Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 524, 2023 г.

М. А. Хрыстик

ДЛИНА ГРУППОВОЙ АЛГЕБРЫ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ И ЦИКЛИЧЕСКОЙ P-ГРУППЫ В МОДУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

§1. Введение

Все рассматриваемые в работе алгебры – **ассоциативные конечномерные алгебры с единицей над полями**. Важную роль в изучении конечномерных алгебр играет такая числовая характеристика алгебры как *длина*.

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Любое произведение конечного числа элементов конечного подмножества $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ является словом над алфавитом $\mathcal{S}$. Длина слова равна количеству букв в этом произведении, отличающихся от $1_{\mathcal{A}}$. Будем считать $1_{\mathcal{A}}$ пустым словом длины 0.

Если $\mathcal{S}$ – система порождающих алгебры $\mathcal{A}$, то есть $\mathcal{A}$ – минимальная подалгебра $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{S}$, то любой элемент алгебры $\mathcal{A}$ может быть представлен в виде линейной комбинации слов над $\mathcal{S}$. Минимальное k такое, что мы можем выразить все элементы $\mathcal{A}$, используя слова длины не более k, назовем длиной системы порождающих $\mathcal{S}$. Длиной $l(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ назовём максимальную из длин её систем порождающих (подробнее см. определение 2.5). В определении длины алгебры $\mathcal{A}$ мы рассматриваем множество **всех** порождающих систем для $\mathcal{A}$. Этим объясняется сложность вычисления длины даже для классических алгебр.

В общей формулировке проблема вычисления длины впервые была сформулирована А. Пазом в 1984 году для полной алгебры матриц $M_n(\mathbb{F})$ над полем в работе [11] и до сих пор является открытой. Вычисление длины в общем случае является довольно трудной задачей.

Ключевые слова: конечномерные алгебры, длина алгебры, групповые алгебры, абелевы группы, p-группы.

Статья подготовлена в ходе проведения исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ).

Нетривиальная верхняя оценка длины произвольной алгебры получена в работе К. Паппачены [10]. Основные алгебраические свойства функции длины были изучены О. В. Марковой в работе [4].

Отдельный интерес представляет вопрос вычисления длин групповых алгебр. Ввиду наличия их матричных представлений, решение этого вопроса тесно связано и с решением проблемы Паза. Для групповых алгебр групп малых порядков удаётся вычислить длину точно над произвольными полями; так для группы подстановок S_3, группы Клейна V_4 и группы кватернионов Q_8 значения длины найдены в [1, 7].

Систематическому изучению общей задачи нахождения длин групповых алгебр конечных абелевых групп посвящены работы [8, 6]. В работе [6] для получения оценки длин групповых алгебр использованы методы теории полей, теории колец и оценка длины для коммутативных алгебр (см. теорему 5.1). В той же работе вычисление длины групповой алгебры абелевой p-группы сведено к вычислению длины фактор-алгебры по радикалу Джекобсона и индекса нильпотентности радикала.

Аналогичное исследование всех неабелевых групп представляется слишком трудным ввиду разнообразия их структуры. Поэтому предлагается исследование функции длины отдельно для семейств классических неабелевых групп. Так в работе [9] начато исследование длин групповых алгебр диэдральных групп, вычислена длина в полупростом случае. Эта серия групп в полупростом случае является естественным следующим шагом после абелевого случая. Действительно, для групповых алгебр абелевых групп в разложении в прямую сумму матричных алгебр все слагаемые одномерны, в то время как размерности матричных алгебр в разложении в прямую сумму групповых алгебр диэдральных групп не превышают двух.

В работе [5] результат о длинах групповых алгебр диэдральных групп обобщен на модулярный случай для 2-групп, то есть над полями характеристики 2.

Изучение абелевых групп в модулярном случае было продолжено в статье [3], где была вычислена длина групповой алгебры нециклической абелевой группы порядка $2p^2$ над полем характеристики $p > 2$. Данная работа продолжает исследования в этом направлении и обобщает результат работы [3].

В §2 приведены основные определения и обозначения, используемые в работе.

В §3 приведены некоторые известные на данный момент результаты о длинах групповых алгебр абелевых групп в модулярном случае. Сформулирован основной результат работы – теорема 3.4, которая содержит значение длины групповой алгебры прямого произведения циклической группы и циклической p-группы над полем характеристики p.

§4 посвящен общей нижней оценке длины групповой алгебры абелевой группы, применение которой доказывает нижнюю оценку для основного результата работы.

В §5 содержится доказательство верхней оценки длины групповой алгебры прямой суммы циклической группы и циклической p-группы над полем характеристики $p > 0$, которым завершается доказательство основного результата работы.

§6 содержит обобщениние основного результата работы над достаточно большими совершенными полями.

§2. Основные определения

Сперва напомним основные определения, связанные с функцией длины.

Пусть $B = \{b_1, \dots, b_M\}$ – непустое конечное множество (алфавит). Конечные последовательности букв из B назовем словами. Пусть B^* обозначает множество всех слов в алфавите B, F_B – свободный моноид над алфавитом B, т.е. B^* с операцией конкатенации.

Определение 2.1. Длина $l(v)$ *слова* $v = b_{i_1} \dots b_{i_t}$, $b_{i_j} \in B$, *равна* t. *Пустое слово считается словом от элементов* B *длины* 0.

Пусть B^i обозначает множество всех слов в алфавите B длины не большей i, $i \geqslant 0$.

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$ и её конечную систему порождающих $\mathcal{S}$. Произведения элементов из порождающего множества $\mathcal{S}$ можно рассматривать как образы элементов свободного моноида $F_{\mathcal{S}}$ при естественном гомоморфизме в мультипликативный моноид алгебры $\mathcal{A}$, и их также можно называть словами от образующих и использовать естественное обозначение $\mathcal{S}^i$. Заметим, что $\mathcal{S}^0 = \{1_{\mathcal{A}}\}$.

Обозначение 2.2. Положим $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$, где $\langle S \rangle$ обозначает линейную оболочку множества S в некотором линейном пространстве над полем $\mathbb{F}$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle = \mathbb{F}$. Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ обозначает линейную оболочку всех слов в алфавите $\mathcal{S}$.

Определение 2.3. *Слово $v \in \mathcal{S}^j$ длины j называется* сократимым *над $\mathcal{S}$, если найдётся такой номер $i < j$, что $v \in \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ (т.е. v представляется в виде линейной комбинации слов меньшей длины). Если слово v не является сократимым, то оно называется* несократимым *над $\mathcal{S}$.*

Из конечномерности $\mathcal{A}$ получаем, что найдётся такой номер h, что $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$. Если для некоторого $h \geqslant 0$ выполнено равенство $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$, то

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$$

и также $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i \geqslant h$.

Определение 2.4. Длиной системы порождающих $\mathcal{S}$ *алгебры* $\mathcal{A}$ *называется число*

$$l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}.$$

Определение 2.5. Длиной алгебры $\mathcal{A}$ *называется число*

$$l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}.$$

Обозначение 2.6. Пусть $a \in \mathcal{A}$ и $\deg a$ обозначает степень минимального многочлена элемента a над полем $\mathbb{F}$. Из конечномерности алгебры $\mathcal{A}$ следует, что для любого $a \in \mathcal{A}$ справедлива оценка $\deg a \leqslant \dim \mathcal{A}$. Тогда для любого непустого подмножества $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ полагаем $m(\mathcal{B}) = \max\{\deg b : b \in \mathcal{B}\}$.

§3. Известные результаты

В этом параграфе мы приведём основные результаты о длинах групповых алгебр абелевых групп в модулярном случае, известные на данный момент.

Циклическую группу порядка n будем обозначать символом C_n. Элемент, порождающий циклическую группу, будем обозначать через 1, нейтральный элемент – через 0. Групповую алгебру группы G над полем $\mathbb{F}$ будем обозначать символом $\mathbb{F}G$ или $\mathbb{F}[G]$.

В работе [6] вычислены длины p-групп над полем характеристики p.

Теорема 3.1 ([6, теорема 3.8])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики $p>0$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и пусть G – конечная абелева p-группа, которая содержит a_i копий C_{p^i} в своём разложении на примарные циклические группы, $a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}_+, a_m \in \mathbb{N}$, то есть,*

$$G \cong \underbrace{C_p \times \cdots \times C_p}_{a_1 \text{ копий}} \times \cdots \times \underbrace{C_{p^m} \times \cdots \times C_{p^m}}_{a_m \text{ копий}}.$$

Тогда

$$l(\mathbb{F}G) = \sum_{i=1}^{m} a_i(p^i - 1).$$

В той же самой работе [6] вычислена и длина групповой алгебры $\mathbb{F}_3[C_2 \times C_3 \times C_3]$.

Теорема 3.2 ([6, теорема 5.2])**.** *$l(\mathbb{F}_3[C_2 \times C_3 \times C_3]) = 7$.*

Затем этот результат был обобщён в работе [3].

Теорема 3.3 ([3, теорема 2.14])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики $p > 2$. Тогда*

$$l(\mathbb{F}[C_2 \times C_p \times C_p]) = 3p - 2.$$

В данной работе мы обобщим последний результат. Пусть G есть прямое произведение циклической группы и циклической p-группы, то есть $G = C_q \times C_{p^l}$, где p – простое. Тогда мы можем выделить циклическую p-группу из C_q прямым сомножителем. Следовательно, можно считать, что $G = C_{p^l} \times C_{p^k} \times C_q$, $p \nmid q$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики $p > 0$, $p \nmid q$, $k \geqslant l$. Тогда*

$$l(\mathbb{F}[C_{p^l} \times C_{p^k} \times C_q]) = p^k q + p^l - 2.$$

§4. Нижняя оценка

Пусть G – конечная абелева группа, s – количество различных простых делителей порядка группы G, t_i – количество циклических p_i-групп в разложении G на примарные циклические группы. Обозначим через t максимум t_i по всем $p_i \mid |G|$. Тогда группу G можно представить в виде

$$G \cong C_{p_1^{k_{11}}} \times \cdots \times C_{p_1^{k_{1t}}} \times C_{p_2^{k_{21}}} \times \cdots \times C_{p_2^{k_{2t}}} \times \cdots \times C_{p_s^{k_{s1}}} \cdots \times C_{p_s^{k_{st}}},$$

где $k_{ij} = 0$ при $j > t_i$. Для группы G, представленной в подобном виде, установим нижнюю оценку длины соответствующей групповой алгебры.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, G – конечная абелева группа. Представим группу G в виде*

$$G \cong C_{p_1^{k_{11}}} \times \cdots \times C_{p_1^{k_{1t}}} \times C_{p_2^{k_{21}}} \times \cdots \times C_{p_2^{k_{2t}}} \times \cdots \times C_{p_s^{k_{s1}}} \cdots \times C_{p_s^{k_{st}}}, \quad (4.1)$$

где p_i – различные простые числа, $k_{ij} \leqslant k_{iq}$ при $j > q$ и, быть может, некоторые k_{ij} равны нулю. Тогда

$$l(\mathbb{F}G) \geqslant p_1^{k_{11}} p_2^{k_{21}} \cdots p_n^{k_{n1}} + p_1^{k_{12}} p_2^{k_{22}} \cdots p_n^{k_{n2}} + \cdots + p_1^{k_{1t}} p_2^{k_{2t}} \cdots p_n^{k_{nt}} - t.$$

Доказательство. Так как p_i в разложении 4.1 различны, мы можем представить G в виде разложения на циклические (не обязательно примарные) группы, перегруппировав примарные сомножители в разложении 4.1,

$$G \cong G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_t, \quad (4.2)$$

где $G_j = C_{p_1^{k_{1j}}} \times C_{p_2^{k_{2j}}} \times \cdots \times C_{p_n^{k_{nj}}}$ – циклическая группа порядка $p_1^{k_{1j}} p_2^{k_{2j}} \cdots p_n^{k_{nj}}$. В соответствии с разложением 4.2 группы G в прямое произведение циклических групп будем представлять элементы G в виде $(g_1, \ldots, g_t)$, где $g_j \in G_j$.

Рассмотрим систему порождающих $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_t\}$, где $a_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $a_t = (0, \ldots, 0, 1)$. Заметим, что

$$(-1, -1, \ldots, -1) = a_1^{|G_1|-1} a_2^{|G_2|-1} \cdots a_t^{|G_t|-1},$$

и данный элемент алгебры, очевидно, не получить из слов меньшей длины. Следовательно,

$$l(\mathbb{F}G) \geqslant l(\mathcal{S}) \geqslant \sum_{j=1}^{t} (|G_j| - 1) = \sum_{j=1}^{t} (p_1^{k_{1j}} p_2^{k_{2j}} \cdots p_n^{k_{nj}}) - t. \qquad \square$$

Замечание 4.2. Вообще говоря, лемма 4.1 справедлива и без условия $k_{ij} \leqslant k_{iq}$ при $j > q$. Однако нетрудно убедиться, что именно при такой группировке примарных циклических групп нижняя оценка будет принимать максимальное значение.

Замечание 4.3. При применении леммы 4.1 к группе $G = C_2 \times C_p \times C_p$ получаем оценку $l(\mathbb{F}G) \geqslant 3p - 2$. Согласно теореме 3.3, $l(\mathbb{F}_p G) = 3p - 2$. Следовательно, доказанная оценка точна.

Применяя оценку из леммы 4.1 к группе, которой посвящена эта статья, получаем ее непосредственное следствие.

Следствие 4.4. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле,* $G = C_{p^l} \times C_{p^k} \times C_q$*,* p *– простое число,* $p \nmid q$*,* $k \geqslant l$*. Тогда* $l(\mathbb{F}G) \geqslant p^k q + p^l - 2$*.*

§5. Верхняя оценка

Для доказательства верхней оценки мы воспользуемся верхней оценкой длины для коммутативных алгебр.

Теорема 5.1 ([4, теорема 4.52])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле. Пусть* $\mathcal{A}$ *– ассоциативная конечномерная коммутативная* $\mathbb{F}$*-алгебра с единицей. Положим*

$$g(d,m) = \begin{cases} (m-1)[\log_m d] + [m^{\{\log_m d\}}] - 1 \text{ при } m \geqslant 2; \\ 0 \text{ при } m = 1. \end{cases}$$

Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant g(\dim \mathcal{A}, m(\mathcal{A}))$*.*

Функция $g(d,m)$ обладает следующим полезным свойством.

Теорема 5.2 ([4, теорема 4.44])**.** *При фиксированном значении* $d \geqslant 2$ *функция* $g(d,m)$ *является неубывающей по* m *на множестве* $[2,d] \cap \mathbb{N}$*.*

Лемма 5.3. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– поле характеристики* $p > 0$*,* $p \nmid q$*,* $k \geqslant l$*,* $G = C_{p^l} \times C_{p^k} \times C_q$*. Тогда* $l(\mathbb{F}G) \leqslant p^k q + p^l - 2$*.*

Доказательство. При $q = 1$ группа G является p-группой, и утверждение леммы следует из теоремы 3.1. Поэтому далее мы будем предполагать, что $q \geqslant 2$.

Рассмотрим произвольный элемент $w \in \mathbb{F}G$. Пусть $w = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_{|G|} g_{|G|}$, где $\alpha_i \in \mathbb{F}$, $g_i \in G$. Тогда $w^{p^k} = \alpha_1^{p^k} g_1^{p^k} + \cdots + \alpha_{|G|}^{p^k} g_{|G|}^{p^k}$, так как все полиномиальные коэффициенты равны нулю над полем характеристики p. Но $g_i^{p^k} = (0,0,h_i)$, где $h_i \in C_q$. Следовательно, w^{p^k} является элементом q-мерной подалгебры в G, порождённой элементом $(0,0,1) \in C_{p^l} \times C_{p^k} \times C_q$. Таким образом, $\deg w^{p^k} \leqslant q$. Тогда $\deg w \leqslant p^k q$, то есть $m(\mathbb{F}G) \leqslant p^k q$. С другой стороны, $\deg v = p^k q$, где $v = (0,1,1) \in C_{p^l} \times C_{p^k} \times C_q$, так как $C_{p^k} \times C_q$ – циклическая подгруппа в G порядка $p^k q$, а v – порождающий её (и соответствующую $p^k q$-мерную подалгебру) элемент, то есть $m(\mathbb{F}G) \geqslant p^k q$. Таким образом, $m(\mathbb{F}G) = p^k q$.

Так как $k \geqslant l$ и $q \geqslant 2$, то $m(\mathbb{F}G)^2 = p^{2k}q^2 > p^{k+l}q = |G|$. Тогда

$$[\log_{m(\mathbb{F}G)} |G|] = 1$$

и

$$[m(\mathbb{F}G)^{\{\log_{m(\mathbb{F}G)} |G|\}}] = \left[\frac{|G|}{m(\mathbb{F}G)^{[\log_{m(\mathbb{F}G)} |G|]}}\right] = \left[\frac{p^{k+l}q}{p^k q}\right] = p^l.$$

Применение теоремы 5.1 завершает доказательство. □

Из следствия 4.4 и леммы 5.3 непосредственно следует основной результат работы – теорема 3.4.

§6. Обобщение теоремы 3.4

Лемму 5.3 можно обобщить, отказавшись от цикличности третьего прямого сомножителя в разложении G.

Лемма 6.1. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики $p > 0$, H – абелева группа порядка q, $k \geqslant l$, $G = C_{p^l} \times C_{p^k} \times H$. Тогда $l(\mathbb{F}G) \leqslant p^k q + p^l - 2$.*

Доказательство. При доказательстве леммы 5.3 мы пользовались цикличностью H и условием $p \nmid q$ лишь для того, чтобы предъявить элемент v, такой что $\deg v = p^k q$, показав тем самым, что $m(\mathbb{F}G) = p^k q$. Но, в силу теоремы 5.2, для доказательства утверждения нам достаточно неравенства $m(\mathbb{F}G) \leqslant p^k q$.

В остальном доказательство повторяет доказательство леммы 5.3. □

Однако нижняя оценка из следствия 4.4 не выполняется при отказе от цикличности третьего прямого сомножителя. Поэтому для доказательства нижней оценки нам понадобятся несколько вспомогательных результатов.

Лемма 6.2 ([4, лемма 3.23])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – конечномерные алгебры с единицами над $\mathbb{F}$. Тогда*

$$l(\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B}) \geqslant l(\mathcal{A}) + l(\mathcal{B}).$$

Лемма 6.3 ([2, лемма 5.3])**.** *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра размерности d над произвольным полем. Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant d - 1$, причём оценка превращается в равенство тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ является однопорождённой, из чего автоматически следует, что она коммутативна.*

Определение 6.4. *Поле $\mathbb{F}$ называется* совершенным, *если любой неприводимый многочлен над $\mathbb{F}$ имеет различные корни в алгебраическом замыкании $\mathbb{F}$.*

Отметим, что совершенными полями являются, в частности, все поля характеристики ноль, все конечные поля, все алгебраически замкнутые поля.

Теорема 6.5 ([6, теорема 4.7])**.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ – совершенное поле характеристики $p > 0$, $|\mathbb{F}| \geqslant m$ и $(m, p) = 1$. Рассмотрим конечную абелеву группу $G \cong H \times P$, где P – циклическая p-группа и $|H| = m$. Тогда алгебра $\mathbb{F}G$ является однопорождённой и $l(\mathbb{F}G) = |G| - 1$.*

Последние три утверждения позволяют доказать обобщение теоремы 3.4 при дополнительных условиях на поле.

Теорема 6.6. *Пусть $\mathbb{F}$ – совершенное поле характеристики $p > 0$, H – абелева группа порядка q, $|\mathbb{F}| \geqslant q$, $p \nmid q$, $k \geqslant l$, $G = C_{p^l} \times C_{p^k} \times H$. Тогда $l(\mathbb{F}G) = p^k q + p^l - 2$.*

Доказательство. Так как $\mathbb{F}[C_{p^l} \times C_{p^k} \times H] \cong \mathbb{F}C_{p^l} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[C_{p^k} \times H]$, из леммы 6.2 следует, что $l(\mathbb{F}G) \geqslant l(\mathbb{F}C_{p^l}) + l(\mathbb{F}[C_{p^k} \times H])$. Группа C_{p^l} циклическая, значит алгебра $\mathbb{F}C_{p^l}$ однопорождённая, и, согласно лемме 6.3, $l(\mathbb{F}C_{p^l}) = p^l - 1$. Из теоремы 6.5 следует, что $l(\mathbb{F}[C_{p^k} \times H]) = p^k q - 1$. Таким образом, $l(\mathbb{F}G) \geqslant p^k q + p^l - 2$. Верхняя оценка $l(\mathbb{F}G) \leqslant p^k q + p^l - 2$ следует из леммы 6.1. □

Замечание 6.7. Отметим, что в доказательстве леммы 4.1 после получения равенства 4.2 вместо рассмотрения системы порождающих мы могли бы сослаться на лемму 6.2 аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 6.6, из чего следовала бы нужная нижняя оценка.

Покажем, что условие на мощность поля в теореме 6.6 существенно. Рассмотрим в качестве примера $\mathbb{F} = \mathbb{F}_3$, $k = l = 1$, $H = C_2 \times C_2$. В данном случае, $p = 3$, $q = 4$ и $p^k q + p^l - 2 = 13$. Однако $l(\mathbb{F}_3[C_3 \times C_3 \times C_2 \times C_2]) \neq 13$. Докажем это.

Утверждение 6.8. *Имеют место неравенства*

$$10 \leqslant l(\mathbb{F}_3[C_3 \times C_3 \times C_2 \times C_2]) \leqslant 11.$$

Доказательство. Обозначим $\mathbb{F}_3[C_3 \times C_3 \times C_2 \times C_2]$ через $\mathcal{A}$. Рассмотрим произвольный элемент $w \in \mathcal{A}$. Тогда

$$w^3 = \alpha_0 e + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3,$$

где $\alpha_i \in \mathbb{F}_3$, $e = (0,0,0,0)$, $g_1 = (0,0,1,0)$, $g_2 = (0,0,0,1)$, $g_3 = (0,0,1,1)$, а тогда

$$w^9 = (w^3)^3 = \alpha_0^3 e^3 + \alpha_1^3 g_1^3 + \alpha_2^3 g_2^3 + \alpha_3^3 g_3^3 = \alpha_0 e + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3.$$

Итак, для произвольного элемента алгебры $\mathcal{A}$ многочлен $x^9 - x^3$ является аннулирующим, то есть $m(\mathcal{A}) \leqslant 9$.

Из теорем 5.1 и 5.2 следует, что $l(\mathcal{A}) \leqslant g(\dim \mathcal{A}, m(\mathcal{A})) \leqslant g(36, 9) = 11$.

Нижняя оценка следует из леммы 4.1. $\square$

§7. Заключение

Несмотря на то, что как нижняя, так и верхняя оценки для длины групповой алгебры группы $G = C_{p^l} \times C_{p^k} \times C_q$ являются частными случаями более общих оценок, доказанных в работе, именно для групп такого вида эти оценки совпадают.

Теорема 6.6 показывает, что для группы $C_{p^l} \times C_{p^k} \times H$ над некоторыми полями в том случае, когда группа H не является циклической, нижняя оценка из леммы 4.1 не достигается, ведь в этом случае нижняя оценка из указанной леммы будет строго меньше длины групповой алгебры, которая равна $p^k|H| + p^l - 2$. С другой стороны, утверждение 6.8 показывает, что над некоторыми полями длина групповой алгебры группы $C_{p^l} \times C_{p^k} \times H$ может не достигать значения $p^k|H| + p^l - 2$. Вышесказанное затрудняет возможность формулировки гипотезы для группы $C_{p^l} \times C_{p^k} \times H$ над произвольным полем характеристики $p > 0$.

Однако мы можем попытаться обобщить результат этой работы в другом направлении и сформулировать гипотезу о длине группы $P \times C_q$, где P – произвольная конечная абелева p-группа, то есть отказаться от цикличности p-компоненты. Мы можем предположить, что в данном случае нижняя оценка из леммы 4.1 точна над произвольным полем характеристики $p > 0$, так как она не зависит от поля.

Гипотеза 7.1. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики $p > 0$, $P = C_{p^{k_1}} \times C_{p^{k_2}} \times \cdots \times C_{p^{k_t}}$, $p \nmid q$, $k_i \geqslant k_j$ при $i < j$. Тогда*

$$l(P \times C_q) = p^{k_1} q + \sum_{i=2}^{t} p^{k_i} - t.$$

Автор благодарит своего научного руководителя Маркову Ольгу Викторовну за помощь в подготовке текста.

Список литературы

1. А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, *Длина групповых алгебр групп небольшого размера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 76–87.
2. О. В. Маркова, *Верхняя оценка длины коммутативных алгебр.* — Матем. сб. **200**, No 12 (2009), 41–62.
3. О. В. Маркова, *Пример вычисления длины групповой алгебры нециклической абелевой группы в модулярном случае.* — Фунд. прикл. матем. **23**, No. 2 (2020), 217–229.
4. О. В. Маркова, *Функция длины и матричные алгебры.* — Фунд. прикл. матем. **17**, No. 6 (2012), 65–173.
5. О. В. Маркова, М. А. Хрыстик, *Длина групповой алгебры группы диэдра порядка* 2^k. — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 169–181.
6. A. E. Guterman, M. A. Khrystik, O. V. Markova, *On the lengths of group algebras of finite Abelian groups in the modular case.* — J. Algebra Appl. **21**, No. 6 (2022), 2250117–2250130.
7. A. E. Guterman, O. V. Markova, *The length of the group algebra of the group* $\mathbf{Q}_8$. — New Trends in Algebra and Combinatorics. Proceedings of the 3rd International Congress in Algebra and Combinatorics (Ed. by K.P. Shum, E. Zelmanov, P. Kolesnikov, A. Wong), World Sci., Singapore (2019), 106–134.
8. A. E. Guterman, O. V. Markova, M. A. Khrystik, *On the lengths of group algebras of finite Abelian groups in the semi-simple case.* — J. Algebra Appl. **21**, No. 7 (2022), 2250140–2250153.
9. M. A. Khrystik, O. V. Markova, *On the length of the group algebra of the dihedral group in the semi-simple case.* — Commun. Algebra **50**, No. 5 (2022), 2223–2232.
10. C. J. Pappacena, *An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra.* — J. Algebra **197** (1997), 535–545.
11. A. Paz, *An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables.* — Linear Multilinear Algebra **15** (1984), 161–170.

Khrystik M. A. Length of the group algebra of the direct product of a cyclic group and a cyclic p-group in the modular case.

In this paper, the length of the group algebra of the direct product of a cyclic group and a cyclic p-group over a field of characteristic p is calculated. A general lower bound for the length of a commutative group algebra is proved, and in the case of the direct product of a cyclic group and a cyclic p-group this bound is sharp.

Национальный исследовательский
университет “Высшая школа экономики”, Москва
E-mail: good_michael@mail.ru

Поступило 2 октября 2023 г.