Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 525, 2023 г.

М. К. Досполова

УГЛЫ ГРАССМАНА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КОНУСОВ

§1. Введение

1.1. Внутренние объемы. Мы посвятим данный подраздел одному из центральных понятий в выпуклой геометрии – *внутренним объемам.*

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – непустое выпуклое компактное множество, $\dim K$ – размерность K. Хорошо известная теорема Штейнера (см., например, [18, соотношение 14.5]) утверждает, что объем λ-окрестности компакта K представляется многочленом от λ с коэффициентами $V_0(K), \dots, V_d(K)$, зависящими от множества K:

$$\mathrm{Vol}_d(K + \lambda \mathbb{B}^d) = \sum_{k=0}^{d} \kappa_{d-k} V_k(K) \lambda^{d-k}, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{1}$$

где через $\mathrm{Vol}_d(\cdot)$ обозначен объем (d-мерная мера Лебега), $\mathbb{B}^k$ – это k-мерный единичный шар и $\kappa_k := \mathrm{Vol}_k(\mathbb{B}^k) = \pi^{k/2}/\Gamma(\frac{k}{2}+1)$ – его объем. Коэффициенты $V_0(K), \dots, V_d(K)$ называются *внутренними объемами* K.

Известен эквивалентный способ определения внутренних объемов с помощью формулы Куботы [18, раздел 6.2] через средний объем проекции множества:

$$V_k(K) = \binom{d}{k} \frac{\kappa_d}{\kappa_k \kappa_{d-k}} \mathbf{E}\, \mathrm{Vol}_k(K | W_k),$$

где W_k обозначает k-мерное случайное линейное подпространство в $\mathbb{R}^d$, равномерно распределенное по мере Хаара на грассманиане всех

Ключевые слова: углы Грассмана, конусы, гауссовский образ, вероятность поглощения, внутренние объемы, теорема Судакова, теорема Цирельсона, GB-множество, изонормальный процесс.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2022-289.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

таких подпространств, и $K|W_k$ – это ортогональная проекция K на W_k.

При всех $k > \dim K$ можем положить $V_k(K) = 0$. Легко видеть [18, раздел 6.2], что $V_d(\cdot)$ – это d-мерный объем, $V_{d-1}(\cdot)$ – половина площади поверхности для d-мерных выпуклых компактов, $V_1(\cdot)$ – средняя ширина, с точностью до постоянного множителя, и $V_0(\cdot) \equiv 1$.

Вместе с тем из-за удобного подбора нормировки в формуле (1) внутренние объемы обладают еще одним примечательным свойством: они не зависят от размерности объемлющего пространства. Это означает, что при вложении K в $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant d$, внутренние объемы останутся такими же. Воспользовавшись этим свойством, Судаков [6] и Шеве [11] предложили следующее обобщение понятия внутреннего объема на случай бесконечномерного множества K. Пусть H – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, $K \subset H$ – непустое выпуклое множество. Тогда *внутренние объемы* $V_k(K), k = 0, 1, \dots,$ определяются формулой

$$V_k(K) = \sup_{K' \subset K} V_k(K') \in [0, \infty], \tag{2}$$

где супремум берется по всем конечномерным выпуклым компактным подмножествам K' в K.

Оказалось, что, помимо вышеприведенных определений, у внутренних объемов существует гауссовское представление, которое позволяет изучать их с вероятностной точки зрения. В следующем подразделе мы сформулируем хорошо известные результаты Судакова и Цирельсона о неожиданной и глубокой связи между внутренними объемами некоторых выпуклых компактов и гауссовскими процессами.

1.2. Теоремы Судакова и Цирельсона: гауссовское представление внутренних объемов. Будем называть центрированный гауссовский случайный процесс $(\xi(h))_{h \in H}$ на сепарабельном гильбертовом пространстве H *изонормальным*, если его ковариационная функция имеет вид

$$\operatorname{cov}(\xi(h), \xi(g)) = \langle h, g \rangle, \tag{3}$$

где $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение на H.

В работе [6, предложение 14] Судаковым была установлена связь между первым внутренним объемом и супремумом изонормального процесса.

Теорема 1 (Судаков). *Для выпуклого компакта $K \subset H$*

$$V_1(K) = \sqrt{2\pi}\,\mathbf{E} \sup_{h\in K} \xi(h).$$

Позже Цирельсон [9, теорема 6] представил обобщение теоремы 1. Пусть $\{\xi_i(h)\colon h \in H\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, обозначают k независимых копий изонормального процесса. Тогда k-*мерный спектр* выпуклого компактного множества $K \subset H$ определяется как случайное множество вида

$$\mathrm{Spec}_k K := \{(\xi_1(h), \dots, \xi_k(h))\colon h \in K\} \subset \mathbb{R}^k.$$

Будем называть GB-*множеством* подмножество K сепарабельного гильбертова пространства H, для которого существует модификация изонормального процесса с параметрическим множеством K, имеющая ограниченные почти наверное реализации.

Судаков показал [6, теорема 1], что GB-свойство для выпуклого K равносильно тому, что $V_1(K) < \infty$. В последнем случае $V_k(K) < \infty$ для всех $k = 0, 1, \dots$ (см., например, [11]).

Теорема 2 (Цирельсон). *Для выпуклого компактного GB-множества $K \subset H$ и всех $k = 0, 1, \dots,$*

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K).$$

Замечание 1. В случае, когда K является подмножеством d-мерного линейного пространства $H' \subset H$, отождествляя H' и $\mathbb{R}^d$, при $k \leqslant d$ мы можем переписать последнюю формулу в виде

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k(AK),$$

где A – стандартная гауссовская матрица размера $k \times d$ (то есть элементы A – независимые стандартные гауссовские случайные величины), $\mathrm{Spec}_k K = AK := \{Ax : x \in K\} \subset \mathbb{R}^k$.

Заметим, что в $\mathbb{R}^d$ для всех непустых выпуклых компактов $V_1(K) < \infty$, поэтому в конечномерном случае нет необходимости предполагать GB-свойство, так как оно заведомо выполнено.

Замечание 2. GB-свойство компакта K в общем случае гарантирует ограниченность и выпуклость почти наверное множества $\mathrm{Spec}_k K$ (см., например, [2, предложение 14]).

Замечание 3. Строго говоря, в теореме 1 нам требуется наличие *сепарабельной* модификации у процесса ξ, а в теореме 2 – так называемой *естественной* модификации у ξ_i. В этой работе мы не будем углубляться в данные понятия. Отметим лишь, что в условиях теорем 1, 2 соответствующие модификации действительно существуют. Подробности об упомянутых модификациях процессов и критерии их существования можно найти в [10, 4, 7] и в предыдущей работе [1, подразделы 3.3, 3.4] автора этой статьи.

Одна из основных целей данной работы – доказать конический аналог теоремы 2 для *углов Грассмана*, определенных в следующем подразделе.

1.3. Выпуклые конусы и углы Грассмана. Мы начнем этот подраздел с широко известного понятия телесного угла. Будем называть множество $C \subseteq \mathbb{R}^d$ *выпуклым конусом*, если C замкнуто, выпукло и для всех $x \in C$ и $\lambda \geqslant 0$ выполнено $\lambda x \in C$. Пусть U – это случайный вектор, выбранный согласно равномерному распределению на единичной сфере в линейной оболочке C ($U \in \operatorname{lin} C \cap \mathbb{S}^{d-1}$). *Телесный угол* выпуклого конуса $C \subseteq \mathbb{R}^d$ определяется равенством

$$\alpha(C) := \mathbf{P}[U \in C].$$

Будем обозначать размерность C через $\dim C$. Пусть W_1 – это случайная прямая в $\mathbb{R}^d$, проходящая через 0, выбранная по мере Хаара. Заметим, что если $C \subset \mathbb{R}^d$, $\dim C = d$ и $C \neq \mathbb{R}^d$, то телесный угол $\alpha(C)$ может быть посчитан как половина вероятности нетривиального пересечения W_1 с C, то есть

$$\alpha(C) = \frac{1}{2}\mathbf{P}[C \cap W_1 \neq \{0\}]. \tag{4}$$

Это наблюдение вдохновило Грюнбаума [14] на рассмотрение следующего обобщения телесного угла.

Пусть, как и раньше, W_j – это j-мерное случайное линейное подпространство в $\mathbb{R}^d$, выбранное по мере Хаара на грассманиане всех таких подпространств.

Определим *j-ый угол Грассмана* выпуклого конуса $C \subseteq \mathbb{R}^d$ как вероятность того, что W_{d-j} пересекает C нетривиальным образом:

$$\gamma_j(C) := \mathbf{P}[C \cap W_{d-j} \neq \{0\}], \quad j = 0, 1, \ldots, d.$$

Добавляя случай $C = \mathbb{R}^d$ к формуле (4), мы видим, что телесный угол конуса полной размерности можно выразить через γ_{d-1}:

$$\alpha(C) := \frac{1}{2}\gamma_{d-1}(C) + \frac{1}{2}\mathbb{1}[C = \mathbb{R}^d] = \frac{1}{2}\mathbf{P}[C \cap W_1 \neq \{0\}] + \frac{1}{2}\mathbb{1}[C = \mathbb{R}^d].$$

В работе [14] Грюнбаум показал, что углы Грассмана γ_j, как и внутренние объемы и телесные углы, не зависят от размерности объемлющего пространства: если вложить $C \subset \mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^N, N \geqslant d$, то значения γ_j не изменятся. В частности, для j-мерного линейного пространства $L_j \subseteq \mathbb{R}^d$, $j = 1, \ldots, d$, выполнено

$$\gamma_0(L_j) = \ldots = \gamma_{j-1}(L_j) = 1, \quad \gamma_j(L_j) = \ldots = \gamma_d(L_j) = 0.$$

Для $C = \{0\}$ имеем $\gamma_0(C) = \gamma_1(C) = \ldots = 0$.

Оказывается, что углы Грассмана являются коническими аналогами внутренних объемов. Вообще говоря, существуют по крайней мере два основных объекта с похожими свойствами, каждый из которых имеет право так называться: углы Грассмана и *конические внутренние объемы*. Известно, что эти два объекта связаны друг с другом линейным соотношением, см. [18, с. 261, формула Крофтона]. В то же время между ними есть существенное для нас различие: углы Грассмана обладают монотонностью относительно включения множеств, а конические внутренние объемы в общем случае – нет. В настоящей статье мы не будем определять конические внутренние объемы, а будем использовать только углы Грассмана. Для ознакомления с понятием конических внутренних объемов мы отсылаем читателя к [15, 18].

Далее мы обсудим два известных результата об углах Грассмана конечномерных выпуклых конусов.

1.4. Результаты Гётце, Каблучко и Запорожца: углы Грассмана и гауссовские преобразования. Гётце, Каблучко и Запорожец в [13, теорема 3.5] представили конечномерную коническую версию теоремы Цирельсона.

Как и выше, обозначим через A стандартную гауссовскую матрицу размера $k \times d$, где $k, d \in \mathbb{N}$.

Теорема 3 (Гётце, Каблучко, Запорожец)**.** *Пусть $C \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый конус, k – некоторое фиксированное натуральное число. Тогда размерность конуса AC с вероятностью 1 равна $m := \min(\dim C, k)$, и для всех $j = 0, \ldots, m-1$,*

$$\mathbf{E}[\gamma_j(AC)] = \gamma_j(C).$$

Наша первая задача состоит в том, чтобы обобщить теорему 3 на бесконечномерные конусы. Предварительно мы введем понятие угла Грассмана для этого случая.

Второй результат Гётце, Каблучко и Запорожца [13, теорема 3.1] связывает углы Грассмана конической оболочки множества с вероятностью поглощения нуля выпуклой оболочкой его гауссовского образа.

Обозначим через $\mathrm{Int}M$ внутренность множества $M \subset \mathbb{R}^d$, через $\mathrm{pos}(M)$ – *коническую оболочку* M, то есть наименьший выпуклый конус, содержащий M, а через $\mathrm{conv}(M)$ – *выпуклую оболочку* M, то есть наименьшее выпуклое множество, в котором содержится M (из контекста будет понятно, в каком пространстве рассматриваются приведенные характеристики).

Теорема 4 (Гётце, Каблучко, Запорожец)**.** *Пусть $k \in \mathbb{N}$ фиксировано, M – произвольное подмножество в $\mathbb{R}^d$, такое что* $\mathrm{pos}(M)$ *не является линейным подпространством. Тогда*

$$\gamma_k(\mathrm{pos}(M)) = \mathbf{P}[\mathrm{pos}(AM) = \mathbb{R}^k] = \mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \mathrm{conv}(AM)]. \tag{5}$$

Замечание 4. Если $M = C$ – выпуклый конус, не являющийся линейным подпространством, то формула (5) приобретает вид

$$\gamma_k(C) = \mathbf{P}[AC = \mathbb{R}^k] = \mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ AC].$$

Замечание 5. Если $M = L$ – линейное подпространство, то вместо (5) получаем

$$\gamma_{k-1}(L) = \mathbf{P}[AL = \mathbb{R}^k] = \begin{cases} 0, & \text{если } \dim L < k, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Наша вторая задача состоит в обобщении теоремы 4 на бесконечномерные множества.

В следующем разделе мы формулируем основные результаты данной работы.

§2. Основные результаты

Для того чтобы обобщить теоремы 3 и 4 на бесконечномерный случай, сначала зададим гауссовский изонормальный случайный процесс согласно Цирельсону [8]. Нам потребуется известное понятие ядра гауссовской меры; его определение и свойства см., например, в [5, глава 4], а также в [1, раздел 3].

Рассмотрим линейное топологическое пространство с центрированной гауссовой мерой (E, γ) и его ядро $E_0 \subset E$. Поскольку ядро является гильбертовым пространством, то на E_0 задано скалярное произведение, которое мы будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_0}$ (оно однозначно определяется мерой γ). Для каждого $\theta \in E_0$ линейный функционал $\langle \theta, \eta \rangle_{E_0}$ непрерывен по $\eta \in E_0$ и имеет единственное (с точностью до равенства почти всюду) продолжение до линейного измеримого по $x \in E$ функционала (см. [4, параграф 9, лемма 2] или [10, следствие 2.10.8]), которое мы обозначим через $\langle \theta, x \rangle$; более того,

$$\int\limits_E \langle \theta, x \rangle^2 \gamma(dx) = \|\theta\|^2 = \langle \theta, \theta \rangle.$$

Таким образом, для любого множества $K \subset E_0$ определен изонормальный гауссовский случайный процесс $\langle \theta, x \rangle$, где $\theta \in K$, x принадлежит пространству E с гауссовой мерой γ.

Для формулировок и доказательств основных результатов мы будем использовать ядро E_0 в качестве H и процесс $\langle \theta, \cdot \rangle$ в качестве изонормального процесса.

Теорему 2 для $k = 0, 1, \dots$ в обозначениях этого раздела можно переписать в виде

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k! \kappa_k} \int\limits_E \int\limits_E \dots \int\limits_E \mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k | K)) \gamma(dx_1) \dots \gamma(dx_k).$$

Здесь $K \subset E_0$ – выпуклый GB-компакт и

$$\mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k | K) := \{(\langle \theta, x_1 \rangle, \dots, \langle \theta, x_k \rangle) : \theta \in K\} \subset \mathbb{R}^k \qquad (6)$$

называется *совместным спектром* для $x_1, \dots, x_k \in E$ на K.

Теперь введем понятие угла Грассмана для бесконечномерных выпуклых конусов аналогично (2).

Будем называть *выпуклым конусом* или просто *конусом* непустое замкнутое выпуклое множество $C \subset H$, для которого $\lambda C \subseteq C$ при всех $\lambda \geqslant 0$ (здесь, как и прежде, H обозначает бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство).

Для $j = 0, 1, \dots,$ определим *j-ый угол Грассмана* конуса $C \subset H$ формулой

$$\gamma_j(C) := \sup_{C' \subset C} \gamma_j(C'), \qquad (7)$$

где супремум берется по всем $d \geqslant j$ и всем конечномерным выпуклым конусам $C' \subset C$, $\dim C' \leqslant d$.

Замечание 6. Поскольку углы Грассмана для конечномерных конусов монотонны относительно включения множеств и не зависят от размерности объемлющего пространства, то определение $\gamma_j(C)$ корректно.

Замечание 7. Достаточно рассматривать супремум в (7) только по многогранным конечномерным конусам. Конус называют *многогранным*, если он является пересечением конечного числа замкнутых полупространств, имеющих 0 на границе.

Доказательство замечания 7 приведено в разделе 3.

Под k-*мерным спектром* конуса C (и любого другого множества), как и в случае с компактом, мы понимаем следующее случайное множество:

$$\mathrm{Spec}_k C := \{(\xi_1(h), \ldots, \xi_k(h)) \colon h \in C\} \subset \mathbb{R}^k,$$

где ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, обозначают независимые копии изонормального процесса.

Будем говорить, что конус C является *GB_σ-конусом*, если C представляется в виде счетного объединения GB-множеств. В таком случае $\mathrm{Spec}_k C$ является почти наверное выпуклым конусом (см. [16, раздел 1.1.1] и [9]).

Теперь все готово для формулировки первого основного результата работы.

Теорема 5. *Пусть $C \subset E_0$ – GB_σ-конус, k – некоторое фиксированное натуральное число, $m := \min(\dim C, k) < \infty$. Тогда для всех $j = 0, \ldots, m-1$ имеем*

$$\mathbf{E}[\gamma_j(\mathrm{Spec}_k C)] = \gamma_j(C).$$

Замечание 8. По аналогии с замечанием 1, когда конус C является подмножеством d-мерного линейного пространства $H' \subset E_0$, мы можем отождествить H' с $\mathbb{R}^d$ и переписать последнюю формулу в виде

$$\mathbf{E}[\gamma_j(AC)] = \gamma_j(C),$$

где A – стандартная гауссовская матрица размера $k \times d$, $\mathrm{Spec}_k C = AC := \{Ax : x \in C\} \subset \mathbb{R}^k$.

GB_σ-свойство не нужно предполагать в конечномерном случае, поскольку, как уже отмечалось в замечании 1, для всех непустых конечномерных выпуклых компактов выполнено GB-свойство, а значит любой конечномерный конус является GB_σ-конусом.

Замечание 9. В общем случае GB_σ-свойство конуса C обеспечивает наличие ключевой для доказательства естественной модификации у изонормального процесса на C, упомянутой в замечании 3.

В следующем разделе представлено доказательство теоремы 5.

Перейдем к формулировке второго основного результата. Для обозначения внутренности, выпуклой и конической оболочек множества $M \subset E_0$ будем использовать те же обозначения, что и в конечномерном случае (см. подраздел 1.4).

Теорема 6. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ *фиксировано,* M *– произвольное подмножество в* E_0*, такое что* $\mathrm{pos}(M)$ *–* GB_σ*-конус, который не является линейным подпространством. Тогда*

$$\gamma_k(\mathrm{pos}(M)) = \mathbf{P}[\mathrm{pos}(\mathrm{Spec}_k M) = \mathbb{R}^k] = \mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \mathrm{conv}(\mathrm{Spec}_k M)]. \quad (8)$$

Замечание 10. Аналогично замечанию 4, для GB_σ-конуса C, не являющегося линейным подпространством, формула (8) упрощается:

$$\gamma_k(C) = \mathbf{P}[\mathrm{Spec}_k C = \mathbb{R}^k] = \mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \mathrm{Spec}_k C].$$

Замечание 11. Как и в замечании 5, для GB_σ-линейного подпространства L вместо (8) имеем

$$\gamma_{k-1}(L) = \mathbf{P}[\mathrm{Spec}_k L = \mathbb{R}^k] = \begin{cases} 0, & \text{если } \dim L < k, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Замечание 12. В случае конечномерного множества M, как отмечалось выше, предполагать GB_σ-свойство $\mathrm{pos}(M)$ не надо, поскольку оно заведомо выполнено, и (8) сводится к (5).

Доказательство теоремы 6 находится в разделе 4. Замечание 11 доказывается совершенно аналогичными рассуждениями.

Открытая проблема. Рассмотрим k-мерное стандартное броуновское движение на отрезке $[0, 1]$

$$\{X^{(k)}(t) = (W_1(t), \dots, W_k(t)) \colon t \in [0, 1]\},$$

где $W_1(t), \dots, W_k(t)$ – независимые копии винеровского процесса.

Зафиксируем момент времени $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$. Нас интересует следующий вопрос: какова вероятность того, что 0 лежит во внутренности выпуклой оболочки $\{X^{(k)}(t) \colon t \in [t_0, 1]\}$? Обозначим эту вероятность через

$$\mathbf{P}\left[0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv}\left(\{X^{(k)}(t) \colon t \in [t_0, 1]\}\right)\right].$$

В общем случае данный вопрос остается открытым.

Оказывается, что искомая вероятность связана с k-ым углом Грассмана некоторого конуса. Рассмотрим введенную Колмогоровым [3] *спираль Винера* S, которая определяется как множество функций вида

$$S := \{\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot) \colon t \in [0, 1]\} \subset L^2[0, 1].$$

Пусть $\overline{\operatorname{conv}}(S)$ обозначает замкнутую выпуклую оболочку S. В [12] доказано GB-свойство множества $\overline{\operatorname{conv}}(S)$. Спираль Винера является важным объектом функционального анализа [3].

Посмотрим на подмножество S_{t_0} спирали Винера S, имеющее вид

$$S_{t_0} := \{\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot) \colon t \in [t_0, 1]\} \subset L^2[0, 1].$$

Из определения S_{t_0} и свойства (3) изонормального процесса несложно понять, что $\operatorname{Spec}_k\overline{\operatorname{conv}}(S_{t_0})$ по распределению совпадает с выпуклой оболочкой k-мерного броуновского движения $\{X^{(k)}(t) \colon t \in [t_0, 1]\}$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}\left[0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv}\left(\{X^{(k)}(t) \colon t \in [t_0, 1]\}\right)\right] = \mathbf{P}\left[0 \in \operatorname{Int}\, \operatorname{Spec}_k\overline{\operatorname{conv}}(S_{t_0})\right].$$

По линейности изонормального процесса мы можем поменять в последнем выражении $\overline{\operatorname{conv}}$ и Spec_k местами (см. [2, предложение 13] или [16, раздел 1.1.1], [9]), а затем применить теорему 6:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv}\left(\{X^{(k)}(t) \colon t \in [t_0, 1]\}\right)\right] &= \mathbf{P}\left[0 \in \operatorname{Int}\, \operatorname{Spec}_k\overline{\operatorname{conv}}(S_{t_0})\right] \\ &= \mathbf{P}\left[0 \in \operatorname{Int}\, \operatorname{conv}(\operatorname{Spec}_k S_{t_0})\right] = \gamma_k(\operatorname{pos}(S_{t_0})).\end{aligned}$$

Тем самым, данная проблема сводится к нахождению k-ого угла Грассмана бесконечномерного конуса $\operatorname{pos}(S_{t_0})$.

§3. Доказательство замечания 7 и теоремы 5

На протяжении всего данного раздела мы будем использовать следующие обозначения:

- как и прежде, коническую оболочку множества F мы будем обозначать через
$$\operatorname{pos}(F) := \{\lambda x : x \in \overline{\operatorname{conv}}(F), \lambda \geqslant 0\},$$
где $\overline{\operatorname{conv}}(F)$ – замкнутая выпуклая оболочка F. Также для удобства коническая оболочка векторов $v_1, \ldots, v_l$ будет обозначаться $\operatorname{pos}(v_1, \ldots, v_l)$.
- $\operatorname{lin} F$ – линейная оболочка F;
- d_H обозначает метрику Хаусдорфа на сфере;
- будем писать $x \perp y$, если векторы x и y ортогональны;
- $\langle x, y\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов x, y, при этом $\|x\|$ – это норма x. Далее из контекста будет ясно, в каком пространстве рассматриваются скалярное произведение и норма.

Для того чтобы доказать замечание 7 и теорему 5, нам понадобятся два утверждения.

Утверждение 1. *Пусть конусы $C, \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}^d$ таковы, что при $n \to \infty$*
$$C_n \cap \mathbb{S}^{d-1} \to C \cap \mathbb{S}^{d-1}$$
в метрике Хаусдорфа d_H на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда для $j = 0, 1, \ldots, d$ при $n \to \infty$ имеем
$$\gamma_j(C_n) \to \gamma_j(C).$$

Замечание 13. Данное утверждение не является новым, см. [15, предложение 8.2], [18, теорема 6.5.2(b)]. В [15] было показано, что конические внутренние объемы, упомянутые во введении, являются непрерывными относительно так называемой *конической метрики Хаусдорфа*. Из этого факта следует утверждение 1. Для удобства читателя ниже мы приведем альтернативное доказательство утверждения 1 без использования понятия конических внутренних объемов.

Доказательство утверждения 1. Введем следующие обозначения (см. рис. 1):
$$S = C \cap \mathbb{S}^{d-1}, \ S_n = C_n \cap \mathbb{S}^{d-1}.$$
Положим $d_H(S_n, S) = \varepsilon_n$. Нам нужно доказать, что
$$|\mathbf{P}[C_n \cap W_{d-j} \neq \{0\}] - \mathbf{P}[C \cap W_{d-j} \neq \{0\}]| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Данный факт будет следовать из двух сходимостей ниже:

$$\mathbf{P}[C_n \cap W_{d-j} \neq \{0\}, C \cap W_{d-j} = \{0\}] \to 0, \qquad n \to \infty;$$
$$\mathbf{P}[C_n \cap W_{d-j} = \{0\}, C \cap W_{d-j} \neq \{0\}] \to 0, \qquad n \to \infty.$$

При $j = d$ утверждение 1 тривиально. Если $j = d - 1$, то утверждение равносильно сходимости меры Лебега на S_n к мере Лебега на S. Для оставшихся случаев будем применять индукцию по разности $d - j$.

Обозначим через $G_{j'}(H_\star)$ грассманиан всех j'-мерных линейных подпространств аффинного пространства $H_\star$ с началом координат в $\star$. Тогда меру Хаара $\mathbf{P}$ нужных нам событий (при $j < d - 1$) можно представить в виде (см., например, [18, теорема 7.1.1]):

$$\mathbf{P}[C_n \cap W_{d-j} \neq \{0\}, C \cap W_{d-j} = \{0\}] \tag{9}$$
$$= \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \int\limits_{G_{d-j-1}(H_x)} \mathbb{1}[C_n \cap W_{d-j-1}(H_x) \neq \varnothing, C \cap W_{d-j-1}(H_x) = \varnothing]\, d\mu\, dx,$$

и

$$\mathbf{P}[C_n \cap W_{d-j} = \{0\}, C \cap W_{d-j} \neq \{0\}]$$
$$= \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \int\limits_{G_{d-j-1}(H_x)} \mathbb{1}[C_n \cap W_{d-j-1}(H_x) = \varnothing, C \cap W_{d-j-1}(H_x) \neq \varnothing]\, d\mu\, dx,$$

где H_x обозначает гиперплоскость $\{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y\rangle = 1\}$ с началом координат в x, через dx обозначена нормированная мера Лебега на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ и через $d\mu$ – мера Хаара на $G_{d-j-1}(H_x)$.

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости достаточно доказать, что для почти всех $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ внутренние интегралы в (9) стремятся к 0, когда n стремится к ∞. Для $x \in \mathrm{Int} S$ (здесь $\mathrm{Int} S$ – это внутренность множества S в стандартной топологии на сфере) это тривиально, поскольку $x \in S_n$ при достаточно больших n. Множество таких x, что $x \in S \setminus \mathrm{Int} S$, имеет нулевую меру Лебега. Следовательно, далее мы можем считать, что $x \notin S$ и $x \notin S_n$ при достаточно больших n.

Рассмотрим множества

$$B_x = C \cap H_x \quad \text{и} \quad B_{x,n} = C_n \cap H_x.$$

Пусть $\Pi_x : H_x \to \mathbb{S}^{d-2}(H_x)$ обозначает проекцию на единичную сферу в H_x, то есть отображение вида $x + h \mapsto x + \frac{h}{\|h\|}$ для $h \perp x$. Легко видеть, что совпадают следующие события:

$$\{C \cap W_{d-j-1}(H_x) = \varnothing\} = \{B_x \cap W_{d-j-1}(H_x) = \varnothing\}$$
$$= \{\Pi_x B_x \cap W_{d-j-1}(H_x) = \varnothing\} = \{\mathrm{pos}_{H_x}(\Pi_x B_x) \cap W_{d-j-1}(H_x) = \{x\}\},$$

где через pos_{H_x} обозначается коническая оболочка в H_x. Аналогично, для C_n имеем

$$\{C_n \cap W_{d-j-1}(H_x) \neq \varnothing\} = \{B_{x,n} \cap W_{d-j-1}(H_x) \neq \varnothing\}$$
$$= \{\Pi_x B_{x,n} \cap W_{d-j-1}(H_x) \neq \varnothing\} = \{\mathrm{pos}_{H_x}(\Pi_x B_{x,n}) \cap W_{d-j-1}(H_x) \neq \{x\}\}.$$

Таким образом, нам нужно показать, что для почти всех $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ выполнено:

$$\mu\,[\Pi_x B_{x,n} \cap W_{d-j-1}(H_x) \neq \varnothing, \Pi_x B_x \cap W_{d-j-1}(H_x) = \varnothing] \to 0 \quad \text{при } n \to \infty;$$
$$\mu\,[\Pi_x B_{x,n} \cap W_{d-j-1}(H_x) = \varnothing, \Pi_x B_x \cap W_{d-j-1}(H_x) \neq \varnothing] \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Последнее будет следовать из сходимости

$$\Pi_x B_{x,n} \to \Pi_x B_x \quad \text{при } n \to \infty$$

в метрике Хаусдорфа на H_x по предположению индукции. Сначала покажем, что $\Pi_x B_{x,n}$ является подмножеством малой окрестности $\Pi_x B_x$. Рассмотрим точку $p \in \Pi_x B_{x,n}$. Мы хотим найти точку $p' \in \Pi_x B_x$, близкую к p. По определению Π_x и метрики Хаусдорфа существуют $q \in S$, $\lambda > 0$ и $v \in \mathbb{B}^d$, такие что $\lambda(q + \varepsilon_n v) \in H_x$ и $\Pi_x(\lambda q + \lambda\varepsilon_n v) = p$. Представляя q, v в виде $q = \alpha x + h$ и $v = \alpha_v x + h_v$, где $\alpha, \alpha_v \in \mathbb{R}$, $h, h_v \perp x$, получаем

$$p = \Pi_x(\lambda q + \lambda\varepsilon_n v) = \Pi_x(\lambda(\alpha x + h) + \lambda\varepsilon_n(\alpha_v x + h_v)) = x + \frac{h + \varepsilon_n h_v}{\|h + \varepsilon_n h_v\|}.$$

Заметим, что $\alpha + \varepsilon_n \alpha_v > 0$, поскольку $\lambda > 0$ и коэффициент при x равен $\lambda(\alpha + \varepsilon_n\alpha_v) = 1$. Следовательно, $-\alpha < \varepsilon_n \alpha_v \leqslant \varepsilon_n$.

Если $\alpha > 0$, то $\frac{1}{\alpha} q = x + \frac{h}{\alpha} \in B_x$, и мы полагаем

$$p' = x + \frac{h}{\|h\|} \in \Pi_x B_x.$$

Так как $x \notin S$, то $\inf_{q \in S} \|h\| > 0$. Тем самым, $\|p - p'\| = O(\varepsilon_n)$, потому что проекция Π_x является $\frac{1}{r}$-липшицевой на множествах вида $\{x + h \colon \|h\| > r\}$ для всех $r > 0$.

Случай $\alpha < 0$ немного сложнее.

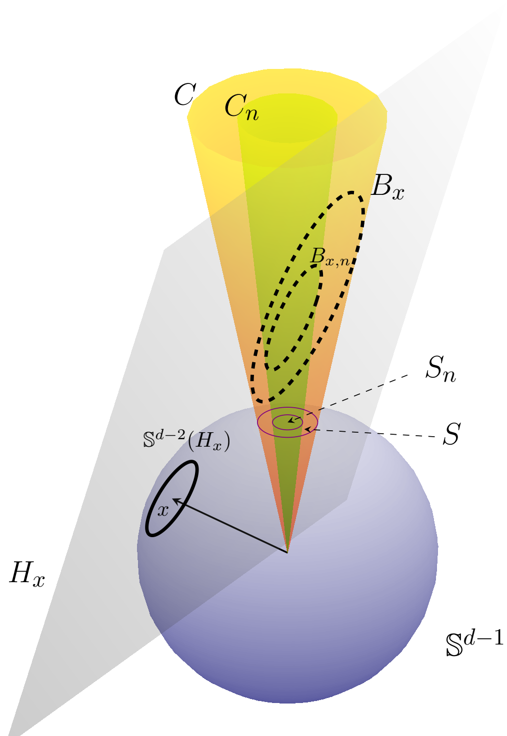

Рис. 1. Иллюстрация к доказательству утверждения 1.

Пусть найдется такая точка $q_x \in S$, что $\Delta = \langle q_x, x\rangle > 0$. Положим $\varepsilon_n' = \frac{\varepsilon_n}{\Delta}$. Существует вектор $h_x \perp x$, для которого $q_x = \Delta x + h_x$. Пусть

$$q' = (1-\varepsilon_n')q + \varepsilon_n' q_x = ((1-\varepsilon_n')\alpha + \Delta\varepsilon_n')x + (1-\varepsilon_n')h + \varepsilon_n' h_x.$$

Ясно, что $\alpha' := (1-\varepsilon_n')\alpha + \Delta\varepsilon_n' > \alpha + \Delta\varepsilon_n' \geqslant 0$ при достаточно малых ε_n. Таким образом, $\frac{1}{\alpha'}q' \in B_x$, и мы полагаем

$$p' = x + \frac{h + \varepsilon_n'(h_x - h)}{\|h + \varepsilon_n'(h_x - h)\|} \in \Pi_x B_x.$$

Аналогично предыдущему случаю, мы получаем равномерную оценку $\|p - p'\| = O(\varepsilon_n)$.

Если $\langle q, x\rangle < 0$ для всех $q \in S$, то при всех достаточно больших n имеем $\Pi_x B_{x,n} = \Pi_x B_x = \varnothing$. Следовательно, нам осталось разобрать случай, когда $\sup_{q\in S}\langle q, x\rangle = 0$. Множество таких точек x имеет меру 0, поэтому его можно отбросить.

Для того чтобы показать, что $\Pi_x B_x$ является подмножеством малой окрестности $\Pi_x B_{x,n}$, мы повторяем приведенные выше рассуждения. Для точки $p \in \Pi_x B_x$ выберем $q_n \in S_n$, $\lambda_n \geqslant 0$ и $v_n \in \mathbb{B}^d$, такие что $\lambda(q_n + \varepsilon_n v_n) \in H_x$ и $\Pi_x(\lambda_n q_n + \lambda_n \varepsilon_n v_n) = p$. Все константы в $O(\varepsilon_n)$ зависят только от $\inf_{q\in S_n}\|h\|$, который равномерно ограничен для всех S_n при достаточно больших n. Таким образом, будут справедливы те же оценки. □

Доказательство замечания 7. Пусть $\{C'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность многогранных конечномерных конусов, аппроксимирующих произвольный конечномерный конус C': $C'_1 \subset C'_2 \subset \ldots \subset C'$, $\cup_{n=1}^{\infty} C'_n \subset C'$. Если $\dim C' = d$, то

$$C'_n \cap \mathbb{S}^{d-1} \to C' \cap \mathbb{S}^{d-1}, \quad n \to \infty,$$

в метрике Хаусдорфа d_H на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда по утверждению 1

$$\gamma_j(C'_n) = \mathbf{P}[C'_n \cap W_{d-j} \neq \{0\}] \to \gamma_j(C') = \mathbf{P}[C' \cap W_{d-j} \neq \{0\}] \text{ при } n \to \infty.$$

Тем самым, супремум в (7) достаточно брать по многогранным конечномерным конусам. □

Утверждение 2. *Пусть конечномерные конусы $C_n \subset E_0$, $n \in \mathbb{N}$: $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C$ аппроксимируют конус $C \subset E_0$ изнутри: $\cup_{n=1}^{\infty} C_n$ плотно в C. Тогда*

$$\gamma_j(\operatorname{pos}(\cup_{n=1}^{\infty} C_n)) = \gamma_j(C).$$

Доказательство утверждения 2. Понятно, что $\gamma_j(\operatorname{pos}(\cup_{n=1}^{\infty} C_n)) \leqslant \gamma_j(C)$, поскольку $\cup_{n=1}^{\infty} C_n \subset C$ и углы Грассмана монотонны. Покажем, что

$$\gamma_j(\operatorname{pos}(\cup_{n=1}^{\infty} C_n)) \geqslant \gamma_j(C).$$

По определению,

$$\gamma_j(C) = \sup_{C'\subset C} \mathbf{P}[C' \cap W_{d-j} \neq \{0\}],$$

где супремум можно брать только по многогранным конечномерным конусам (см. замечание 7). Поэтому достаточно для каждого конечномерного многогранного конуса $C' \subset C$, $d := \dim C'$, доказать, что

$$\gamma_j(C') = \mathbf{P}[W_{d-j} \cap C' \neq \{0\}] \leqslant \gamma_j(\mathrm{pos}(\cup_{n=1}^{\infty} C_n)).$$

Так как конус C' является многогранным, существуют единичные векторы $v_1, \dots, v_l \in \mathrm{lin}\, C'$, такие что $C' = \mathrm{pos}(v_1, \dots, v_l)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\cup_{n=1}^{\infty} C_n$ плотно в C, для каждого вектора v_i найдется единичный вектор $u_i \in \cup_{n=1}^{\infty} C_n$, такой что $d_H(u_i, v_i) < \varepsilon$. Следовательно, конусы $C'_\varepsilon = \mathrm{pos}(u_1, \dots, u_l)$ и C' близки, то есть $d_H(C'_\varepsilon \cap \mathbb{S}(E_0), C' \cap \mathbb{S}(E_0)) < \varepsilon$, где $\mathbb{S}(E_0)$ обозначает единичную сферу в E_0. Пусть ε_k – последовательность положительных чисел, такая что $\lim \varepsilon_k = 0$ при $k \to \infty$. Мы хотим использовать утверждение 1, чтобы показать, что $\lim_{k\to\infty} \gamma_j(C'_{\varepsilon_k}) = \gamma_j(C')$. Для этого формально нам нужно поместить все конусы C'_{ε_k} и C' в одно общее конечномерное пространство.

Заметим, что $\dim C'_\varepsilon \leqslant l$ для всех ε, а значит $\dim \mathrm{lin}(C'_\varepsilon \cup C') \leqslant d + l$. Таким образом, для каждого ε существует линейное подпространство $U_\varepsilon \subset E_0$, $\dim U_\varepsilon = d + l$, такое что $C'_\varepsilon \cup C' \subset U_\varepsilon$. Представим U_ε в виде суммы ортогональных подпространств: $U_\varepsilon = \mathrm{lin}\, C' \oplus V_\varepsilon$. Теперь зафиксируем $(d+l)$-мерное пространство $\mathbb{R}^{d+l} = \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^l$ и изометрию $\mathcal{I}$ между $\mathrm{lin}\, C'$ и $\mathbb{R}^d$. Пусть $\mathcal{J}_\varepsilon \colon U_\varepsilon \to \mathbb{R}^{d+l}$ – изометрический оператор, такой что $\mathcal{J}_\varepsilon$ совпадает с $\mathcal{I}$ на $\mathrm{lin}\, C'$. Тогда

$$\gamma_j(C') = \gamma_j(\mathcal{I}C'),\ \gamma_j(C'_\varepsilon) = \gamma_j(\mathcal{J}_\varepsilon C'_\varepsilon),$$

и

$$d_H(C'_\varepsilon \cap \mathbb{S}(E_0), C' \cap \mathbb{S}(E_0)) = d_H(\mathcal{J}_\varepsilon C'_\varepsilon \cap \mathbb{S}^{d+l-1}, \mathcal{I}C' \cap \mathbb{S}^{d+l-1}).$$

Следовательно, $\mathcal{J}_{\varepsilon_k} C'_{\varepsilon_k} \to \mathcal{I}C'$ при $k \to \infty$, и мы можем применить утверждение 1. Получаем

$$\gamma_j(C') = \gamma_j(\mathcal{I}C') = \lim_{k\to\infty} \gamma_j(\mathcal{J}_{\varepsilon_k} C'_{\varepsilon_k}) = \lim_{k\to\infty} \gamma_j(C'_{\varepsilon_k}).$$

В заключение доказательства утверждения 2 заметим, что

$$C'_\varepsilon \subset \mathrm{pos}(\cup_{n=1}^{\infty} C_n)$$

для любого $\varepsilon > 0$, а значит $\gamma_j(C'_\varepsilon) \leqslant \gamma_j(\mathrm{pos}(\cup_{n=1}^{\infty} C_n))$. □

Вернемся к доказательству теоремы 5.

Для конусов C, таких что $\dim C < \infty$, эта теорема доказана в [13, теорема 3.5]. Остается проверить случай $\dim C = \infty$. Аппроксимируем конус C изнутри конечномерными конусами C_n, $n \in \mathbb{N}$: $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C$, $\cup_{n=1}^{\infty} C_n$ плотно в C.

Мы будем опираться на те же аргументы, которые применялись в работе [1] при доказательстве обобщения теоремы Цирельсона на случай смешанных объемов (см. [1, подраздел 2.1 и параграф 5]).

Аналогично (6), через

$$\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k | C) := \{(\langle \theta, x_1 \rangle, \ldots, \langle \theta, x_k \rangle) : \theta \in C\} \subset \mathbb{R}^k$$

обозначим *совместный спектр* для $x_1, \ldots, x_k \in E$ на C. Нам потребуется следующий факт.

Утверждение 3. *Пусть $C \subset E_0$ – выпуклый GB_σ-конус. Если $C_0 \subset C$ плотно в C, то множество* $\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k | C_0)$ *плотно в* $\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k | C)$ *для почти всех $(x_1, \ldots, x_k)$.*

Приведенное утверждение для произвольных GB_σ-множеств сформулировано у Цирельсона в [9, следствие 3] и доказано для выпуклых GB-компактов в [1, следствие 1]. Доказательство следствия 1 в [1] не использует компактность GB-множества K, ключевым фактором является наличие естественной модификации у процесса $\langle \theta, x \rangle$ на K. Известно [7, теорема 3], что GB_σ-свойство множества в сепарабельном гильбертовом пространстве равносильно существованию естественной модификации у гауссовского процесса на этом множестве. Поэтому можно повторить доказательство следствия 1 в [1] для выпуклых GB_σ-конусов C.

Таким образом, используя утверждение 3, получаем, что почти наверное $\cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k | C_n)$ плотно в $\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k | C)$.

Тем самым,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\gamma_j(\mathrm{Spec}_k C)] &= \mathbf{E}[\gamma_j(\mathrm{pos}(\cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Spec}_k C_n))] = \mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} \gamma_j(\mathrm{Spec}_k C_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[\gamma_j(\mathrm{Spec}_k C_n)] = \lim_{n\to\infty} \gamma_j(C_n) = \gamma_j(\mathrm{pos}(\cup_{n=1}^{\infty} C_n)) = \gamma_j(C). \end{aligned}$$

Здесь первое и последнее равенства выполняются по утверждению 2, второе и пятое – по утверждению 1 и определению угла Грассмана (7). В третьем равенстве мы используем теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Наконец, четвертое равенство – это утверждение теоремы для конечномерных конусов C_n.

Доказательство теоремы 5 завершено. $\square$

§4. Доказательство теоремы 6

Для конечномерных множеств M теорема доказана (см. теорему 4). Нам остается разобрать случай бесконечномерного M.

По определению угла Грассмана (7) имеем

$$\gamma_k(\mathrm{pos}(M)) := \sup_{C'\subset \mathrm{pos}(M)} \gamma_k(C') = \sup_{C'\subset \mathrm{pos}(M)} \mathbf{P}[C'\cap W_{d-k} \neq \{0\}],$$

где супремум берется по всем $d \geqslant k$ и всем конечномерным выпуклым конусам $C' \subset \mathrm{pos}(M),\ \dim C' \leqslant d$.

Рассмотрим последовательность конечномерных конусов $C_n,\ n \in \mathbb{N}$, не являющихся линейными подпространствами и аппроксимирующих конус $\mathrm{pos}(M)$ изнутри : $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset \mathrm{pos}(M),\ \cup_{n=1}^{\infty} C_n$ плотно в $\mathrm{pos}(M)$. По теореме 4 для конусов C_n,

$$\gamma_k(C_n) = \mathbf{P}[\mathrm{Spec}_k C_n = \mathbb{R}^k] = \mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \mathrm{Spec}_k C_n]. \tag{10}$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ в последнем равенстве. Проводя те же самые рассуждения, что в доказательстве теоремы 5, слева в пределе мы получим $\gamma_k(\mathrm{pos}(M))$. Справа по непрерывности вероятности при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \mathrm{Spec}_k C_n] \to \mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Spec}_k C_n].$$

Как обсуждалось в доказательстве теоремы 5, для GB_σ-конуса $\mathrm{pos}(M)$ почти наверное $\cup_{n=1}^{\infty}\mathrm{Spec}_k C_n$ плотно в $\mathrm{Spec}_k\, \mathrm{pos}(M)$, поэтому

$$\mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Spec}_k C_n] = \mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \mathrm{Spec}_k\, \mathrm{pos}(M)],$$

так как внутренность выпуклого конечномерного множества совпадает с внутренностью его замыкания (см., например, [17, теорема 1.1.15]). Далее, по свойству линейности изонормального процесса pos и Spec_k можно поменять местами (см. [16, раздел 1.1.1] и [9]), следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \mathrm{Spec}_k\, \mathrm{pos}(M)] &= \mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \mathrm{pos}(\mathrm{Spec}_k M)] \\ &= \mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \mathrm{conv}(\mathrm{Spec}_k M)].\end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \mathrm{conv}(\mathrm{Spec}_k M)] = \mathbf{P}[\mathrm{pos}(\mathrm{Spec}_k M) = \mathbb{R}^k],$$

см., например, [13, следствие 5.3].

Таким образом, предельное равенство имеет вид

$$\gamma_k(\mathrm{pos}(M)) = \mathbf{P}[\mathrm{pos}(\mathrm{Spec}_k M) = \mathbb{R}^k] = \mathbf{P}[0 \in \mathrm{Int}\ \mathrm{conv}(\mathrm{Spec}_k M)].$$

Теорема 6 доказана. □

Благодарности. Автор благодарит Дмитрия Запорожца за внимание к настоящей работе и полезные обсуждения.

Список литературы

1. М. К. Досполова, *Смешанный объем бесконечномерных выпуклых компактов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **510** (2022), 98–123.
2. Д. Н. Запорожец, *Нули случайных полиномов, распределение алгебраических чисел и выпуклые оболочки случайных процессов.* Докторская диссертация, С.-Петерб. отд-ние Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН (2017).
3. А. Н. Колмогоров, *Математика и механика: избранные труды*, Наука (1985).
4. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции.* Киев, Издательство ТВиМС (1995).
5. М. А. Лифшиц, *Лекции по гауссовским процессам.* Издательство Лань (2016).
6. В. Н. Судаков, *Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.* — Труды МИАН **141** (1976), 3–191.
7. Б. С. Цирельсон, *Естественная модификация случайного процесса и ее приложение к случайным функциональным рядам и гауссовским мерам.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **55** (1976), 35–63.
8. Б. С. Цирельсон, *Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига.* I. — Теория вероятн. и ее примен. **27**, No. 2 (1982), 388–395.
9. Б. С. Цирельсон, *Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига.* II. — Теория вероятн. и ее примен. **30**, No. 4 (1985), 772–779.
10. V. I. Bogachev, *Gaussian measures*, vol. **62** of *Math. Surveys Monogr.* Amer. Math. Soc., Providence, RI (1998).
11. S. Chevet, *Processus Gaussiens et volumes mixtes.* — Z. für Wahrscheinlichkeitstheor Verw. Gebiete **36**, No. 1 (1976), 47–65.
12. F. Gao, R. A. Vitale, *Intrinsic volumes of the Brownian motion body.* — Discrete Comput. Geom. **26**, No. 1 (2001), 41–50.
13. F. Götze, Z. Kabluchko, D. N. Zaporozhets, *Grassmann angles and absorption probabilities of Gaussian convex hulls.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **501** (2021), 126–148.
14. B. Grünbaum, *Grassmann angles of convex polytopes.* — Acta Math. **121** (1968), 293–302.
15. M. B. McCoy, J. A. Tropp, *From Steiner formulas for cones to concentration of intrinsic volumes.* — Discrete Comput. Geom. **51**, No. 4 (2014), 926–963.
16. D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics.* Probab. Appl. Springer, Berlin, 2nd ed. (2006).
17. R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn–Minkowski Theory.* Vol. 151, *Encyclopedia Math. Appl.*, Cambridge, Cambridge University Press, expanded edition (2014).
18. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry.* Probab. Appl. (N. Y.), Berlin, Springer (2008).

Dospolova M. K. Grassmann angles of infinite-dimensional cones.

In 1985, B. S. Tsirelson discovered a deep connection between Gaussian processes and important geometric characteristics of a convex compact sets in an infinite-dimensional separable Hilbert space, called intrinsic volumes. F. Götze, Z. Kabluchko and D. N. Zaporozhets in their recent work (2021) presented a conic version of Tsirelson's theorem for Grassmann angles of finite-dimensional cones, which are analogues of intrinsic volumes, and also proved a theorem on the connection between the Grassmann angles of a positive hull of a set and the absorption probability of the convex hull of its Gaussian image. In this paper we prove a generalizations of the latter results to the case of infinite-dimensional cones in a separable Hilbert space.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский международный
математический институт им. Леонарда
Эйлера (Математический центр),
Россия
E-mail: dospolova.maria@yandex.ru

Поступило 17 октября 2023 г.