Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 525, 2023 г.

А. Н. Бородин

ЛОКАЛЬНОЕ ВРЕМЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА БЕССЕЛЕВСКОГО ПРОЦЕССА В МОМЕНТ, ОБРАТНЫЙ К ЛОКАЛЬНОМУ ВРЕМЕНИ

Эта работа продолжает исследование, начатое в [1] и [2]. Рассматривается трехмерный бесселевский процесс и его локальное время в момент, обратный к локальному времени. Согласно описанию Рэя–Найта, локальное время диффузии в некотором условном вероятностном пространстве является по пространственной переменной марковским процессом (см. [3, 4]). Этот процесс на определенных интервалах изменения пространственной переменной выражается через квадраты бесселевских процессов (см., например, гл. V из [5]). У этих диффузий существует локальное время. Таким образом, мы приходим к определению локального времени от исходного локального времени. Такой процесс мы будем называть локальным временем второго порядка. Впервые этот процесс рассматривался нами в препринте [6].

1. Локальное время – диффузионный процесс

Пусть $R(t)$ – трехмерный бесселевский процесс, т.е. радиальная часть трехмерного стандартного броуновского движения, $R(0) = 0$.

Бесселевским локальным временем называется предел

$$\ell(t, y) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[y, y+\varepsilon)}(R(s))\, ds,$$

который существует с вероятностью единица для $(t, y) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$. Этот процесс с вероятностью единица непрерывен по паре переменных. Дадим описание для бесселевского локального времени в момент, обратный к локальному времени на некотором уровне. Рассмотрим

$$\varrho(v, z) = \min\{s : \ell(s, z) = v\}$$

Ключевые слова: бесселевское локальное время, момент, обратный к локальному времени, локальное время второго порядка, распределение локального времени.

– момент обратный к локальному времени на уровне z, где $(v,z) \in [0,\infty) \times (0,\infty)$. В этом параграфе дается описание броуновского локального времени $\ell(t,y)$ как процесса по y в момент $t = \varrho(v,z)$. Ясно, что в этот момент траектория процесса R останавливается в точке z, т.е. $R(\varrho(v,z)) = z$, так как $\varrho(v,z)$ будет точкой роста локального времени $\ell(t,z)$.

Теорема 1.1. *Процесс $\ell(\varrho(v,z),q)$, $q \in (0,\infty)$, при условии $\varrho(v,z) < \infty$ является марковским и представим в виде*

$$\ell(\varrho(v,z),q) = \begin{cases} V_1(q-z) & \text{при } z \leqslant q, \\ V_2(z-q) & \text{при } 0 \leqslant q \leqslant z, \end{cases} \tag{1.1}$$

где производящие операторы процессов V_k, $k = 1,2$, имеют вид

$$\mathbf{L}_1 = 2v\frac{d^2}{dv^2}, \qquad \mathbf{L}_2 = 2v\frac{d^2}{dv^2} + 2\Big(1 - \frac{v}{z-h}\Big)\frac{d}{dv}. \tag{1.2}$$

Замечание 1.1. Производящим операторам (1.2) соответствуют процессы

$$V_1(h) = \big(R^{(0)}(h)\big)^2, \quad h \in [0,\infty),$$

$$V_2(h) = (z-h)^2\Big(R^{(2)}\Big(\frac{1}{z-h}\Big)\Big)^2, \quad h \in [0,z),$$

где $R^{(0)}(t)$ и $R^{(2)}(t)$, $t \geqslant 0$, – независимые бесселевские процессы размерностей 0 и 2 соответственно, $V_1(0) = v$, $V_2(0) = v$.

Замечание 1.2. Известно, что 0-мерный бесселевский процесс будучи непрерывным стартует из положительного значения, с вероятностью единица попадает в нуль и из нуля уже не выходит, т.е. остается равным нулю. Это относится и к процессу $V_1(h)$, $h \geqslant 0$.

Замечание 1.3. Нетрудно проверить, что процесс $V_2(h)$, $h \in [0,z)$, удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dV_2(h) = 2\sqrt{V_2(h)}dW(h) + 2\Big(1 - \frac{V_2(h)}{z-h}\Big)dh, \qquad V_2(0) = v, \tag{1.3}$$

что соответствует производящему оператору $\mathbf{L}_2$.

Замечание 1.4. В силу свойств бесселевского процесса $R^{(2)}$ процесс $V_2(h)$ при $h \in [0,z)$ является с вероятностью единица строго положительным непрерывным процессом, и $\lim\limits_{h\downarrow z} V_2(h) = 0$.

Доказательство теоремы 1.1. Обозначим

$$A_{\vec\beta}(t) := \int\limits_0^t f(R(s))\,ds + \sum_{k=1}^m \beta_k \ell(t, q_k),$$

где $f(x)$, $x \in [0,\infty)$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, $\beta_k \geqslant 0$, $k = 1, \dots, m$.

Пусть $\varphi(x)$, $x > 0$, – убывающее, а $\psi(x)$, $x > 0$, – возрастающее неотрицательные непрерывные линейно независимые решения задачи

$$\frac{1}{2}\phi''(x) - f(x)\phi(x) = 0, \qquad x \in (0,\infty) \setminus \{q_1, \dots, q_m\}, \tag{1.4}$$

$$\phi'(q_k + 0) - \phi'(q_k - 0) = 2\beta_k \phi(q_k), \qquad k = 1, \dots, m. \tag{1.5}$$

Кроме того,

$$\psi(+0) = 0. \tag{1.6}$$

Пусть $w = \psi'(x)\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x)$, $x \neq q_k$, $k = 1, \dots, m$, – вронскиан, являющийся постоянной величиной.

Для того, чтобы упростить формулы, в дальнейшем мы будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$.

Доказательство марковости процесса $\ell(\varrho(v,z), y)$, $y \in (0,\infty)$, осуществляется аналогично тому как это сделано для броуновского локального времени в гл. V из [5], и мы его приводить не будем. В основе доказательства лежит следующий результат.

Теорема 1.2. *Пусть* $f(x), x \in [0,\infty)$, *– кусочно непрерывная функция. Тогда при* $q_1 = z$ *функция*

$$d(v,x) := \mathbf{E}_x\Big\{\exp(-A_{\vec\beta}(\varrho(v,z));\ \varrho(v,z) < \infty\Big\}$$

может быть представлена в следующем виде:

$$d(v,x) = \begin{cases} \dfrac{z\psi(x)}{x\psi(z)} \exp\Big(-\dfrac{wt}{2\varphi(z)\psi(z)}\Big), & 0 < x \leqslant z, \\ \dfrac{z\varphi(x)}{x\varphi(z)} \exp\Big(-\dfrac{wt}{2\varphi(z)\psi(z)}\Big), & z \leqslant x, \end{cases} \tag{1.7}$$

где φ, ψ *– решения задачи* (1.4), (1.5) *и* ψ *удовлетворяет* (1.6).

Здесь нижний индекс x у математического ожидания обозначает начальное значение процесса R. Эта теорема доказывается аналогично тому, как это сделано для броуновского движения в теореме 7.3

гл. III из [5], с учетом того, что производящий оператор бесселевского процесса $R(s)$, $s \geqslant 0$, имеет (см. § 16 гл. IV из [5]) вид

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}.$$

Вычислим производящие операторы процессов V_1, V_2.

Обозначим при $r < u$

$$M(z,r,u) := \mathbf{E}\big\{ \exp\big(-\gamma\ell(\varrho(v,z),r) - \eta\ell(\varrho(v,z),u)\big);\ \varrho(v,z) < \infty\big\}.$$

Для вычисления этого выражения воспользуемся теоремой 1.2 при $x = 0$, $q_1 = r$, $q_2 = u$. Нетрудно проверить, что в этом случае решение задачи (1.4), (1.5) для убывающего φ имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 + 2\gamma(r-x) + 2\eta(u-x) + 4\gamma\eta(u-r)(r-x), & 0 \leqslant x \leqslant r,\\ 1 + 2\eta(u-x), & r \leqslant x \leqslant u,\\ 1, & u \leqslant x. \end{cases}$$

Аналогично решение задачи (1.4), (1.5), (1.6) для возрастающего ψ имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant r,\\ x + 2\gamma(x-r)r, & r \leqslant x \leqslant u,\\ x + 2\gamma(x-r)r + 2\eta(x-u)u + 4\gamma\eta(x-u)(u-r)r, & u \leqslant x. \end{cases}$$

Их вронскиан имеет вид

$$\omega = 1 + 2\gamma r + 2\eta u + 4\gamma\eta(u-r)r.$$

Применяя эти решения при $z < r$ и $x = 0$, получаем

$$M(z,r,u) = \exp\Big(- \frac{v(1 + 2\gamma r + 2\eta u + 4\gamma\eta(u-r)r)}{2z(1 + 2\gamma(r-z) + 2\eta(u-z) + 4\gamma\eta(u-r)(r-z))}\Big).$$

При $u < z$ имеем

$$M(z,r,u) = \exp\Big(- \frac{v(1 + 2\gamma r + 2\eta u + 4\gamma\eta(u-r)r)}{2(z + 2\gamma(z-r)r + 2\eta(z-u)u + 4\gamma\eta(z-u)(u-r)r)}\Big)$$
$$\times \frac{z}{z + 2\gamma(z-r)r + 2\eta(z-u)u + 4\gamma\eta(z-u)(u-r)r}.$$

Положим $\Delta := \{\varrho(v,z) < \infty\}$. Рассмотрим новое вероятностное пространство, которое порождено условными распределениями $\mathbf{P}_\Delta(B) = \mathbf{P}(B|\varrho(v,z) < \infty)$, $B \in \mathcal{F}$, где $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – исходное вероятностное пространство. Символы вероятности и математического ожидания, относящиеся к этому пространству, будем снабжать индексом Δ снизу.

Сначала при $z < r < u$, $h \geqslant 0$, $v > 0$, $\eta > 0$ вычислим выражение для функции

$$T_1(r,u,y) := \mathbf{E}_\Delta\{\exp(-\eta\ell(\varrho(v,z),u))|\ell(\varrho(v,z),r) = y\}.$$

В данной области эта функция по переменной η является преобразованием Лапласа переходной функции процесса V_1, поэтому она однозначно определяет его производящий оператор. Согласно определению условного математического ожидания,

$$T_1(r,u,y) = \Big(\frac{d}{dy}\mathbf{P}\big(\ell(\varrho(v,z),r) < y, \varrho(v,z) < \infty\big)\Big)^{-1}$$
$$\times\frac{d}{dy}\mathbf{E}\big\{\exp\big(-\eta\ell(\varrho(v,z),u)\big); \ell(\varrho(v,z),r) < y, \varrho(v,z) < \infty\big\}.$$

Вычислим обратное преобразование Лапласа $\mathcal{L}_\gamma^{-1}M(z,r,u)$ по γ, считая его функцией переменной $y \in (0,\infty)$. При $z < r$ имеем

$$M(z,r,u)$$
$$= \exp\Big(-\frac{vr}{2z(r-z)}\Big)\exp\Big(\frac{v(1+2\eta(u-r))}{2(r-z)(1+2\gamma(r-z)+2\eta(u-z)+4\gamma\eta(u-r)(r-z))}\Big)$$
$$= \exp\Big(-\frac{vr}{2z(r-z)}\Big)\exp\left(\frac{v}{4(r-z)^2\Big(\gamma + \dfrac{1+2\eta(u-z)}{2(r-z)(1+2\eta(u-r))}\Big)}\right).$$

При $z < r < u$ обратное преобразование Лапласа $\mathcal{L}_\gamma^{-1}M(z,r,u)$ по γ имеет нагрузку в нуле (см. формулу 5.4.3.2(2) из [7]), которая имеет вид

$$\mathbf{P}(\ell(\varrho(v,z),r) = 0, \varrho(v,z) < \infty) = \exp\Big(-\frac{vr}{2z(r-z)}\Big).$$

В силу этого

$$\frac{d}{dy}\mathbf{E}\big\{\exp\big(-\eta\ell(\varrho(v,z),u)\big); \ell(\varrho(v,z),r) < y, \varrho(v,z) < \infty\big\}$$
$$= \exp\Big(-\frac{vr}{2z(r-z)}\Big)\mathcal{L}_\gamma^{-1}\left(\exp\left(\frac{v}{4(r-z)^2\Big(\gamma + \dfrac{1+2\eta(u-z)}{2(r-z)(1+2\eta(u-r))}\Big)}\right) - 1\right)$$
$$= \exp\Big(-\frac{1+2\eta(u-z)}{2(r-z)(1+2\eta(u-r))}y\Big)\frac{1}{2(r-z)}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{y}}I_1\Big(\frac{\sqrt{yv}}{r-z}\Big),$$

где мы воспользовались формулами $0.a$ и 15 приложения 3 из [5].

Применим формулу 5.4.3.2 ($x = 0, z < r$) из [7], которая имеет вид

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}\big(\ell(\varrho(v,z),r) < y, \varrho(v,z) < \infty\big) = \frac{1}{2(r-z)}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{y}}\exp\Big(-\frac{(y+v)}{2(r-z)}\Big)I_1\Big(\frac{\sqrt{yv}}{r-z}\Big).$$

Тогда получим

$$T_1(r,u,y) = \exp\Big(-\frac{\eta y}{1+2\eta(u-r)}\Big).$$

Следовательно V_1 – однородный процесс. По определению $V_1(h) = \ell(\varrho(v,z), z+h)$. Обозначим $\widetilde{T}_1(h) := T_1(z, z+h, y)$. Тогда

$$\widetilde{T}_1(h) = \mathbf{E}_\Delta\Big\{\exp\big(-\eta V_1(h)\big|V_1(0)=y\Big\} = \exp\Big(-\frac{\eta y}{1+2\eta h}\Big).$$

По определению производящего оператора однородного марковского процесса (см. § 9 гл. IV из [5]), ввиду произвольности η, производящий дифференциальный оператор $\mathbf{L}_1$ (дифференцирование по переменной y), отвечающий процессу V_1, может быть найден из равенства:

$$\frac{\partial}{\partial h}\widetilde{T}_1(h,y) = \mathbf{L}_1\widetilde{T}_1(h,y).$$

Отсюда получаем, что

$$\mathbf{L}_1 = 2y\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Теперь при $0<r<u<z$, $h \geqslant 0$, $v>0$, $\gamma>0$ вычислим выражение для функции

$$T_2(r,u,y) := \mathbf{E}_\Delta\{\exp(-\gamma\ell(\varrho(v,z),r))|\ell(\varrho(v,z),u)=y\},$$

В данной области эта функция по переменной γ является преобразованием Лапласа переходной функции неоднородного процесса V_2, поэтому она однозначно определяет его производящий оператор.

Вычислим при $0<r<u<z$ обратное преобразование Лапласа $\mathcal{L}_\eta^{-1}M(z,r,u)$ по η. Имеем

$$M(z,r,u) = \exp\Big(-\frac{v}{2(z-u)}\Big)\frac{z}{z+2\gamma(z-r)r+2\eta(z-u)u+4\gamma\eta(z-u)(u-r)r}$$

$$\times\exp\Big(-\frac{v(u+2\gamma(u-r)r)}{2(z-u)(z+2\gamma(z-r)r+2\eta(z-u)u+4\gamma\eta(z-u)(u-r)r)}\Big)$$

$$= \exp\Big(-\frac{v}{2(z-u)}\Big)\frac{z}{2(z-u)(u+2\gamma(u-r)r)}\Bigg\{\frac{1}{\eta+\dfrac{z+2\gamma(z-r)r}{2(z-u)(u+2\gamma(u-r)r)}}$$

$$\times\exp\Bigg(\frac{v}{4(z-u)^2\Big(\eta+\dfrac{z+2\gamma(z-r)r}{2(z-u)(u+2\gamma(u-r)r)}\Big)}\Bigg)\Bigg\}.$$

При $0 < r < u < z$ обратное преобразование Лапласа $\mathcal{L}_\eta^{-1} M(z, r, u)$ по η не имеет нагрузки в нуле, поэтому согласно формулам 0.a и 16 ($\mu = 0$) приложения 3 из [5]

$$\frac{d}{dy}\mathbf{E}\Big\{ \exp\big(-\gamma\ell(\varrho(v,z),r)\big);\ \ell(\varrho(v,z),u) < y, \varrho(v,z) < \infty\Big\}$$

$$= \exp\Big(-\frac{v}{2(z-u)}\Big)\frac{z}{2(z-u)(u+2\gamma(u-r)r)}\mathcal{L}_\eta^{-1}\Bigg\{\frac{1}{\eta + \dfrac{1+2\gamma(z-r)r}{2(z-u)(u+2\gamma(u-r)r)}}$$

$$\times \exp\Bigg(\frac{v}{4(z-u)^2\Big(\eta + \dfrac{1+2\gamma(z-r)r}{2(z-u)(u+2\gamma(u-r)r)}\Big)}\Bigg)\Bigg\} = \exp\Big(-\frac{v}{2(z-u)}\Big)$$

$$\times\frac{z}{2(z-u)(u+2\gamma(u-r)r)}\exp\Big(-\frac{z+2\gamma(z-r)r}{2(z-u)(u+2\gamma(u-r)r)}y\Big)I_0\Big(\frac{\sqrt{yv}}{z-u}\Big).$$

Применим формулу 5.4.3.2 ($x = 0, r < z$) из [7], в которой заменим r на u. Тогда

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}\big(\ell\big(\varrho(v,z),u\big) < y, \varrho(v,z) < \infty\big) = \frac{z}{2u(z-u)}\exp\Big(-\frac{(vu+yz)}{2(z-u)u}\Big)I_0\Big(\frac{\sqrt{yv}}{z-u}\Big).$$

Применим определение условного математического ожидания. После деления получим

$$T_2(r,u,y) := \mathbf{E}_\Delta\Big\{\exp\big(-\gamma\ell(\varrho(v,z),r)\big)\big|\ell(\varrho(v,z),u) = y\Big\}$$

$$= \frac{u}{u+2\gamma(u-r)r}\exp\Big(-\frac{y\gamma r^2}{u(u+2\gamma(u-r)r)}\Big).$$

Следовательно, V_2 – неоднородный процесс. По определению

$$\ell(\varrho(v,z),q) = V_2(z-q).$$

Тогда

$$T_2(r,u,y) = \mathbf{E}_\Delta\Big\{\exp\big(-\gamma V_2(z-r)\big)\big|V_2(z-u) = y\Big\}.$$

Для вычисления производящего оператора неоднородного марковского процесса используем определение (см. § 9 гл. IV из [5]) и уравнение Колмогорова (2.1) из гл. IV из [5]. При произвольном t, большем чем h, положим

$$U(h,y) = \mathbf{E}_\Delta\Big\{\exp\big(-\gamma V_2(t)\big)\big|V_2(h) = y\Big\}.$$

Тогда, ввиду произвольности γ, оператор $\mathbf{L}_2$, отвечающий процессу V_2 (дифференцирование по переменной y), может быть найден из равенства:

$$-\frac{\partial}{\partial h}U(h,y) = \mathbf{L}_2 U(h,y). \tag{1.8}$$

Для упрощения вычислений сделаем в (1.8) замену переменной $h = z-u$ и обозначим $t = z-r$. В результате (1.8) преобразуется в равенство

$$\frac{\partial}{\partial u}T_2(r,u,y) = \mathbf{L}_2 T_2(r,u,y). \tag{1.9}$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial u}\,T_2 = \Big(\frac{1}{u} - \frac{1+2\gamma r}{u+2\gamma(u-r)r} + \frac{y\gamma r^2}{u^2(u+2\gamma(u-r)r)} + \frac{y\gamma r^2(1+2\gamma r)}{u(u+2\gamma(u-r)r)^2}\Big)T_2$$

$$= -\frac{2\gamma r^2}{u(u+2\gamma(u-r)r)}T_2 + \frac{2y\gamma r^2}{u^2(u+2\gamma(u-r)r)}T_2 + \frac{2y\gamma^2 r^4}{u^2(u+2\gamma(u-r)r)^2}T_2$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial y}\,T_2 - \frac{2y}{u}\,\frac{\partial}{\partial y}\,T_2 + 2y\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,T_2.$$

Отсюда, возвращаясь к обозначению $u = z-h$, получаем, что

$$\mathbf{L}_2 = 2y\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\Big(1 - \frac{y}{z-h}\Big).$$

Это завершает доказательство теоремы 1.1. □

Обратимся к определению локального времени второго порядка. Согласно замечанию 1.2, считаем, что процесс V_1 является отличным от нуля лишь на случайном конечном интервале времени. Поскольку у процессов $V_l(h)$, $h \geqslant 0$, $l = 1,2$, существует локальное время, то при любом фиксированном z с вероятностью единица существует предел

$$\zeta(\varrho(v,z),g) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \mathbb{1}_{[g,g+\varepsilon)}(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy, \qquad g>0. \tag{1.10}$$

Этот процесс будем называть бесселевским локальным временем второго порядка в момент, обратный к локальному времени.

Действительно, соотношение (1.10) следует из равенства

$$\zeta(\varrho(v,z),g) = \zeta_1(\varrho(v,z),g) + \zeta_2(\varrho(v,z),g),$$

где

$$\zeta_1(\varrho(v,z),g) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_z^\infty \mathbb{1}_{[g,g+\varepsilon)}(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\infty \mathbb{1}_{[g,g+\varepsilon)}(V_1(h))\, dh,$$

$$\zeta_2(\varrho(v,z),g) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^z \mathbb{1}_{[g,g+\varepsilon)}(V_2(h))\, dh.$$

2. Распределение функционалов от бесселевского локального времени в момент, обратный к локальному времени

Рассмотрим вопрос о том, как вычислять распределения функционалов от бесселевского локального времени совместно с распределением бесселевского локального времени второго порядка. Нас интересует функционал от бесселевского локального времени по пространственной переменной вида

$$B_\gamma(v,z) := \int\limits_0^\infty f(\ell(\varrho(v,z),y))\, dy + \gamma\zeta(\ell(\varrho(v,z),g), \tag{2.1}$$

где $f(x)$, $x \in [0,\infty)$, – некоторая неотрицательная кусочно непрерывная функция, $f(0) = 0$. Можно рассмотреть и более общий функционал, добавив в (2.1) линейную комбинацию бесселевских локальных времен второго порядка на разных уровнях, т.е. величину

$$\sum_{k=0}^m \gamma_k \zeta(\varrho(v,z),g_k).$$

Это не привносит принципиальных изменений ни в формулировки, ни в доказательства. Начнем со случая, когда $\gamma = 0$.

Теорема 2.1. *Пусть $f(x), x \in [0,\infty)$, – неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Тогда*

$$\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(\ell(\varrho(v,z),y))\, dy\Big); \varrho(v,z) < \infty\Big\}$$

$$= R(v) \exp\Big(-\frac{v}{2z}\Big) q(z,v), \tag{2.2}$$

где функции $R(v)$ и $q(z,v)$, $v \in [0,\infty)$, $z \in (0,\infty)$, являются единственными непрерывными ограниченными решениями задачи

$$2vR''(v) - f(v)R(v) = 0, \qquad R(0) = 1, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}q(z,v) = 2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}q(z,v) + 2\big(1 - \frac{v}{z}\big)\frac{\partial}{\partial v}q(z,v) - f(v)q(z,v) = 0, \tag{2.4}$$

$$q(+0,v) = 1. \tag{2.5}$$

Доказательство. В силу марковского свойства процесса $\ell(\varrho(v,z),y)$, $y \in (0,\infty)$, при условии события $\Delta = \{\varrho(v,z) < \infty\}$, так как

$$\mathbf{P}(\varrho(v,z) < \infty) = \exp\Big(-\frac{v}{2z}\Big)$$

и $\ell(\varrho(v,z),z) = v$, имеем

$$\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy\Big); \varrho(v,z) < \infty\Big\} = \exp\Big(-\frac{v}{2z}\Big)$$

$$\times\mathbf{E}_\Delta \exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy\Big) = \exp\Big(-\frac{v}{2z}\Big)r(z,v)q(z,v),$$

где

$$r(z,v) := \mathbf{E}_\Delta \exp\Big(-\int\limits_z^\infty f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy\Big),$$

$$q(z,v) := \mathbf{E}_\Delta \exp\Big(-\int\limits_0^z f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy\Big).$$

Поскольку событие $\{\ell(\varrho(v,z),z) = v\}$ можно выразить как событие $\{V_1(0) = v\}$ или как $\{V_2(0) = v\}$, то в силу определения процессов V_1, V_2 имеем

$$r(z,v) = \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(V_1(h))\,dh\Big)\Big|V_1(0) = v\Big\},$$

$$q(z,v) = \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^z f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(0) = v\Big\}.$$

Ясно, что функция $r(z,v)$ не зависит от z. Обозначим $R(v) := r(z,v)$.

Применим теорему 12.5 гл. II. Тогда получим, что функция $R(v)$, $v \in (0,\infty)$, является ограниченным решением следующего однородного уравнения:

$$2vR''(v) - f(v)R(v) = 0. \tag{2.6}$$

Так как $f(0)=0$, то в силу замечания 1.2 следует, что $R(0)=1$.

Положим

$$u(s,v) := \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_s^z f(V_2(h))\,dh\Big)\Big| V_2(s)=v\Big\}, \qquad s\in[0,z]. \tag{2.7}$$

Следующее утверждение является аналогом обратного уравнения Колмогорова (уравнение (2.1) гл. IV из [5]) или так называемой формулы Фейнмана–Каца, см. результат монографии [8], с. 366–368.

Функция $u(s,v)$, $(s,v) \in \in [0,z]\times[0,\infty)$, является единственным решением задачи

$$-\frac{\partial}{\partial s}u(s,v) = 2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}u(s,v) + 2\big(1-\frac{v}{z-s}\big)\frac{\partial}{\partial v}u(s,v) - f(v)u(s,v), \tag{2.8}$$

$$u(z-0,v) = 1. \tag{2.9}$$

Действительно, используя решение задачи (2.8), (2.9), определим процесс

$$X(t) := u(t,V_2(t))\exp\Big(-\int\limits_s^t f(V_2(h))\,dh\Big), \qquad t\in[s,z].$$

Учитывая замечание 1.3, применим формулу стохастического дифференцирования Ито. Тогда получим

$$dX(t) = \exp\Big(-\int\limits_s^t f(V_2(h))\,dh\Big)\Big[\Big\{\frac{\partial}{\partial t}u(t,V_2(t)) + 2V_2(t)\frac{\partial^2}{\partial v^2}u(t,V_2(t))$$

$$+2\Big(1-\frac{V_2(t)}{z-t}\Big)\frac{\partial}{\partial v}u(t,V_2(t)) - f(V_2(t))u(t,V_2(t))\Big\}dt$$

$$+2\sqrt{V_2(t)}\frac{\partial}{\partial v}u(t,V_2(t))\,dW(t)\Big].$$

Здесь выражение в фигурных скобках равно нулю в силу уравнения (2.8). Поэтому в интегральном виде эта формула при любом $p\in[s,z]$

имеет следующий вид

$$X(p) - X(s) = \int_s^p \exp\Big(-\int_s^t f(V_2(h))\,dh\Big) 2\sqrt{V_2(t)}\frac{\partial}{\partial v}u(t, V_2(t))\,dW(t).$$

Положим $H_n := \min\{h \geqslant s : V_2(h) \notin (1/n, n)\}$. Это – момент остановки относительно семейства σ-алгебр, порожденных броуновским движением на интервале $[0,t]$. При этих ограничениях частная производная $\frac{\partial}{\partial v}u(t, V_2(t))$ является ограниченной величиной, поэтому математическое ожидание от стохастического интеграла до этого момента существует и

$$\mathbf{E}\Big\{\int_s^{H_n}\exp\Big(-\int_s^t f(V_2(h))\,dh\Big)2\sqrt{V_2(t)}\frac{\partial}{\partial v}u(t, V_2(t))dW(t)\Big|V_2(s)=v\Big\}=0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\Big\{X(H_n)\Big|V_2(s) = v\Big\} = \mathbf{E}\Big\{X(s)\Big|V_2(s) = v\Big\} = u(s, v). \tag{2.10}$$

В силу замечания 1.4, $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = z$ и $\lim\limits_{n\to\infty} V_2(H_n) = 0$.

Таким образом, выполняется (2.7), т.е., решение задачи (2.8), (2.9) имеет вид (2.7). Следовательно аналог обратного уравнения Колмогорова доказан.

Сделаем в (2.8) замену переменной $t := z - s$. Тогда функция

$$\widetilde{q}(t, v) := u(z - t, v) = \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int_{z-t}^{z} f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(z - t) = v\Big\}$$

является ограниченным решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{q}(t, v) = 2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}\widetilde{q}(t, v) + 2\big(1 - \frac{v}{t}\big)\frac{\partial}{\partial v}\widetilde{q}(t, v) - f(v)\widetilde{q}(t, v), \tag{2.11}$$

$$\widetilde{q}(+0, v) = 1. \tag{2.12}$$

Поскольку $\widetilde{q}(z, v) = q(z, v)$, то теорема 2.1 доказана. □

Положим

$$\bar{q}(z, v) := \frac{1}{z}e^{-v/2z}q(z, v).$$

Несложно убедиться, что функция $\bar{q}(z,v)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z}\bar{q}(z,v) = 2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}\bar{q}(z,v) + 2\frac{\partial}{\partial v}\bar{q}(z,v) - f(v)\bar{q}(z,v),\\ &\bar{q}(+0,v) = 0.\end{aligned}$$

Пусть τ – не зависящая от бесселевского процесса случайная величина, имеющая экспоненциальное распределение $\mathbf{P}(\tau > z) = e^{-\beta z}$, $\beta > 0$. Преобразование Лапласа по z от функции $\bar{q}(z,v)$ будет уже удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, т.е. функция

$$Q(v) := \int_0^\infty e^{-\beta z}\bar{q}(z,v)\,dz = \frac{1}{\beta}\mathbf{E}\bar{q}(\tau,z), \qquad \lambda \geqslant 0,$$

является решением уравнения

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\beta + f(v))Q(v) = 0, \qquad v \in (0,\infty), \tag{2.13}$$

Кроме того, при $v \downarrow 0$

$$Q(v) = \int_0^\infty e^{-\beta z}\frac{1}{z}e^{-v/2z}(1 + o(z))\,dz \sim K_0(\sqrt{2\beta v}) \sim -\ln v. \tag{2.14}$$

Поскольку τ не зависит от бесселевского процесса, то применяя теорему Фубини, имеем

$$\int_0^\infty e^{-\beta z}\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy\Big);\varrho(v,z) < \infty\Big\}dz$$

$$= \frac{1}{\beta}\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell(\varrho(v,\tau),y))\,dy\Big);\varrho(v,\tau) < \infty\Big\}.$$

В дальнейшем для сокращения записи мы будем использовать подобную замену преобразования Лапласа по z на момент τ.

Ясно, что

$$\int_0^\infty e^{-\beta z}e^{-v/2z}q(z,v)\,dz = -\frac{d}{d\beta}Q(v).$$

В результате мы получим следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть $f(x), x \in [0,\infty)$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$, $\beta > 0$. Тогда*

$$\frac{1}{\beta}\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int\limits_0^\infty f(\ell(\varrho(v,\tau), y))\, dy\Big); \varrho(v,\tau) < \infty\Big\} = -R(v)\frac{d}{d\beta}Q(v),$$

где функции $R(v)$ и $Q(v)$, $v \in [0,\infty)$, являются единственными непрерывными ограниченными на $+\infty$ решениями задачи

$$2vR''(v) - f(v)R(v) = 0, \qquad R(0) = 1, \tag{2.15}$$

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\beta + f(v))Q(v) = 0, \tag{2.16}$$

$$Q(v) \underset{v\downarrow 0}{\sim} -\ln v. \tag{2.17}$$

Замечание 2.1. Для кусочно непрерывной функции f уравнения (2.15), (2.16) надо понимать следующим образом: они имеют место во всех точках непрерывности функций f, а в точках разрыва функций f их решения непрерывны вместе с первыми производными.

Как и при доказательстве теоремы 4.1 гл. IV из [5], теорема 2.2 для кусочно непрерывной функции f выводится из утверждения для непрерывной функции (см. уравнения (2.3) и (2.13)) с помощью аппроксимации f непрерывными функциями.

Замечание 2.2. Единственность ограниченного решения задачи (2.15), (2.16), (2.17) $v \in \in [0,\infty)$ вытекает из следующих фактов. Поскольку решение уравнения (2.15) является строго выпуклым, то оно имеет только одно ограниченное решение с единичным начальным значением (см. предложение 12.1 гл. II).

Однородное уравнение (2.16), можно записать в проинтегрированном виде следующим образом:

$$2v\phi'(v) - \int\limits_0^v (\beta + f(s))\phi(s)\, ds = c,$$

где c – некоторая постоянная. Выбирая $c = 0$, мы видим, что такое уравнение имеет решение ψ со следующими свойствами: $\psi(+0) = 1$, $\psi'(+0) = \beta/2$, $\psi'(v) \geqslant \beta/2$ и $\psi(v) \geqslant 1 + \beta v/2$. Известно, что по одному из решений однородного дифференциального уравнения второго порядка явно восстанавливается другое линейно независимое решение. Для рассматриваемого уравнения линейно независимое решение φ можно представить в следующем виде:

$$\varphi(v)=\psi(v)\int\limits_v^\infty \frac{ds}{s\,\psi^2(s)}.$$

В силу этого, $\varphi(v)\sim -\ln v$ при $v\downarrow 0$. Таким образом, у уравнения (2.16) существует только одно ограниченное на $+\infty$ решение с заданной асимптотикой в нуле.

Теорема 2.3. *Пусть $f(x), x\in[0,h]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0)=0$. Тогда*

$$\frac{1}{\beta}\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(\ell(\varrho(v,\tau),y))\,dy\Big);\sup_{y\in(0,\infty)}\ell(\varrho(v,\tau),y)\leqslant h,\varrho(v,\tau)<\infty\Big\}$$

$$=-R(v)\frac{d}{d\beta}Q(v)\mathbb{1}_{[0,h]}(v),$$

где функции $R(v)$ и $Q(v)$, $v\in[0,h]$, являются единственными непрерывными решениями задачи

$$2vR''(v)-f(v)R(v)=0,\quad R(0)=1,\quad R(h)=0, \tag{2.18}$$

$$2vQ''(v)+2Q'(v)-(\beta+f(v))Q(v)=0, \tag{2.19}$$

$$Q(v)\underset{v\downarrow 0}{\sim}-\ln v,\quad Q(h)=0. \tag{2.20}$$

Доказательство теоремы 2.3 для $h<\infty$ основано на очевидном соотношении

$$\frac{1}{\beta}\mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(\ell(\varrho(v,\tau),y))\,dy\Big);\sup_{y\in(0,\infty)}\ell(\varrho(v,\tau),y)\leqslant h,\varrho(v,\tau)<\infty\Big]$$

$$=\lim_{\gamma\to\infty}\mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\int\limits_0^\infty(f(\ell(\varrho(v,\tau),y))+\gamma\mathbb{1}_{(h,\infty)}(\ell(\varrho(v,\tau),y)))\,dy\Big);$$

$$\varrho(v,\tau)<\infty\Big].$$

Подробно аналогичное доказательство изложено в § 5 гл. V из [5].

Вернемся к функционалу, содержащему бесселевское локальное время второго порядка.

Теорема 2.4. *Пусть $f(x), x \in [0,h]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$ и $\gamma > 0$. Тогда*

$$\frac{1}{\beta}\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(\ell(\varrho(v,\tau),y))\,dy - \gamma\zeta(\varrho(v,\tau),u)\Big);$$

$$\sup_{y\in(0,\infty)} \ell(\varrho(v,\tau),y) \leqslant h, \varrho(v,\tau) < \infty\Big\} = -R(v)\frac{d}{d\beta}Q(v)\mathbb{1}_{[0,h]}(v),$$

где функции $R(v)$ и $Q(v)$, $v \in [0,h]$, являются единственными непрерывными решениями задачи

$$2vR''(v) - f(v)R(v) = 0, \qquad v \neq u, \tag{2.21}$$

$$2u(R'(u+0) - R'(u-0)) = \gamma R(u), \tag{2.22}$$

$$R(0) = 1, \qquad R(h) = 0, \tag{2.23}$$

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\beta + f(v))Q(v) = 0, \quad v \neq u, \tag{2.24}$$

$$2u(Q'(u+0) - Q'(u-0)) = \gamma Q(u), \tag{2.25}$$

$$Q(v) \underset{v\downarrow 0}{\sim} -\ln v, \quad Q(h) = 0. \tag{2.26}$$

Доказательство. При $\gamma = 0$ теорема 2.4 превращается в теорему 2.3. Мы используем теорему 2.3 и подход, который применялся при доказательстве теоремы 2.1. Применим теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Из определения бесселевского локального времени второго порядка и из теорем 2.1 и 2.3 выводим, что

$$\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(\ell(\varrho,y))\,dy - \gamma\zeta(\varrho,u)\Big);\ \sup_{y\in(0,\infty)} \ell(\varrho,y) \leqslant h, \varrho(v,\tau) < \infty\Big\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^\infty \Big(f(\ell(\varrho(v,\tau),y)) + \frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\varrho(v,\tau),y))\Big)\,dy\Big)$$

$$\times\mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(0,\infty)} \ell(\varrho(v,\tau),y)\Big); \varrho(v,\tau) < \infty\Big\} = -\beta\lim_{\varepsilon\downarrow 0} R_\varepsilon(v)\frac{d}{d\beta}Q_\varepsilon(v),$$

где

$$R_\varepsilon(v) = \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_z^\infty \Big(f(\ell(\varrho(v,z),y)) + \frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\varrho(v,z),y)\Big)\,dy\Big)$$

$$\times \mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(z,\infty)} \ell(\varrho(v,z),y)\Big);\ \varrho(v,\tau)<\infty\Big\},$$

и

$$Q_\varepsilon(v)=\int\limits_0^\infty e^{-\beta z}\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^z \Big(f(\ell(\varrho,y))$$

$$+\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\varrho,y))\Big)dy\Big)\mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(0,z)} \ell(\varrho,y)\Big);\ \varrho(v,\tau)<\infty\Big\}\,dz.$$

Функции R_ε, Q_ε являются единственными решениями задачи

$$2vR''_\varepsilon(v)-\Big(f(v)+\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(v)\Big)R_\varepsilon(v)=0, \tag{2.27}$$

$$R_\varepsilon(0)=1,\qquad R_\varepsilon(h)=0, \tag{2.28}$$

$$2vQ''_\varepsilon(v)+2Q'_\varepsilon(v)-\big(\beta+f(v)+\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(v)\big)Q_\varepsilon(v)=0, \tag{2.29}$$

$$Q(v)\underset{v\downarrow 0}{\approx}-\ln v,\qquad Q_\varepsilon(h)=0. \tag{2.30}$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла справедливы соотношения

$$R_\varepsilon(v)\to R(v),\qquad Q_\varepsilon(v)\to Q(v), \tag{2.31}$$

где

$$R(v)=\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_z^\infty f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy-\gamma\zeta(\varrho(v,z),u)\Big)$$

$$\times \mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(z,\infty)} \ell(\varrho(v,z),y)\Big);\ \varrho(v,\tau)<\infty\Big\},$$

$$Q(v)=\int\limits_0^\infty e^{-\beta z}\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^z f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy-\gamma\zeta(\varrho(v,z),u)\Big)$$

$$\times \mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(0,z)} \ell(\varrho(v,z),y)\Big);\ \varrho(v,\tau)<\infty\Big\}dz.$$

Предельный переход в уравнениях (2.27)–(2.30) осуществляется точно так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.1 гл. III из [5]. Важное значение при этом имеют соотношения (2.31). Это завершает доказательство теоремы 2.4. □

3. Распределение бесселевского локального времени второго порядка в момент, обратный к локальному времени

Применим теорему 2.4 при $f(v) \equiv 0$ и $h = \infty$ для вычисления преобразования Лапласа распределения бесселевского локального времени второго порядка. Пусть $I_l(x)$ и $K_l(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – модифицированные функции Бесселя порядка l (см., например, приложение 2 из [5]).

Теорема 3.1. *При* $\gamma \geqslant 0$

$$\frac{1}{\beta}\mathbf{E}\{e^{-\gamma\zeta(\varrho(v,\tau),u)}; \varrho(v,\tau) < \infty\}$$

$$= \begin{cases} -2\Big(1 - \dfrac{\gamma v}{(2+\gamma)u}\Big) \\ \times \dfrac{d}{d\beta}\Big(K_0(\sqrt{2\beta v}) - \dfrac{\gamma K_0^2(\sqrt{2\beta u}) I_0(\sqrt{2\beta v})}{1+\gamma I_0(\sqrt{2\beta u})K_0(\sqrt{2\beta u})}\Big), & 0 < v \leqslant u, \\ -\dfrac{4}{(2+\gamma)}\dfrac{d}{d\beta}\dfrac{K_0(\sqrt{2\beta v})}{(1+\gamma I_0(\sqrt{2\beta u})K_0(\sqrt{2\beta u}))}, & u \leqslant v. \end{cases} \tag{3.1}$$

Доказательство. Найдем ограниченное решение задачи (2.21)–(2.23) при $f(v) \equiv 0$ и $h = \infty$. Имеем следующую задачу

$$vR''(v) = 0, \qquad v \neq u, \quad R(0) = 1, \tag{3.3}$$

$$2u(R'(u+0) - R'(u-0)) = \gamma R(u). \tag{3.4}$$

Решение ищем в виде

$$R(v) = \begin{cases} 1 - Av, & 0 \leqslant v \leqslant u, \\ B, & u \leqslant v. \end{cases}$$

Из условия непрерывности и условия на скачок производной вычисляем A и B. В итоге имеем

$$R(v) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\gamma v}{(2+\gamma)u}, & 0 \leqslant v \leqslant u, \\ \dfrac{2}{2+\gamma}, & u \leqslant v. \end{cases}$$

Найдем ограниченное на $+\infty$ решение задачи (2.24)–(2.26) при $f(v) \equiv 0$ и $h = \infty$.

Однородное уравнение

$$Y''(v) + \frac{1}{v}Y'(v) - \frac{\beta}{2v}Y(v) = 0, \qquad v > 0,$$

имеет (см. уравнение $15a$ приложения 4 из [5]) возрастающее $I_0(\sqrt{2\beta v})$ и убывающее $K_0(\sqrt{2\beta v})$ линейно независимые решения, $K_0(x) \sim -\ln x$ при $x \to 0$. Решение задачи (2.24)–(2.26) при $f(v) \equiv 0$ и $h = \infty$ ищем в виде

$$Q(v) = \begin{cases} AI_0(\sqrt{2\beta v}) + 2K_0(\sqrt{2\beta v}), & 0 \leqslant v \leqslant u, \\ BK_0(\sqrt{2\beta v}), & u \leqslant v. \end{cases}$$

Из условия непрерывности решения в точке u следует уравнение

$$AI_0(\sqrt{2\beta u}) - BK_0(\sqrt{2\beta u}) = -2K_0(\sqrt{2\beta u}).$$

Из условия на скачок производной получаем уравнение

$$AI_1(\sqrt{2\beta u}) + B\Big(K_1(\sqrt{2\beta u}) + \frac{\gamma}{\sqrt{2\beta u}}K_0(\sqrt{2\beta u})\Big) = 2K_1(\sqrt{2\beta u}).$$

Определитель этой алгебраической системы уравнений следующий:

$$\Delta = I_0(\sqrt{2\beta u})K_1(\sqrt{2\beta u}) + \frac{\gamma}{\sqrt{2\beta u}}I_0(\sqrt{2\beta u})K_0(\sqrt{2\beta u})$$

$$+I_1(\sqrt{2\beta u})K_0(\sqrt{2\beta u}) = \frac{1}{\sqrt{2\beta u}}(1 + \gamma I_0(\sqrt{2\beta u})K_0(\sqrt{2\beta u})).$$

Решение этой алгебраической системы уравнений имеет вид

$$A = -\frac{2\gamma K_0^2(\sqrt{2\beta u})}{\Delta\sqrt{2\beta u}}, \qquad B = \frac{2}{\Delta\sqrt{2\beta u})}.$$

В итоге имеем, что при $0 \leqslant v \leqslant u$

$$Q(v) = 2K_0(\sqrt{2\beta v}) - \frac{2\gamma K_0^2(\sqrt{2\beta u})I_0(\sqrt{2\beta v})}{1 + \gamma I_0(\sqrt{2\beta u})K_0(\sqrt{2\beta u})},$$

и при $u \leqslant v$

$$Q(v) = \frac{2K_0(\sqrt{2\beta v})}{1 + \gamma I_0(\sqrt{2\beta u})K_0(\sqrt{2\beta u})}.$$

□

Получим важное следствие из формулы (3.1).

Локальное время диффузии на любом уровне, который она достигает, сразу накапливает положительное значение. Используя это свойство, из (3.1) получаем, что при $0 < v \leqslant u$

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in(0,\infty)} \ell(\varrho(v,\tau), y) < u, \varrho(v,\tau) < \infty\Big)$$

$$= \lim_{\gamma\to\infty} \mathbf{E}\Big\{e^{-\gamma\zeta(\varrho(v,\tau),u)}; \varrho(v,\tau) < \infty\Big\}$$

$$= -2\beta\Big(1 - \frac{v}{u}\Big)\frac{d}{d\beta}\Big(K_0(\sqrt{2\beta v}) - \frac{K_0(\sqrt{2\beta u})I_0(\sqrt{2\beta v})}{I_0(\sqrt{2\beta u})}\Big)$$

$$= \Big(1 - \frac{v}{u}\Big)\Big\{\sqrt{2\beta v}\Big(K_1(\sqrt{2\beta v}) + \frac{I_1(\sqrt{2\beta v})K_0(\sqrt{2\beta u})}{I_0(\sqrt{2\beta u})}\Big) - \frac{I_0(\sqrt{2\beta v})}{I_0^2(\sqrt{2\beta u})}\Big\}. \quad (3.5)$$

Выведем формулу для математического ожидания бесселевского локального времени второго порядка в момент, обратный к локальному времени.

Положим при фиксированном u

$$\varphi(\gamma) := \mathbf{E}e^{-\gamma\zeta(\varrho(v,\tau),u)}.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E}\zeta(\varrho(v,\tau),u) = -\varphi'(\gamma)\Big|_{\gamma=0}.$$

Дифференцируя формулу (3.1) по γ и полагая $\gamma = 0$, получаем

$$\frac{1}{\beta}\mathbf{E}\zeta(\varrho(v,\tau),u)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{v}{u}\dfrac{d}{d\beta}K_0(\sqrt{2\beta v}) + 2\dfrac{d}{d\beta}\Big(K_0^2(\sqrt{2\beta u})I_0(\sqrt{2\beta v})\Big), & u \leqslant v, \\ \dfrac{d}{d\beta}K_0(\sqrt{2\beta v}) + 2\dfrac{d}{d\beta}\Big(K_0(\sqrt{2\beta v})K_0(\sqrt{2\beta u})I_0(\sqrt{2\beta u})\Big), & v \leqslant u. \end{cases}$$

Список литературы

1. А. Н. Бородин, *Броуновское локальное время второго порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **505** (2021), 75–86.
2. А. Н. Бородин, *Броуновское локальное время второго порядка в момент, обратный к локальному времени.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **510** (2022), 51–64.
3. F. B. Knight, *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc., **109** (1963), 56–86.
4. D. B. Ray, *Sojourn times of a diffusion process.* — Ill. J. Math. **7** (1963) 615–630.
5. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* Лань, Санкт-Петербург (2017).
6. A. N. Borodin, *On the distribution of functionals of Brownian local time.*— LOMI Preprints E – 4 – 85, Leningrad 1985.
7. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы.* Санкт-Петербург, Лань, 2016.
8. I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brovnian Motion and Stochastic Calculus, 2-nd ed.* Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1991.

Borodin A. N. The second order local time of the Bessel process at the moment inverse to local time.

According to the Ray–Knight description the Bessel local time at the moment inverse to local time is a diffusion process with respect to space parameter. This diffusion has a local time. Thus, we come to the definition of the local time of the original Bessel local time. We will call such a process the Bessel local time of the second order at the moment, inverse to local time. The paper studies the Laplace transform of the distribution of the second order Bessel local time.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 17 сентября 2023 г.