leqslant C\,\mathbf{E}_t[(\eta_{n1} - u_n\psi_1)^2] < C\,u_n^2\,\omega(u_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{n2} &= 8\,u_n^3\,\mathbf{E}_t[|\psi_1|^3\,\mathbf{1}(u_n|\psi_1| < \varepsilon)] \\ &\leqslant C\,u_n^3\,u_n^{-1}\,\omega(\varepsilon u_n)\,\mathbf{E}_t[\psi_1^2\,\omega^{-1}(\psi_1^{-1})] \leqslant C\,u_n^2\,\omega(u_n) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} J_{n3} &= 8\mathbf{E}_t[|\eta_{n1}|^3\,\mathbf{1}(|\eta_{n1}| < \varepsilon, u_n|\psi_1| > \varepsilon)] \leqslant C\,\varepsilon^3\,\mathbf{P}_t(u_n|\psi_1| > \varepsilon) \\ &\leqslant C\,u_n^2\,\omega(\varepsilon u_n)\,\mathbf{E}_t[\psi_1^2\,\omega^{-1}(\psi_1^{-1})] \leqslant C\,u_n^2\,\omega(u_n). \end{aligned}$$

Оценки (3.23) и (3.24) следуют из (2.20) и (2.22) применением неравенства Чебышёва к оценкам (3.10)–(3.17).

Обозначим H_n функцию распределения

$$n^{-1/2}\sigma_n^{-1}(s)\sum_{i=1}^{n}(\bar{Z}_{ni} - m_n(s)). \tag{3.36}$$

Тогда мы можем написать (см. [4, 14])

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}((n^{1/2}u_n I^{1/2}(t))^{-1}\log L_n > 2C_n) \\ &\quad = \phi_n^{-n}(s)\exp\{s\zeta_n(s)\}\int_0^\infty \exp\{-s\sigma_n(s)t\sqrt{n}\}\,d\,H_n(t). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Обозначим $R_n(t) = H_n(t) - \Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Применяя теорему Эссеена, получаем

$$|H_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{c\,\mathbf{E}_t|\bar{Z}_{n1}|^3}{\sigma_n^3(s)\sqrt{n}} \leqslant C\frac{\omega(u_n)}{\sqrt{n}u_n}. \tag{3.38}$$

Отсюда, интегрируя по частям (см. (4.22), [14]), получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \exp\{-s\sigma_n(s)t\sqrt{n}\}\,d\,R_n(t) = -R_n(0) \\ &\qquad - \int_0^\infty H_n(t)\,d\,\exp\{-s\sigma_n(s)t\sqrt{n}\} = o(n^{-1/2}u_n^{-1}). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Остается только заметить, что

$$\int_0^\infty \exp\{-s\sigma_n(s)t\sqrt{n}\}\,d\,\Phi(t) = \frac{1}{s\sigma_n(s)t\sqrt{2\pi n}}.$$

Доказательство (2.24) получается довольно просто из доказательства (2.23). Достаточно заметить, что в нем можно взять тоже самое $s = s_n$ при вероятностной мере $\mathbf{P}_{t+u_n}$ и

$$(1 + g(x, t+u, t))^s p(x, t+u) = (1 + g(x, t, t+u))^{1-s} p(x, t).$$

Мы опустим остальные рассуждения.

Список литературы

1. А. А. Боровков, *Большие уклонения и проверка статистических гипотез.* — Тр. института Математики СО РАН **2** (1992).
2. M. S. Ermakov, *Asymptotically efficient statistical inference for moderate deviation probabilities.* — Theory Probab. Appl. **48** (2004), 622–641.
3. W. Feller, *Limit theorems for probabilities of large deviations.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **14** (1969), 1–20.
4. W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications.* II. NY, Wiley, 1970.

5. F. Q. Gao, *Moderate deviations for the maximum likelihood estimator.* — Statist. Probab. Lett. **55** (2001), 345–352.
6. J. Hajek, *Local asymptotic minimax and admissibility in estimation.*— Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. **1** (1972), 175–194.
7. J. Hajek, Z. Shidak, Z. *Theory of rank tests.* NY, Academic Press, 1967.
8. I. A. Ibragimov, R. Z. Has'minskii, *Statistical estimation: Asymptotic theory.* NY, Springer, 1981.
9. I. A. Ibragimov, M. Radavicius, *Probability of large deviations for the maximum likelihood estimator.* — Sov. Math. Dokl. **23**, No. 2 (1981), 403–406.
10. L. Le Cam, *Locally asymptotically normal families of distributions.* — Univ. California Publ. Statist. **3** (1960), 37–98.
11. L. Le Cam, *Likelihood functions for large numbers of independent observations.* — Research papers in statistics (Festschrift for J. Neyman), F. N. David (ed.), pp. 167–187, NY, Wiley, 1966.
12. Y. Miao, Y. X. Chen, *Note on the moderate deviation principle of maximum likelihood estimator.* — Acta Appl. Math. **110**, No. 2 (2010), 863–869.
13. J. Oosterhoff, W.R. van Zwet, *A note on contiguity and Hellinger distance.* — Contribution to Statistics. Hajek Memorial Volume. J. Jureckova (ed.), pp. 157–166. Dordrecht, D. Reide, 1979.
14. Л. В. Осипов *О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **17** (1972), 320–341.
15. I. M. Skovgaard, *Large deviation approximations for maximum likelihood estimators.* — Probab. Math. Statist. **6** (1985), 89–107.
16. Z. H. Xiao, L .Q. Liu, *Moderate deviations of maximum likelihood estimator for independent not identically distributed case.* — Statist. Probab. Lett. **76** (2006), 1056–1064.

Ermakov M. S. Local asymptotic normality of likelihood ratio in moderate deviation zone.

For logarithmic asymptotic we show that local asymptotic normality can be extended on moderate deviation zone if the same assumptions hold. We show that strong asymptotic of moderate deviation probabilities can be also obtained with rather mild assumptions. The extension on moderate deviation zone of second Le Cam Lemma for contiguous alternatives is proposed as well.

Институт проблем машиноведения РАН
Большой пр. В.О., 61
Санкт-Петербург; С.-Петербургский
государственный Университет
Университетский пр., 28, Петродворец
198504 Санкт-Петербург
Россия
E-mail: erm2512@gmail.com

Поступило 5 октября 2023 г.