Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 524, 2023 г.

П. М. Штейнер

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, СОХРАНЯЮЩИЕ СТОЛБЦОВУЮ МАЖОРИЗАЦИЮ $(0,1)$-ВЕКТОРОВ

§1. Введение

Пусть M_n обозначает множество всех действительных $n \times n$ матриц. Множество $(0,1)$-матриц порядка n обозначим через $M_n(0,1)$. Множество векторов с коэффициентами из заданного множества K обозначим через K^n. Например, $\mathbb{R}^n$ обозначает множество действительнозначных векторов размерности n, а $\{0,1\}^n$ – множество $(0,1)$-векторов размерности n. Пусть I обозначает единичную матрицу, J – матрицу, все элементы которой равны 1, а O обозначает матрицу, все элементы которой равны нулю. Транспонирование матрицы $A \in M_n$ обозначается символом A^t. Через $A^{(j)}$ (соответственно $A_{(i)}$) обозначаем j-ый столбец (соответственно i-ую строку) матрицы A. Множество всех матриц-перестановок порядка n обозначается через $P(n)$. Матрица линейного оператора ϕ на $\mathbb{R}^n$ в стандартном базисе обозначается символом $[\phi]$.

Векторы из $\mathbb{R}^n$ считаются столбцами и отождествляются с соответствующими n-кортежами; j-ый координатный вектор обозначается через e_j, $e = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$. Нулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ обозначается символом 0.

Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ символом $x^{\downarrow}$ обозначается вектор, полученный перестановкой координат x в порядке невозрастания. Дадим определение векторной мажоризации.

Определение 1.1. *Для векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$ говорим, что a* мажорируется *b ($a \preceq b$), если $\sum\limits_{j=1}^{k} a_j^{\downarrow} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} b_j^{\downarrow}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a = \sum\limits_{j=1}^{n} b$.*

Матрица называется *столбцово-стохастической*, если все её элементы неотрицательны и сумма элементов в каждом столбце равна 1. Множество всех $n \times n$ столбцово-стохастических матриц обозначается через Ω_n^{col}. Если матрица является столбцово-стохастической и сумма элементов в каждой строке матрицы также равна 1, то она называется

Ключевые слова: векторная мажоризация, столбцовая мажоризация, $(0,1)$-векторы, монотонные отображения, комбинаторная теория матриц.

двоякостохастической. Согласно теореме Биркгофа–Неймана, множество Ω_n всех двоякостохастических матриц порядка n выпукло, а его вершинами являются матрицы-перестановки, см. [20, теорема I.2.A.2].

Согласно классической теореме Харди, Литлвуда и Пойа, векторная мажоризация может быть выражена с помощью двоякостохастических матриц.

Теорема 1.2 ([20, Theorem I.2.B.2])**.** *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n$. *Тогда* $a \preceq b$, *если и только если* $a = Qb$ *для некоторой* $Q \in \Omega_n$.

Существует множество типов мажоризации векторов, матриц и более общих структур, см. [10, 11, 20, 21]. В настоящей статье мы будем рассматривать векторную и столбцовую мажоризации векторов.

Определение 1.3. *Для векторов* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *говорим, что* a столбцово мажорируется b ($a \preceq^c b$), *если* $a = Cb$ *для некоторой матрицы* $C \in \Omega_n^{col}$.

Столбцовая мажоризация была определена в статье [2] и является транспонированным аналогом мажоризации, введенной в [10], где она называется "матричной". Линейные операторы, сохраняющие такую мажоризацию в случае векторов и в случае матриц, были охарактеризованы в [17]. Мы используем транспонированный аналог, то есть столбцовую мажоризацию для удобства работы с векторной мажоризацией. В частности, из определения 1.3 и теоремы 1.2 видно, что столбцовая мажоризация следует из векторной.

Для вектора $a \in \mathbb{R}^n$ через a^+ обозначим сумму положительных элементов a: $a^+ = \sum\limits_{i=1}^{n} \max(a_i, 0)$, а через a^- обозначим сумму отрицательных элементов a: $a^- = \sum\limits_{i=1}^{n} \min(a_i, 0)$.

Определение 1.4. (± 1)-*оператором* (*соответственно* $(0, \pm 1)$-*оператором*) *назовем линейный оператор, заданный* (± 1)-*матрицей* (*соответственно* $(0, \pm 1)$-*матрицей*).

На протяжении всей статьи мы предполагаем, что $n > 1$.

Исследованиям линейных операторов, сохраняющих различные свойства, функции и отношения матриц, положил начало Фробениус [13]. С тех пор эта область, находящаяся на стыке линейной алгебры и функционального анализа, активно развивается.

Полное описание линейных операторов, сохраняющих векторную мажоризацию, было получено Андо в [5]. Это послужило основой для исследований линейных операторов, сохраняющих различные типы мажоризаций матриц и векторов, см. [1, 2, 6, 7, 14, 16, 17, 19]. Более подробную информацию о теории линейных операторов, сохраняющих различные свойства матриц, можно найти в обзорах [18, 22].

Определение 1.5. *Будем говорить, что линейный оператор ϕ на* $\mathbb{R}^n$ сохраняет *векторную мажоризацию, если для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$ из $a \preceq b$ следует $\phi(a) \preceq \phi(b)$.*

Определение 1.6. *Будем говорить, что линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$* сохраняет *векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов, если для любых $a, b \in \{0,1\}^n$ из $a \preceq b$ следует $\phi(a) \preceq \phi(b)$.*

Аналогично определяются линейные операторы, сохраняющие столбцовую мажоризацию и столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Заметим, что в определении 1.6 не требуется, чтобы образ $(0,1)$-вектора был $(0,1)$-вектором. Линейные операторы, сохраняющие множество $(0,1)$-векторов, были охарактеризованы в [3].

Рассмотрение $(0,1)$-матриц и векторов приводит к множеству комбинаторных приложений и результатов, см. [8, 9, 12]. В настоящей статье мы исследуем линейные операторы, сохраняющие столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Подобные задачи уже были решены для некоторых типов мажоризаций матриц и векторов, см. [4, 15]. Для решения этой задачи мы разрабатываем методы комбинаторной теории матриц, см. [8]. Кроме того, была получена характеризация столбцовой мажоризации, позволяющая легко проверять это отношение.

Настоящая работа построена следующим образом. После вводного параграфа следует §2, в котором приводятся известные результаты теории линейных операторов, сохраняющих инварианты. В §3 исследуется столбцовая мажоризация векторов и приводится критерий такой мажоризации. В §4 получена характеризация линейных операторов, сохраняющих столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Следующий §5 посвящен необходимым нам результатам комбинаторной теории матриц. Наконец, в §6 и §7 соответственно рассматриваются (± 1)- и $(0, \pm 1)$-операторы, сохраняющие столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов.

§2. Линейные операторы, сохраняющие мажоризации

В настоящем параграфе приводятся характеризации операторов, сохраняющих векторную мажоризацию в общем случае и в случае $(0,1)$-векторов.

Теорема 2.1 ([5, Corollary 2.7])**.** *Пусть ϕ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор ϕ сохраняет векторную мажоризацию;*
(2) *выполнено одно из следующих условий:*
  (a) *$\phi(x) = (e^t x)s$ для некоторого вектора $s \in \mathbb{R}^n$,*
  (b) *$\phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ для некоторых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и некоторой матрицы $P \in P(n)$.*

Теорема 2.2 ([15, Theorems 4.34, 4.35])**.** *Пусть ϕ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *ϕ сохраняет векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов;*
(2) *выполнено одно из следующих утверждений:*
  (a) *$\phi(x) = (e^t x)s$ для некоторого вектора $s \in \mathbb{R}^n$,*
  (b) *$\phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ для некоторых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и некоторой матрицы $P \in P(n)$,*
  (c) *$n = 3$ и $\phi(x) = aP_1x + bP_2x + cP_3x$ для некоторых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$ и некоторых матриц $P_1, P_2, P_3 \in P(3)$, удовлетворяющих условию $P_1 + P_2 + P_3 = J$.*

§3. Столбцовая мажоризация векторов

Лемма 3.1. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Если $a \preceq^c b$, то $e^t a = e^t b$.*

Доказательство. Если $a \preceq^c b$, то существует такая матрица $C \in \Omega_n^{col}$, что $a = Cb$. Тогда $e^t a = e^t Cb = e^t b$. □

Лемма 3.2. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Если $b \geqslant 0$, то $a \preceq^c b$ тогда и только тогда, когда $e^t a = e^t b$ и $a \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $a \preceq^c b$. Тогда $e^t a = e^t b$ по лемме 3.1. Кроме того, существует такая матрица $C \in \Omega_n^{col}$, что $a = Cb$. Тогда $a \geqslant 0$.

Предположим, что $e^t a = e^t b$ и $a \geqslant 0$. Если $b = 0$, то $e^t b = e^t a = 0$. Тогда из $a \geqslant 0$ следует, что $a = b = 0$. В противном случае, $b^+ > 0$. Определим матрицу $C \in M_n$ соотношением $c_{ij} = \frac{a_i}{b^+}$.

Тогда для любого $i \in \mathcal{N}$ имеем $(Cb)_i = C_{(i)}b = (\frac{a_i}{b^+})e^t b = \frac{a_i}{b^+}b^+ = a_i$, то есть $a = Cb$. Кроме того, $c_{ij} \geqslant 0$ для любых $i, j \in \mathcal{N}$. Наконец, для любого $j \in \mathcal{N}$ имеем $e^t C^{(j)} = \frac{e^t a}{b^+} = \frac{e^t a}{e^t b} = 1$.

Таким образом, $C \in \Omega_n^{col}$ и $a \preceq^c b$. □

Следствие 3.3. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Если $b \leqslant 0$, то $a \preceq^c b$ тогда и только тогда, когда $e^t a = e^t b$ и $a \leqslant 0$.*

Доказательство. Имеем $a \preceq^c b$, если и только если $-a \preceq^c -b$. Последнее, по лемме 3.2, эквивалентно $e^t(-a) = e^t(-b)$ и $-a \geqslant 0$, что, в свою очередь, эквивалентно $e^t a = e^t b$ и $a \leqslant 0$. □

Лемма 3.4. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Если $a \geqslant 0$, то $a \preceq^c b$ тогда и только тогда, когда $e^t a = e^t b$.*

Доказательство. Если $a \preceq^c b$, то $e^t a = e^t b$ по лемме 3.1.

Предположим, что $e^t a = e^t b$. Определим матрицу $C \in M_n$ соотношением $c_{ij} = \frac{a_i}{a^+}$.

Тогда для любого $i \in \mathcal{N}$ имеем $(Cb)_i = C_{(i)}b = (\frac{a_i}{a^+})e^t b = \frac{a_i}{e^t a}e^t b = a_i$, то есть $a = Cb$. Кроме того, $c_{ij} \geqslant 0$ для любых $i, j \in \mathcal{N}$. Наконец, для любого $j \in \mathcal{N}$ имеем $e^t C^{(j)} = \frac{e^t a}{a^+} = \frac{e^t a}{e^t a} = 1$.

Таким образом, $C \in \Omega_n^{col}$ и $a \preceq^c b$. □

Следствие 3.5. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Если $a \leqslant 0$, то $a \preceq^c b$ тогда и только тогда, когда $e^t a = e^t b$.*

Теорема 3.6. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $a \preceq^c b$, если и только если $e^t a = e^t b$ и $a^+ \leqslant b^+$.*

Доказательство. Пусть $a \preceq^c b$. Тогда $e^t a = e^t b$ по лемме 3.1.

Кроме того,

$$\begin{aligned} a^+ &= \sum_{i:a_i>0} a_i = \sum_{i:a_i>0}\sum_{j=1}^n c_{ij}b_j \leqslant \sum_{i:a_i>0}\sum_{j:b_j>0} c_{ij}b_j \\ &= \sum_{j:b_j>0} b_j \sum_{i:a_i>0} c_{ij} \leqslant \sum_{j:b_j>0} b_j \sum_{i=1}^n c_{ij} = \sum_{j:b_j>0} b_j = b^+. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что $e^t a = e^t b$ и $a^+ \leqslant b^+$.

Если $a \geqslant 0$, то $a \preceq^c b$ по лемме 3.4. Если $a \leqslant 0$, то $a \preceq^c b$ по следствию 3.5.

Если $b \geqslant 0$, то $e^t a = e^t b = b^+ \geqslant a^+$. С другой стороны, $a^+ \geqslant e^t a$ по определению a^+. Значит, $e^t a = a^+$ и $a \geqslant 0$. В этом случае, $a \preceq^c b$ по лемме 3.2.

Если $b \leqslant 0$, то $0 = b^+ \geqslant a^+$. Это значит, что $a \leqslant 0$. В этом случае, $a \preceq^c b$ по следствию 3.3.

Таким образом, мы можем предположить, что и в a, и в b есть как строго отрицательные, так и строго положительные координаты. Напомним, что a^- обозначает сумму отрицательных координат a, и $a^- \leqslant 0$. Заметим, что $a^+, a^-, b^+, b^- \neq 0$.

Не ограничивая общности, предположим, что первые k координат a неотрицательны, а остальные отрицательны, и что первые m координат b неотрицательны, а остальные отрицательны. Заметим, что $0 < k, m < n$.

Найдем такую матрицу $C \in \Omega_n^{col}$, что $a = Cb$. Определим C по следующему правилу:

$$\begin{cases} c_{ij} = \frac{a_i}{b^+} & \text{при } i \leqslant k,\ j \leqslant m, \\ c_{ij} = 0 & \text{при } i \leqslant k,\ j > m, \\ c_{ij} = \frac{a_i(b^+ - a^+)}{b^+ a^-} & \text{при } i > k,\ j \leqslant m, \\ c_{ij} = \frac{a_i}{a^-} & \text{при } i > k,\ j > m, \end{cases}$$

то есть

$$C = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{b^+} & \dots & \frac{a_1}{b^+} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_k}{b^+} & \dots & \frac{a_k}{b^+} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{k+1}(b^+ - a^+)}{b^+ a^-} & \dots & \frac{a_{k+1}(b^+ - a^+)}{b^+ a^-} & \frac{a_{k+1}}{a^-} & \dots & \frac{a_{k+1}}{a^-} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_n(b^+ - a^+)}{b^+ a^-} & \dots & \frac{a_n(b^+ - a^+)}{b^+ a^-} & \frac{a_n}{a^-} & \dots & \frac{a_n}{a^-} \end{pmatrix}.$$

Тогда $a = Cb$. Действительно, при $i \leqslant k$ имеем $(Cb)_i = C_{(i)} b = \frac{a_i}{b^+} b^+ = a_i$. А при $i > k$ имеем $(Cb)_i = C_{(i)} b = \frac{a_i(b^+ - a^+)}{b^+ a^-} b^+ + \frac{a_i}{a^-} b^- = \frac{a_i}{a^-}(b^+ - a^+ + b^-) = \frac{a_i}{a^-}(e^t b - a^+) = \frac{a_i}{a^-}(e^t a - a^+) = \frac{a_i}{a^-} a^- = a_i$.

Докажем, что $C \in \Omega_n^{col}$. Покажем, что $c_{ij} \geqslant 0$ для любых $i, j \in \mathcal{N}$.

При $i \leqslant k$ и $j \leqslant m$ имеем $a_i \geqslant 0$ и $b^+ > 0$. Следовательно, $c_{ij} \geqslant 0$.

При $i > k$ и $j \leqslant m$ имеем $a_i < 0$, $b^+ - a^+ \geqslant 0$, $b^+ > 0$, $a^- < 0$. Следовательно, $c_{ij} \geqslant 0$.

Наконец, при $i > k$ и $j > m$ имеем $a_i \leqslant 0$ и $a^- < 0$. Следовательно, $c_{ij} \geqslant 0$.

Покажем, что для любого $j \in \mathcal{N}$ выполнено $e^t C^{(j)} = 1$. При $j \leqslant m$ имеем $e^t C^{(j)} = \sum\limits_{i: a_i \geqslant 0} \frac{a_i}{b^+} + \sum\limits_{i: a_i < 0} \frac{a_i(b^+ - a^+)}{b^+ a^-} = \frac{a^+}{b^+} + \frac{a^-(b^+ - a^+)}{b^+ a^-} = 1$. Если же $j > m$, то $e^t C^{(j)} = \sum\limits_{i: a_i < 0} \frac{a_i}{a^-} = \frac{a^-}{a^-} = 1$.

Таким образом, $C \in \Omega_n^{col}$ и $a \preceq^c b$. □

Следствие 3.7. *Пусть $a, b \in \{0,1\}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $a \preceq^c b$;
(2) $a = Pb$ *для некоторой матрицы* $P \in P(n)$;
(3) $a \preceq b$.

Следствие 3.8. *Пусть $a, b \in \{\pm 1\}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $a \preceq^c b$;
(2) $a = Pb$ *для некоторой матрицы* $P \in P(n)$;
(3) $a \preceq b$.

Следствие 3.9. *Пусть $a, b \in \{0, \pm 1\}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $a \preceq^c b$ *и* $b \preceq^c a$;
(2) $a = Pb$ *для некоторой матрицы* $P \in P(n)$;
(3) $a \preceq b$ *и* $b \preceq a$.

Доказательство. Пусть $a \preceq^c b$ и $b \preceq^c a$. Тогда $a^+ = b^+$. Значит, число единиц в a и b одинаково.

С другой стороны, $a^- = e^t a - a^+ = e^t b - b^+ = b^-$. Значит, число минус единиц в a и b также одинаково. Следовательно, и число нулей в них одинаково, поскольку оба вектора имеют размерность n.

Таким образом, из утверждения (1) следует утверждение (2). Эквивалентность утверждений (2) и (3) была показана в [15, лемма 2.7] и является частным случаем теоремы 3.24 в [21]. Наконец, утверждение (1) следует из утверждения (3). □

§4. Линейные операторы, сохраняющие столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов

Замечание 4.1. Линейный оператор ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, если и только если ϕ конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в столбцовую мажоризацию.

Следствие 4.2. *Если линейный оператор ϕ сохраняет векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов, то ϕ сохраняет и столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов.*

Полная характеризация таких операторов приведена в теореме 2.2.

Лемма 4.3. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T, сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Тогда $T^{(j_1)} \preceq^c T^{(j_2)}$ для любых $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$. В частности, $e^tT^{(j_1)} = e^tT^{(j_2)}$.*

Доказательство. Для любых $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$ имеем $e_{j_1} \preceq^c e_{j_2}$ и $e_{j_2} \preceq^c e_{j_1}$. Тогда $T^{(j_1)} = \phi(e_{j_1}) \preceq^c \phi(e_{j_2}) = T^{(j_2)}$. Кроме того, $e^tT^{(j_1)} = e^tT^{(j_2)}$ по теореме 3.6. □

Следующая теорема дает характеризацию линейных операторов, сохраняющих столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов.

Теорема 4.4. *Линейный оператор ϕ, заданный матрицей T, сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, если и только если выполнены следующие условия:*

(1) $e^tT^{(j_1)} = e^tT^{(j_2)}$ *для любых* $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$;

(2) *для любого* $k \in \mathcal{N}$ *и для любого набора различных индексов* $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{N}$ *выполнено* $(\sum_{j=1}^{k} T^{(j)})^+ = (\sum_{j=1}^{k} T^{(i_j)})^+$.

Доказательство. Пусть ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию (0,1)-векторов. По лемме 4.3, для любых $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$ выполнено $e^tT^{(j_1)} = e^tT^{(j_2)}$.

Рассмотрим произвольное $k \in \mathcal{N}$ и произвольные различные индексы $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{N}$. Положим $a = \sum_{j=1}^{k} e_j$ и $b = \sum_{j=1}^{k} e_{i_j}$. Тогда $a \preceq^c b$ и $b \preceq^c a$. Получаем, что $\phi(a) \preceq^c \phi(b)$ и $\phi(b) \preceq^c \phi(a)$. Тогда, по теореме 3.6, заключаем, что $(\sum_{j=1}^{k} T^{(j)})^+ = (\phi(a))^+ = (\phi(b))^+ = (\sum_{j=1}^{k} T^{(i_j)})^+$.

Пусть выполнены условия (1) и (2). Рассмотрим произвольные $a, b \in \{0,1\}^n$, удовлетворяющие условию $a \preceq^c b$. По следствию 3.7, существует такая матрица $P \in P(n)$, что $a = Pb$. Тогда

$$e^t\phi(a) = e^t \sum_{j:a_j=1} T^{(j)} = (e^ta)e^tT^{(1)} = (e^tb)e^tT^{(1)} = e^t \sum_{j:b_j=1} T^{(j)} = e^t\phi(b).$$

Кроме того,

$$(\phi(a))^+ = \Big(\sum_{j:a_j=1} T^{(j)}\Big)^+ = \Big(\sum_{j=1}^{e^t a} T^{(j)}\Big)^+ = \Big(\sum_{j:b_j=1} T^{(j)}\Big)^+ = (\phi(b))^+,$$

так что $\phi(a) \preceq^c \phi(b)$ по теореме 3.6. Таким образом, ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. □

Определение 4.5. *Назовем два вектора $a, b \in \mathbb{R}^n$* эквивалентными*, если существует такое разбиение множества $\mathcal{N}$ на два непересекающихся подмножества $\mathcal{I}, \mathcal{J}$, что для любого $i \in \mathcal{I}$ выполнено $a_i, b_i \geqslant 0$ и для любого $j \in \mathcal{J}$ выполнено $a_j, b_j \geqslant 0$.*

Иными словами, $a, b \in \mathbb{R}^n$ эквивалентны, если и только если не существует такого $i \in \mathcal{N}$, что $a_i b_i < 0$.

Определение 4.6. *Говорим, что* столбцы матрицы $A \in M_n$ эквивалентны*, если существует такое разбиение множества $\mathcal{N}$ на два непересекающихся подмножества $\mathcal{I}, \mathcal{J}$, что для любого $i \in \mathcal{I}$ выполнено $A_{(i)} \geqslant 0$ и для любого $j \in \mathcal{J}$ выполнено $A_{(j)} \leqslant 0$, где неравенства понимаются поэлементно.*

Иными словами, столбцы $A \in M_n$ эквивалентны, если и только если не существует таких $i, j_1, j_2 \in \mathcal{N}$, что $a_{ij_1} > 0$ и $a_{ij_2} < 0$.

Лемма 4.7. *Пусть $A \in M_n$. Если любые два столбца A попарно эквивалентны, то все столбцы A эквивалентны.*

Доказательство. Предположим, что столбцы A неэквивалентны. Тогда существуют такие $i, j_1, j_2 \in \mathcal{N}$, что $a_{ij_1} > 0$ и $a_{ij_2} < 0$. Но тогда столбцы $A^{(j_1)}$ и $A^{(j_2)}$ неэквивалентны, противоречие. □

Лемма 4.8. *Пусть $T \in M_n$ – такая матрица, что для любых $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$ выполнено $e^t T^{(j_1)} = e^t T^{(j_2)}$ и $(T^{(j_1)})^+ = (T^{(j_2)})^+$.*

Если столбцы T эквивалентны, то линейный оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T, сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов.

Доказательство. По определению эквивалентности столбцов матрицы, существует такое разбиение $\mathcal{N}$ на непересекающиеся подмножества $\mathcal{I}, \mathcal{J}$, что для любого $i \in \mathcal{I}$ выполнено $T_{(i)} \geqslant 0$ и для любого $j \in \mathcal{J}$ выполнено $T_{(j)} \leqslant 0$.

Рассмотрим произвольное $k \in \mathcal{N}$. Для любого $i \in \mathcal{I}$ имеем $\sum\limits_{q=1}^{k} t_{iq} \geqslant 0$, а для любого $j \in \mathcal{J}$ имеем $\sum\limits_{q=1}^{k} t_{jq} \leqslant 0$. Кроме того, для любого $q \in \mathcal{N}$ выполнено $(T^{(q)})^+ = \sum\limits_{i \in \mathcal{I}} t_{iq}$. Значит,

$$\Big(\sum_{q=1}^{k} T^{(q)}\Big)^+ = \sum_{q=1}^{k} \big(T^{(q)}\big)^+ = \sum_{q=1}^{k} \big(T^{(1)}\big)^+ = k\big(T^{(1)}\big)^+.$$

Аналогично, для произвольных индексов $i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{N}$ получаем $\Big(\sum\limits_{q=1}^{k} T^{(i_q)}\Big)^+ = k\big(T^{(1)}\big)^+$.

Тогда линейный оператор, заданный матрицей T, сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов по теореме 4.4. □

Следствие 4.9. *Если линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ задан неотрицательной или неположительной матрицей T с условием $e^t T^{(j_1)} = e^t T^{(j_2)}$ для любых $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$, то ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов.*

Лемма 4.10. *Пусть ϕ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T и сохраняющий столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Если существуют такие j_1, j_2, что $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ эквивалентны, то столбцы T эквивалентны.*

Доказательство. Поскольку столбцы $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ эквивалентны, имеем $(T^{(j_1)} + T^{(j_2)})^+ = 2(T^{(j_1)})^+$.

Предположим, что не все столбцы T эквивалентны. Тогда существуют такие i, q_1, q_2, что $t_{iq_1} > 0$ и $t_{iq_2} < 0$. Но тогда

$$\begin{aligned}
(T^{(q_1)} + T^{(q_2)})^+ &= \sum_{r=1}^{n} \max(t_{rq_1} + t_{rq_2}, 0) = \max(t_{iq_1} + t_{iq_2}, 0) \\
&+ \sum_{r \neq i} \max(t_{rq_1} + t_{rq_2}, 0) < t_{iq_1} + \sum_{r \neq i} \max(t_{rq_1} + t_{rq_2}, 0) \leqslant t_{iq_1} \\
&\leqslant t_{iq_1} + \sum_{r : t_{rq_1} > 0, r \neq i} t_{rq_1} + \sum_{r : t_{rq_2} > 0} t_{rq_2} = (T^{(q_1)})^+ + (T^{(q_2)})^+.
\end{aligned}$$

В итоге, получаем $(T^{(j_1)} + T^{(j_2)})^+ > (T^{(q_1)} + T^{(q_2)})^+$, противоречие. □

В свете лемм 4.8 и 4.10, мы можем рассматривать только операторы, матрицы которых не имеют эквивалентных столбцов.

Определение 4.11. *Говорим, что линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию $(*)$, если верны следующие утверждения*:

(1) *ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов*;
(2) *никакие два столбца $[\phi]$ не являются эквивалентными*;
(3) *ϕ не сохраняет векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов.*

Лемма 4.12. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T, удовлетворяет условию $(*)$. Тогда для любых $P_1, P_2 \in P(n)$ линейный оператор ψ, заданный матрицей P_1TP_2, также удовлетворяет условию $(*)$.*

Доказательство. Столбцы T эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны столбцы P_1TP_2.

Пусть $a, b \in \{0,1\}$ – произвольные векторы такие, что $a \preceq^c b$. Тогда $P_2a \preceq^c P_2b$. Поскольку ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, получаем $\psi(a) = P_1\phi(P_2a) \preceq^c P_1\phi(P_2b) = \psi(b)$. Таким образом, ψ также сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов.

Аналогично доказывается, что если ψ сохраняет векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов, то и ϕ сохраняет векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов. В итоге, если ϕ удовлетворяет условию $(*)$, то и ψ удовлетворяет условию $(*)$. □

Следующая лемма доказывается аналогично.

Лемма 4.13. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T, сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Тогда для любых $P_1, P_2 \in P(n)$ линейный оператор ψ, заданный матрицей P_1TP_2, также сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов.*

Лемма 4.14. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ сохраняет столбцовую мажоризацию. Тогда $-\phi$ также сохраняет столбцовую мажоризацию.*

Доказательство. Для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$ имеем $a \preceq^c b$, если и только если $-a \preceq^c -b$. □

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 4.15. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию $(*)$. Тогда $-\phi$ также удовлетворяет условию $(*)$.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 4.14. Заметим лишь, что столбцы матрицы T эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны столбцы матрицы $-T$. $\square$

§5. Пересечения множеств

Определение 5.1. *Назовем* конфигурацией *набор из n, возможно пересекающихся, подмножеств $X_1, \ldots, X_n$ множества $\mathcal{N}$.*

Матрицей инцидентности конфигурации $X_1, \ldots, X_n$ назовем $(0,1)$-матрицу $A \in M_n$, определяемую соотношениями

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{если } i \in X_j; \\ a_{ij} = 0, & \text{если } i \notin X_j. \end{cases}$$

Следующие множества были введены и изучены в статье [15].

Определение 5.2 ([15, Sec. 4.1])**.** *Пусть $A \in M_n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $j \in \mathcal{N}$.*

(1) *Обозначим через $\Lambda_j^A(\gamma) = \{i, 1 \leqslant i \leqslant n \mid t_{ij} = \gamma\}$ множество индексов строк матрицы, содержащих элемент γ в j-ом столбце. В частности, если никакой элемент столбца j не равен γ, то $\Lambda_j^A(\gamma) = \varnothing$.*

(2) *Обозначим через $\Delta_k^A(\gamma) = \left| \bigcap\limits_{j=1}^{k} \Lambda_j(\gamma) \right|$* индекс пересечения γ *в A, то есть число строк A, первые k элементов которых равны γ.*

В том случае, когда $\gamma = 1$, для краткости будем писать просто Λ_j^A и Δ_k^A.

Определение 5.3 ([15])**.** *Пусть $A \in M_n$, γ – некоторый элемент матрицы A и пусть $k \in \mathcal{N}$. Будем говорить, что $\Delta_k^A(\gamma)$* инвариантен относительно перестановок столбцов *A, если $\Delta_k^A(\gamma) = \left| \bigcap\limits_{s=1}^{k} \Lambda_{j_s}^T(\gamma) \right|$ для любых различных $j_1, \ldots, j_k \in \mathcal{N}$, то есть число строк, содержащих γ в каждой из k позиций $j_1, \ldots, j_k$, постоянно и не зависит от выбора индексов $j_1, \ldots, j_k$. Обозначим это свойство матрицы через $\mathcal{P}(\gamma, k)$ и будем писать $A \in \mathcal{P}(\gamma, k)$, если это свойство выполнено.*

Оказывается, расположение элементов γ в матрице A такой, что $A \in \mathcal{P}(\gamma, k)$ для любого $k \in \mathcal{N}$, можно описать явно.

Теорема 5.4 ([15, Theorem 4.22])**.** *Пусть $A \in M_n$ и $\gamma \in \mathbb{R}$. Если $A \in \mathcal{P}(\gamma, k)$ для любого $k \in \mathcal{N}$, то выполнено одно из следующих условий:*

(1) $\Delta_1^A(\gamma) = 1$ *и* $\Delta_2^A(\gamma) = 0$;
(2) $\Delta_i^A(\gamma) = n - i$ *для любого* $i \in \mathcal{N}$;
(3) $\Lambda_{j_1}^A(\gamma) = \Lambda_{j_2}^A(\gamma)$ *для любых* $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$.

Замечание 5.5. Любую $(0,1)$-матрицу порядка n можно рассматривать как матрицу инцидентности конфигурации подмножеств $\Lambda_1^A, \ldots, \Lambda_n^A$.

Лемма 5.6. *Пусть $A \in M_n$ – матрица инцидентности конфигурации подмножеств $X_1, \ldots, X_n$. Тогда $(A^t A)_{ij} = |X_i \cap X_j|$.*

Доказательство.

$$(A^t A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \sum_{k: a_{ki} = a_{kj} = 1} 1 = \sum_{k \in X_i \cap X_j} 1 = |X_i \cap X_j|. \qquad \square$$

Следствие 5.7. *Пусть $A \in M_n$ – матрица инцидентности конфигурации подмножеств $X_1, \ldots, X_n$ и пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *для любых различных $i, j \in \mathcal{N}$ выполнено $|X_i| = \alpha$ и $|X_i \cap X_j| = \beta$;*
(2) $A^t A = \beta J + (\alpha - \beta) I$.

Следствие 5.8. *Пусть $A \in M_n$ – матрица инцидентности конфигурации подмножеств $X_1, \ldots, X_n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *для любых различных $i, j \in \mathcal{N}$ выполнено $|X_i| = \Delta_1^A$ и $|X_i \cap X_j| = \Delta_2^A$;*
(2) $A^t A = (\Delta_2^A) J + (\Delta_1^A - \Delta_2^A) I$;
(3) $A \in \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$.

Следующая лемма дает критерий обратимости матрицы вида $\alpha J + (\beta - \alpha) P$.

Лемма 5.9 ([2, лемма 5.1])**.** *Пусть $P \in P(n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда матрица $\alpha J + (\beta - \alpha) P$ обратима, если и только если $\alpha \neq \beta$ и $(n-1)\alpha \neq -\beta$.*

Следствие 5.10. *Пусть $A \in M_n(0,1)$ – такая матрица, что $A^t A = \alpha J + (\beta - \alpha) I$. Тогда A обратима, если и только если $\alpha \neq \beta$.*

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^t A$, поскольку матрица A действительна. Кроме того, $(n-1)\alpha \neq -\beta$, поскольку $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Тогда, по лемме 5.9, $A^t A$ обратима, если и только если $\alpha \neq \beta$. $\square$

Лемма 5.11. *Пусть* $A \in M_n(0,1)$ *– такая матрица, что* $A \in \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$. *Тогда выполнено одно из двух условий*:

(1) $\Delta_1^A = \Delta_2^A$;

(2) *матрица* A *обратима.*

Доказательство. Согласно следствию 5.8, имеем $A^tA = (\Delta_2^A)J + (\Delta_1^A - \Delta_2^A)I$. Тогда, если $\Delta_1^A \neq \Delta_2^A$, то A обратима по следствию 5.10. □

Лемма 5.12. *Пусть* $A \in M_n(0,1)$. *Если* $A \in \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$ *и* $\Delta_1^A = \Delta_2^A$, *то* $\Lambda_{j_1}^A = \Lambda_{j_2}^A$ *для любых* $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$. *В этом случае,* $A = A^{(1)}e^t$.

Доказательство. Для любых $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$ получаем $|\Lambda_{j_1}^A| = \Delta_1^A = \Delta_2^A = |\Lambda_{j_1}^A \cap \Lambda_{j_2}^A|$. □

Лемма 5.13. *Пусть* $A \in M_n(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$. *Если* $\Delta_1^A \neq \Delta_2^A = 0$, *то* $A \in P(n)$.

Доказательство. Поскольку $\Delta_1^A > 0$, в матрице A содержится хотя бы n единиц. С другой стороны, в каждой строке содержится не более одной единицы, поскольку $\Delta_2^A = 0$. Таким образом, в матрице A ровно n единиц и $\Delta_1 = 1$. Итак, в каждом столбце и каждой строке матрицы содержится ровно одна единица, а остальные элементы нулевые. Это значит, что $A \in P(n)$. □

Теорема 5.14. *Пусть* $A \in M_n(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$. *Если* $\Delta_1^A \neq \Delta_2^A$, *то* $n\Delta_2^A = (\Delta_1^A)^2 - \Delta_1^A + \Delta_2^A$.

В частности, если $\Delta_2^A \neq 0$, *то* $n = \frac{(\Delta_1^A)^2 - \Delta_1^A}{\Delta_2^A} + 1$.

Доказательство. Для любого $j \in \mathcal{N}$ выполнено $e^tA^{(j)} = |\Lambda_j^A| = \Delta_1^A$. Таким образом, $JA = (\Delta_1^A)J$.

По следствию 5.10, A обратима и, следовательно, $JA^{-1} = (\Delta_1^A)^{-1}J$. Заметим, что $\Delta_1^A \neq 0$, так как иначе мы бы имели $\Delta_1^A = \Delta_2^A$.

Далее, поскольку $A^tA = (\Delta_2^A)J + (\Delta_1^A - \Delta_2^A)I$ по следствию 5.8, то получается, что $JA^tA = ((n-1)\Delta_2^A + \Delta_1^A)J$. Домножив это равенство справа на A^{-1}, получим, что $JA^t = (\frac{(n-1)\Delta_2^A}{\Delta_1^A} + 1)J$. Последняя матрица симметрична, следовательно, $AJ = (JA^t)^t = (\frac{(n-1)\Delta_2^A}{\Delta_1^A} + 1)J$.

Таким образом, с одной стороны, $JAJ = (\Delta_1^A)JJ = n(\Delta_1^A)J$. С другой стороны, $JAJ = (\frac{(n-1)\Delta_2^A}{\Delta_1^A} + 1)JJ = n(\frac{(n-1)\Delta_2^A}{\Delta_1^A} + 1)J$.

Итак, $n(\Delta_1^A) = n(\frac{(n-1)\Delta_2^A}{\Delta_1^A} + 1)$, то есть $(\Delta_1^A)^2 - \Delta_1^A = (n-1)\Delta_2^A$.

Получается, что $n\Delta_2^A = (\Delta_1^A)^2 - \Delta_1^A + \Delta_2^A$ и, если $\Delta_2^A \neq 0$, то $n = \frac{(\Delta_1^A)^2 - \Delta_1^A}{\Delta_2^A} + 1$. □

Для частного случая $A^t A = \alpha I + J$, где $\alpha \in \mathbb{N}$, теорема 5.14 была доказана в [8, Page 13].

Следствие 5.15. *Пусть $A \in M_n(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$. Если $\Delta_1^A \neq \Delta_2^A$, то $AJ = JA = \Delta_1^A J$.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 5.14 получаем, что $AJ = (\frac{(n-1)\Delta_2^A}{\Delta_1^A} + 1)J = (\frac{n\Delta_2^A - \Delta_2^A}{\Delta_1^A} + 1)J$. Подставив значение $n\Delta_2^A$ из теоремы 5.14, получим $(\frac{(\Delta_1^A)^2 - \Delta_1^A + \Delta_2^A - \Delta_2^A}{\Delta_1^A} + 1)J = \Delta_1^A J = JA$. □

Замечание 5.16. Пусть $A \in M_n(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1)$. Если $\Delta_1^A = n$, то $A = J$.

Лемма 5.17. *Пусть $A \in M_n(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$ и $\Delta_2^A = \Delta_1^A - 1$. Тогда $A \in \{P, J - P\}$ для некоторой $P \in P(n)$.*

Доказательство. Если $\Delta_2^A = 0$, то $A \in P(n)$ по лемме 5.13.

В противном случае, по теореме 5.14, $n = \frac{(\Delta_1^A)^2 - \Delta_1^A}{\Delta_2^A} + 1 = \Delta_1^A + 1$. Таким образом, в каждом столбце матрицы A содержится ровно $n-1$ единица. Кроме того, поскольку $\Delta_1^A \neq \Delta_2^A$, все столбцы матрицы A различны. Следовательно, $A = J - P$ для некоторой $P \in P(n)$. □

Теорема 5.18. *Пусть $A \in M_n(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$. Тогда выполнено одно из следующих условий:*

(1) $A = A^{(1)} e^t$;
(2) $A \in P(n)$;
(3) $A = J - P$ *для некоторой* $P \in P(n)$;
(4) $n = 7,\ \Delta_1^A = 3,\ \Delta_2^A = 1$;
(5) $n = 7,\ \Delta_1^A = 4,\ \Delta_2^A = 2$;
(6) $n \geqslant 11$.

Доказательство. Если $\Delta_1^A = \Delta_2^A$, то $A = A^{(1)} e^t$ по лемме 5.12.

Далее предположим, что $\Delta_1^A \neq \Delta_2^A$. В этом случае, $\Delta_2 = \frac{\Delta_1^A(\Delta_1^A - 1)}{n-1}$ по теореме 5.14.

Если $\Delta_1^A = n$, то $A = J$ по замечанию 5.16 и выполнено условие (1).

Если $\Delta_2^A = \Delta_1^A - 1$, то, по лемме 5.17, выполнено одно из условий (2), (3).

Если $\Delta_1^A = n-1$, то $\Delta_2^A = n-2 = \Delta_1^A - 1$.

Если $\Delta_1^A = 0$, то $A = O$. Если $\Delta_1^A = 1$, то $\Delta_2^A = 0 = \Delta_1^A - 1$.

Далее предположим, что $2 \leqslant \Delta_1^A \leqslant n-2$ и $\Delta_2^A \leqslant \Delta_1^A - 2$. В частности, $n \geqslant 4$. Рассмотрим возможные пары n, Δ_1^A и в каждом случае найдем Δ_2^A.

Если $\Delta_1^A = 2$, то $0 \geqslant \Delta_2^A = \frac{2}{n-1}$, противоречие.

Если $\Delta_1^A = 3$, то $1 \geqslant \Delta_2^A = \frac{6}{n-1}$. Значит, $n = 7$ и $\Delta_2^A = 1$.

Если $\Delta_1^A = 4$, то $2 \geqslant \Delta_2^A = \frac{12}{n-1}$. Тогда или $n = 7$, $\Delta_2^A = 2$, или $n = 13$.

Если $\Delta_1^A = 5$, то $3 \geqslant \Delta_2^A = \frac{20}{n-1}$. Тогда $n \geqslant 11$.

Если $\Delta_1^A = 6$, то $4 \geqslant \Delta_2^A = \frac{30}{n-1}$. Тогда $n \geqslant 11$.

Если $\Delta_1^A = 7$, то $5 \geqslant \Delta_2^A = \frac{42}{n-1}$. Тогда $n \geqslant 15$.

Если $\Delta_1^A \geqslant 8$, то $\Delta_1^A - 2 \geqslant \Delta_2^A = \frac{\Delta_1^A(\Delta_1^A-1)}{n-1}$. Значит, $n \geqslant \frac{\Delta_1^A(\Delta_1^A-1)}{\Delta_1^A-2}+1$. Заметим, что при $x \geqslant 2+\sqrt{2}$ функция $f(x) = \frac{x(x-1)}{x-2}$ монотонно возрастает. Значит, $n \geqslant \frac{56}{6}+1 > 10$. $\square$

Лемма 5.19. *Пусть матрица* $A \in M_7(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$ *удовлетворяет условиям* $\Delta_1^A = 3$, $\Delta_2^A = 1$. *Тогда, с точностью до перестановки её строк и столбцов,* $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \end{pmatrix}$.

Доказательство. По следствию 5.15, в каждом столбце и каждой строке матрицы A содержится ровно 3 единицы.

Переставим столбцы и строки так, что $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 1$. Тогда $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \end{pmatrix}$.

Поскольку $\Delta_2^A = 1$, получаем, что $a_{22} = a_{23} = a_{32} = a_{33} = 0$ и $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 1&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \end{pmatrix}$.

Среди $\{a_{i2}, a_{i3} \mid i \geqslant 4\}$ есть 4 единицы. Если $a_{i2} = a_{i3} = 1$, то $i = 1$. Таким образом, строки $4, 5, 6, 7$ можно переставить так, что $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 1&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&1&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&1&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&0&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&0&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \end{pmatrix}$.

Среди $\{a_{2j}, a_{3j} \mid j \geqslant 4\}$ есть 4 единицы. Если $a_{2j} = a_{3j} = 1$, то $|\Lambda_1^A \cap \Lambda_j^A| > 1 = \Delta_2^A$, противоречие. Тогда столбцы $4, 5, 6, 7$ можно переставить так, что $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&1&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&0&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\ 0&0&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \end{pmatrix}$.

Среди $\{a_{i4} \mid i \geqslant 4\}$ есть 2 единицы. Если $a_{44} = a_{54} = 1$, то $|\Lambda_2^A \cap \Lambda_4^A| > 1$, что невозможно. Если $a_{64} = a_{74} = 1$, то $|\Lambda_3^A \cap \Lambda_4^A| > 1$, что невозможно. Таким образом, ровно один из a_{44}, a_{54} равен 1 и ровно один из a_{64}, a_{74} равен 1. Таким образом, поменяв местами, если необходимо, строки 4 и 5, и, поменяв местами, если необходимо, строки 6 и 7, получим, что $a_{44} = a_{64} = 1$ и $a_{54} = a_{74} = 0$. Поскольку $|\Lambda_4^A \cap \Lambda_5^A| = 1$, получаем, что $a_{45} = a_{65} = 0$ и $a_{55} = a_{75} = 1$, то есть $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&\cdot&\cdot \\ 0&1&0&0&1&\cdot&\cdot \\ 0&0&1&1&0&\cdot&\cdot \\ 0&0&1&0&1&\cdot&\cdot \end{pmatrix}$.

Ровно один из элементов a_{46}, a_{47} равен единице. Поменяв, если необходимо, местами 6 и 7 столбец, получим $a_{46} = 1$, $a_{47} = 0$.

Тогда $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&\cdot&\cdot \\ 0&0&1&1&0&\cdot&\cdot \\ 0&0&1&0&1&\cdot&\cdot \end{pmatrix}$. Поскольку $|\Lambda_2^A \cap \Lambda_6^A| = |\Lambda_4^A \cap \Lambda_6^A| = 1$, получаем, что $a_{56} = a_{66} = 0$. Значит, $a_{76} = 1$. Наконец, поскольку $AJ = 3$, получаем, что $a_{57} = a_{67} = 1$ и $a_{77} = 0$.

Итак, $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \end{pmatrix}$. □

Лемма 5.20. *Пусть* $A \in M_n(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$. *Тогда* $J - A \in M_n(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$. *Кроме того,* $\Delta_1^{J-A} = n - \Delta_1^A$ *и* $\Delta_2^{J-A} = n - 2\Delta_1^A + \Delta_2^A$.

Доказательство. Матрица $J - A$ получается из матрицы A заменой единиц на нули и наоборот. Таким образом, достаточно доказать, что $A \in \mathcal{P}(0,1) \cap \mathcal{P}(0,2)$.

Заметим, что для любого $j \in \mathcal{N}$ выполнено $|\Lambda_j^A(0)| = n - |\Lambda_j^A(1)| = n - \Delta_1^A$. Тогда $A \in \mathcal{P}(0,1)$ и $\Delta_1^{J-A} = n - \Delta_1^A$.

Рассмотрим произвольные различные $j, k \in \mathcal{N}$. Докажем, что $|\Lambda_j^A(0) \cap \Lambda_k^A(0)| = n - 2\Delta_1^A + \Delta_2^A$.

Разобьем $\mathcal{N}$ на четыре подмножества $\mathcal{I}_{00}, \mathcal{I}_{01}, \mathcal{I}_{10}$ и $\mathcal{I}_{11}$, где $\mathcal{I}_{xy} = \{i \in \mathcal{N} : a_{ij} = x \text{ и } a_{ik} = y\}$.

Заметим, что $\mathcal{I}_{10} \cup \mathcal{I}_{11} = \Lambda_j^A$ и $\mathcal{I}_{01} \cup \mathcal{I}_{11} = \Lambda_k^A$. Таким образом, $|\mathcal{I}_{10}| + |\mathcal{I}_{11}| = |\mathcal{I}_{01}| + |\mathcal{I}_{11}| = \Delta_1^A$. Кроме того, $|\mathcal{I}_{11}| = \Delta_2^A$.

Тогда $|\Lambda_j^A(0) \cap \Lambda_k^A(0)| = |\mathcal{I}_{00}| = n - |\mathcal{I}_{01}| - |\mathcal{I}_{10}| - |\mathcal{I}_{11}| = n - (|\mathcal{I}_{01}| + |\mathcal{I}_{11}|) - (|\mathcal{I}_{10}| + |\mathcal{I}_{11}|) + |\mathcal{I}_{11}| = n - 2\Delta_1^A + \Delta_2^A$. В частности, величина $|\Lambda_j^A(0) \cap \Lambda_k^A(0)|$ не зависит от выбора столбцов матрицы A, то есть $A \in \mathcal{P}(0,2)$ и $\Delta_2^{J-A} = n - 2\Delta_1^A + \Delta_2^A$. $\square$

Следствие 5.21. *Пусть* $A \in M_7(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$, *причем* $\Delta_1^A = 4$ *и* $\Delta_2^A = 2$. *Тогда* $J - A \in M_7(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$, *причем* $\Delta_1^{J-A} = 3$ *и* $\Delta_2^{J-A} = 1$.

Следствие 5.22. *Пусть матрица* $A \in M_7(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$ *удовлетворяет условиям* $\Delta_1^A = 4$, $\Delta_2^A = 2$. *Тогда, с точностью до перестановки её строк и столбцов,* $A = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&1&1&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&1&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0 \\ 1&1&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. По следствию 5.21, $J - A \in M_7(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$, причем $\Delta_1^{J-A} = 3$ и $\Delta_2^{J-A} = 1$. Тогда, по лемме 5.19, существуют такие $P_1, P_2 \in P(7)$, что $P_1(J - A)P_2 = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \end{pmatrix} = P_1JP_2 - P_1AP_2 = J - P_1AP_2$. Таким образом, с точностью до перестановки строк и столбцов, $A = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&1&1&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&1&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0 \\ 1&1&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$. $\square$

§6. (± 1)-ОПЕРАТОРЫ

В настоящем параграфе мы описываем явный вид линейных операторов, заданных (± 1)-матрицами порядка не более 10 и сохраняющих столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов.

Лемма 6.1. *Пусть ϕ – (± 1)-оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T. Если ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, то $T \in \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные различные $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$. Имеем $T^{(j_1)} \preceq^c T^{(j_2)}$. Тогда, по следствию 3.8, $T^{(j_1)} = PT^{(j_2)}$ для некоторой $P \in P(n)$. Таким образом, $T \in \mathcal{P}(1,1)$.

Так как T – (± 1)-матрица, получаем, что

$$\sum_{i:t_{i1}=t_{i2}=1} 2 = (T^{(1)} + T^{(2)})^+ = (T^{(j_1)} + T^{(j_2)})^+ = \sum_{i:t_{ij_1}=t_{ij_2}=1} 2.$$

Таким образом, $|\Lambda_1^T \cap \Lambda_2^T| = |\Lambda_{j_1}^T \cap \Lambda_{j_2}^T|$ и $T \in \mathcal{P}(1,2)$. □

Лемма 6.2. *Пусть ϕ – (± 1)-оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T. Если ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, то $T \in \mathcal{P}(-1,1) \cap \mathcal{P}(-1,2)$.*

Доказательство. Рассмотрим $(0,1)$-матрицу $A \in M_n$, заданную условиями $\begin{cases} a_{ij} = 0, \text{ если } t_{ij} = -1; \\ a_{ij} = 1, \text{ если } t_{ij} = 1. \end{cases}$

По лемме 6.1, имеем $A \in M_n(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$. Тогда из леммы 5.20 следует, что $J - A \in M_n(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$. Но $J - A$ – это матрица, удовлетворяющая условиям $\begin{cases} (J-A)_{ij} = 0, \text{ если } t_{ij} = 1; \\ (J-A)_{ij} = 1, \text{ если } t_{ij} = -1. \end{cases}$
Таким образом, $T \in \mathcal{P}(-1,1) \cap \mathcal{P}(-1,2)$. □

Лемма 6.3. *Пусть ϕ – (± 1)-оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T. Пусть $A \in M_n(0,1)$ – матрица, определяемая соотношениями*

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, \text{ если } t_{ij} = -1; \\ a_{ij} = 1, \text{ если } t_{ij} = 1. \end{cases}$$

Если выполнено одно из условий

(1) $A = A^{(1)} e^t$,
(2) $A \in P(n)$,
(3) $A = J - P$ *для некоторой* $P \in P(n)$,

то ϕ сохраняет векторную мажоризацию.

Доказательство. Если $A = A^{(1)} e^t$, то $T = T^{(1)} e^t$.

Если $A \in P(n)$, то $T = -J + 2A$.

Если $A = J - P$ для некоторой $P \in P(n)$, то $T = J - 2P$.

В итоге, ϕ сохраняет векторную мажоризацию по теореме 2.1. $\square$

Лемма 6.4. *При* $n \leqslant 10$ *не существует* (± 1)*-операторов, удовлетворяющих условию* $(*)$.

Доказательство. Предположим, что (± 1)-оператор ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Тогда $T \in \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$ по лемме 6.1.

Рассмотрим $(0,1)$-матрицу $A \in M_n$, заданную условиями

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, \text{ если } t_{ij} = -1; \\ a_{ij} = 1, \text{ если } t_{ij} = 1. \end{cases}$$

Тогда $A \in M_n(0,1) \cap \mathcal{P}(1,1) \cap \mathcal{P}(1,2)$ и, по теореме 5.18, выполнено одно из следующих условий:

(1) $A = A^{(1)} e^t$;
(2) $A \in P(n)$;
(3) $A = J - P$ для некоторой $P \in P(n)$;
(4) $n = 7$, $\Delta_1^A = 3, \Delta_2^A = 1$;
(5) $n = 7$, $\Delta_1^A = 4, \Delta_2^A = 2$.

Если выполнено одно из условий (1) – (3), то ϕ сохраняет векторную мажоризацию по лемме 6.3.

Предположим, что $n = 7$, $\Delta_1^A = 3, \Delta_2^A = 1$. Тогда, по лемме 5.19, существуют такие $P_1, P_2 \in P(7)$, что $A = P_1 D P_2$, где $D = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \end{pmatrix}$.

Заметим, что $T = 2A - J$. Тогда $T = 2P_1 D P_2 - J = P_1(2D - J)P_2 =$
$P_1 \begin{pmatrix} 1&1&1&-1&-1&-1&-1 \\ 1&-1&-1&1&1&-1&-1 \\ 1&-1&-1&-1&-1&1&1 \\ -1&1&-1&1&-1&1&-1 \\ -1&1&-1&-1&1&-1&1 \\ -1&-1&1&1&-1&-1&1 \\ -1&-1&1&-1&1&1&-1 \end{pmatrix} P_2$.

Пусть $u = P_2^{-1}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Тогда $\phi(u) = P_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Пусть $v = P_2^{-1}(e_1 + e_2 + e_4 + e_7)$. Тогда $\phi(v) = P_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. С одной стороны, $u \preceq^c v$.

С другой стороны, $\phi(u) \not\preceq^c \phi(v)$, поскольку $(\phi(u))^+ = 2 \not\leqslant 0 = (\phi(u))^+$. В итоге, ϕ не сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, противоречие.

Предположим, что $n = 7$, $\Delta_1^A = 4, \Delta_2^A = 2$. Тогда, по следствию 5.22, существуют такие $P_1, P_2 \in P(7)$, что $A = P_1(J - D)P_2$. В этом случае, $T = 2A - J = 2(P_1(J - D)P_2) - J = P_1(J - 2D)P_2$. По доказанному выше, линейный оператор $\psi = -\phi$ не сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Тогда, по лемме 4.14, ϕ не сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, противоречие. $\square$

Как следствие, получаем следующую теорему.

Теорема 6.5. *Пусть ϕ – (± 1)-оператор на $\mathbb{R}^n$, где $n \leqslant 10$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов;*
(2) *ϕ сохраняет векторную мажоризацию;*
(3) *ϕ сохраняет векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов.*

Доказательство. Пусть ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Обозначим $T = [\phi]$.

Если столбцы матрицы T эквивалентны, то, в силу того, что T – (± 1)-матрица, получаем, что $T = T^{(1)}e^t$. Тогда ϕ сохраняет векторную мажоризацию по теореме 2.1.

Предположим, что столбцы T неэквивалентны. Поскольку, по лемме 6.4, не существует (± 1)-операторов, удовлетворяющих условию $(*)$, то ϕ сохраняет векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов.

Если выполнены условия 2a или 2b теоремы 2.2, то ϕ сохраняет векторную мажоризацию по теореме 2.1. В противном случае, $n = 3$ и $\phi(x) = aP_1x + bP_2x + cP_3x$ для некоторых $a, b, c \in \mathbb{R}$ и некоторых $P_1, P_2, P_3 \in P(3)$ таких, что $P_1 + P_2 + P_3 = J$. Но $a, b, c \in \{\pm 1\}$, поэтому без ограничения общности можно предположить, что $a = b$. В этом случае, $\phi(x) = aJ + (c - a)P_3$, и ϕ сохраняет векторную мажоризацию по теореме 2.1.

Таким образом, из условия (1) следует условие (2). Легко видеть, что из условия (2) следует условие (3), а из него, в свою очередь, следует условие (1). $\square$

§7. $(0,\pm 1)$-операторы

В этом параграфе мы описываем явный вид линейных операторов, заданных $(0,\pm 1)$-матрицами порядка не более 5 и сохраняющих столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов.

Лемма 7.1. *Пусть ϕ – $(0,\pm 1)$-оператор, заданный матрицей T. Если ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, то все столбцы T совпадают с точностью до перестановки координат.*

Доказательство. Для произвольных $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$ выполнено $e_{j_1} \preceq^c e_{j_2}$ и $e_{j_2} \preceq^c e_{j_1}$. Тогда $T^{(j_1)} \preceq^c T^{(j_2)}$ и $T^{(j_2)} \preceq^c T^{(j_1)}$. Значит, из следствия 3.9 получаем, что $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ совпадают с точностью до перестановки координат. □

Следствие 7.2. *Пусть ϕ – $(0,\pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T, столбцы которой эквивалентны. Тогда ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, если и только если столбцы $[\phi]$ совпадают с точностью до перестановки.*

Доказательство. Предположим, что ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Тогда, по лемме 7.1, столбцы $[\phi]$ совпадают с точностью до перестановки.

Предположим, что столбцы T совпадают с точностью до перестановки. Получаем, что для любых $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$ выполнено $e^t T^{(j_1)} = e^t T^{(j_2)}$ и $(T^{(j_1)})^+ = (T^{(j_2)})^+$. Тогда ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов по лемме 4.8. □

Лемма 7.3. *Пусть ϕ – $(0,\pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T, где $n \geqslant 4$. Если ϕ удовлетворяет условию $(*)$, то в каждом столбце T найдётся, по крайней мере, два элемента 1 и два элемента -1.*

Доказательство. По лемме 7.1, все столбцы T совпадают с точностью до перестановки координат. Если в некотором столбце матрицы T не содержится элемент 1, то матрица T неположительна. Значит, столбцы T эквивалентны, и ϕ не удовлетворяет условию $(*)$. Аналогично получаем, что в каждом столбце T обязательно содержится элемент -1.

Пусть в некотором столбце T содержится только один элемент 1. Тогда, по лемме 7.1, в любом столбце T содержится ровно одна единица.

Если существуют такие $i, j_1, j_2 \in \mathcal{N}$, что $t_{ij_1} = t_{ij_2} = 1$, то столбцы $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ эквивалентны. Тогда все столбцы T эквивалентны по лемме 4.10, и ϕ не удовлетворяет условию $(*)$.

Теперь предположим, что в каждой строке T содержится ровно одна единица. Если в матрице T нет нулей, то $T = 2P - J$ для некоторой $P \in P(n)$. В этом случае, ϕ сохраняет векторную мажоризацию по теореме 2.1 и не удовлетворяет условию $(*)$.

Таким образом, в матрице T обязательно содержатся все элементы $0, \pm 1$. Напомним, что столбцы T совпадают с точностью до перестановки координат. Переставим столбцы матрицы так, что $t_{ii} = 1$ для любого $i \in \mathcal{N}$. По лемме 4.12, перестановки строк и столбцов T не влияют на условие $(*)$.

Обозначим число нулей в столбце матрицы T через α, а через β – число минус единиц.

Пусть $q \in \mathcal{N}$ – произвольный индекс столбца. Пусть $i, j \in \mathcal{N}$ – такие индексы, что $t_{iq} = 0$, $t_{jq} = -1$. Поскольку в каждом столбце есть и 0, и -1, такие индексы найдутся. Заметим, что $q \neq i, j$, поскольку $t_{qq} = 1$. Тогда $(T^{(q)} + T^{(i)})^+ \geqslant t_{iq} + t_{ii} = 1$. С другой стороны, поскольку в каждом столбце T содержится ровно один положительный элемент, то $(T^{(q)} + T^{(j)})^+ \leqslant (t_{qq} + t_{qj}) + (t_{jq} + t_{jj}) = 1 + t_{qj} \leqslant 1$.

Таким образом, для любых различных j_1, j_2 имеем $(T^{(j_1)} + T^{(j_2)})^+ = 1$ по теореме 4.4.

Рассмотрим произвольное $r \in \mathcal{N}$, $r \neq q$. Если $t_{rq} = 0$, то $(T^{(q)} + T^{(r)})^+ = (t_{qq} + t_{qr}) + (t_{rq} + t_{rr}) = 1 + t_{qr} + 0 + 1 = 1$. Значит, $t_{qr} = -1$.

Аналогично, если $t_{rq} = -1$, то $(T^{(q)} + T^{(r)})^+ = (t_{qq} + t_{qr}) + (t_{rq} + t_{rr}) = 1 + t_{qr} - 1 + 1 = 1$. Значит, $t_{qr} = 0$.

Таким образом, в строке $T_{(q)}$ содержится ровно β нулей и α минус единиц. В силу произвольности q, получаем, что во всей матрице T содержится $n\beta$ нулей. Но, с другой стороны, число нулей в матрице T равно $n\alpha$ по определению α. Итак, число нулей и число минус единиц в матрице T одно и то же. В частности, $n \geqslant 5$, $\alpha = \beta \geqslant 2$.

Переставим строки матрицы так, что $t_{11} = 1$, $t_{21} = t_{31} = 0$, $t_{41} = t_{51} = -1$. Переставим столбцы матрицы так, что $t_{ii} = 1$ для любого $i \in \mathcal{N}$. Тогда $t_{12} = t_{13} = -1$, $t_{14} = t_{15} = 0$, и верхняя левая 5×5 подматрица матрицы T равна $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$.

Заметим, что $(T^{(1)} + T^{(4)} + T^{(5)})^+ = t_{11} + t_{14} + t_{15} = 1$, поскольку $t_{41} + t_{44} + t_{45}, t_{51} + t_{54} + t_{55} \leqslant 0$.

Таким образом, для любых различных j_1, j_2, j_3 имеем $(T^{(j_1)} + T^{(j_2)} + T^{(j_3)})^+ = 1$ по теореме 4.4.

Рассмотрим произвольное $i \in \mathcal{N}$ с условием $t_{i1} = 0$. Заметим, что $i \neq 1, 4$. Тогда $t_{1i} = -1$ и $1 = (T^{(1)} + T^{(4)} + T^{(i)})^+ = t_{i1} + t_{i4} + t_{ii} = 1 + t_{i4}$, поскольку $t_{11} + t_{14} + t_{1i} = t_{14} = 0$ и $t_{41} + t_{44} + t_{4i} = t_{4i} \leqslant 0$.

Тогда $t_{i4} = 0$. В силу произвольности i, получаем, что для любого $i \in \mathcal{N}$ из $t_{i1} = 0$ следует $t_{i4} = 0$. Но, поскольку $t_{14} = 0 \neq t_{11}$, получаем, что в столбце $T^{(4)}$ содержится больше нулей, чем в столбце $T^{(1)}$, противоречие.

Осталось рассмотреть случай, когда в некотором столбце T содержится ровно один элемент -1. По лемме 4.15, $-T$ также удовлетворяет условию $(*)$. В матрице $-T$ ровно один элемент 1 в каждом столбце, но, по доказанному выше, таких матриц не существует.

Итак, в каждом столбце T есть, по крайней мере, два элемента 1 и два элемента -1. □

7.1. $n = 3$.

Теорема 7.4. *Пусть ϕ – $(0, \pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^3$. Тогда ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0, 1)$-векторов, если и только если выполнено одно из следующих утверждений*:

1. *ϕ сохраняет векторную мажоризацию*;
2. *столбцы $[\phi]$ эквивалентны и совпадают с точностью до перестановки*;
3. $\phi(x) = P_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} P_2 x$ *для некоторых $P_1, P_2 \in P(3)$.*

Доказательство. Обозначим $T = [\phi]$.

Пусть ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0, 1)$-векторов. Тогда, по лемме 7.1, столбцы T совпадают с точностью до перестановки.

Предположим, что столбцы T неэквивалентны. Тогда в матрице T обязательно есть элемент 1 и элемент -1. Если T – (± 1)-матрица, то ϕ сохраняет векторную мажоризацию по теореме 6.5. В противном случае, каждый столбец матрицы T равен $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ с точностью до перестановки.

Предположим, что существуют такие $i, j_1, j_2 \in \mathcal{N}$, что $t_{ij_1} = t_{ij_2} = 1$. Тогда $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ эквивалентны, а тогда все столбцы T эквивалентны по лемме 4.10, противоречие. Значит, в каждой строке матрицы T

содержится ровно один элемент 1. Аналогично доказывается, что в каждой строке содержится ровно один элемент -1. Значит, и элемент 0 встречается в каждой строке ровно один раз.

Переставим строки матрицы T так, чтобы $T^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Переставив, если необходимо, столбцы $T^{(2)}$ и $T^{(3)}$, добьемся того, что $t_{12} = -1$. Тогда $t_{13} = 1$. Поскольку $t_{22} \neq t_{21}, t_{12}$, получаем, что $t_{22} = 0$. Значит, $t_{23} = -1$, $t_{32} = 1$ и, наконец, $t_{33} = 0$.

Итак, $\phi(x) = P_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} P_2 x$ для некоторых $P_1, P_2 \in P(3)$.

Таким образом, если ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, то выполнено одно из условий (1) – (3).

Докажем обратную импликацию. Если ϕ сохраняет векторную мажоризацию, то ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию, в частности, ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов.

Если столбцы T эквивалентны и совпадают с точностью до перестановки, то ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов по следствию 7.2.

Наконец, если $\phi(x) = P_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} P_2 x$ для некоторых $P_1, P_2 \in P(3)$, то ϕ сохраняет векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов по теореме 2.2. В частности, ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. $\square$

7.2. $n = 4$.

Теорема 7.5. *Пусть ϕ – $(0,\pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^4$. Тогда ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, если и только если выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) *ϕ сохраняет векторную мажоризацию*;
(2) *столбцы $[\phi]$ эквивалентны и совпадают с точностью до перестановки.*

Доказательство. Обозначим $T = [\phi]$.

Предположим, что ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Если столбцы $[\phi]$ эквивалентны, то, по следствию 7.2, они совпадают с точностью до перестановки.

Предположим, что столбцы T неэквивалентны и что ϕ не сохраняет векторную мажоризацию. Тогда ϕ удовлетворяет условию $(*)$.

По лемме 7.3 получаем, что в каждом столбце T содержатся минимум два элемента 1 и минимум два элемента -1. Следовательно, ϕ

– (± 1)-оператор. Но, по лемме 6.4, таких операторов не существует, противоречие.

Докажем обратную импликацию. Если ϕ сохраняет векторную мажоризацию, то ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Если столбцы $[\phi]$ эквивалентны и совпадают с точностью до перестановки, то ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов по следствию 7.2. $\square$

7.3. $n = 5$**.**

Лемма 7.6. *Пусть ϕ – $(0,\pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^5$, заданный матрицей T. Если ϕ удовлетворяет условию $(*)$, то $T^{(1)} = P\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$ для некоторой $P \in P(5)$.*

Доказательство. По лемме 7.3, в каждом столбце матрицы T содержатся минимум два элемента 1 и два элемента -1. Кроме того, по лемме 6.4, T не является (± 1)-матрицей. $\square$

Лемма 7.7. *Пусть ϕ – $(0,\pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^5$, заданный матрицей T. Если ϕ удовлетворяет условию $(*)$, то $(T^{(j_1)} + T^{(j_2)})^+ = 2$ для любых $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$.*

Доказательство. По лемме 7.6, каждый столбец T с точностью до перестановки равен $\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$. Тогда $0 \leqslant (T^{(1)} + T^{(2)})^+ \leqslant 4$.

Если $(T^{(1)} + T^{(2)})^+ \leqslant 1$, то никакая строка T не может содержать более одного элемента 1. Но в матрице T всего 10 элементов 1, противоречие.

Предположим, что $(T^{(1)} + T^{(2)})^+ = 3$. Переставим строки матрицы T так, что $T^{(1)} = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$. Заметим, что для любого $j \in \mathcal{N}$, $j \neq 1$, выполнено $t_{1j} \neq 0$, поскольку в противном случае каждая координата $T^{(1)} + T^{(j)}$ четна. В этом случае и $(T^{(1)} + T^{(j)})^+$ четно, противоречие.

Получаем, что $t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15} \in \{\pm 1\}$. Пусть в первой строке есть хотя бы два элемента 1. Переставим столбцы так, что $t_{12} = t_{13} = 1$. Поскольку $(T^{(1)} + T^{(2)})^+ = 3$, получаем, что $\{t_{22}, t_{32}\} = \{-1, 1\}$. Аналогично, $\{t_{23}, t_{33}\} = \{-1, 1\}$. Но тогда $(T^{(2)} + T^{(3)})^+ = \sum\limits_{i=1}^{3} \max(t_{i2} + t_{i3}, 0)$, поскольку все положительные элементы $T^{(2)}, T^{(3)}$ находятся в первых трех строках. С другой стороны, поскольку $t_{i2}, t_{i3} \neq 0$ при $i \leqslant 3$, получаем, что $(T^{(2)} + T^{(3)})^+$ четно, противоречие.

Если же в первой строке не более одного элемента 1, то имеются хотя бы три элемента -1. Переставим столбцы так, что $t_{12} = t_{13} = -1$. Поскольку $(T^{(1)} + T^{(2)})^+ = 3$, получаем, что $\{t_{22}, t_{32}\} = \{0, 1\}$. Аналогично, $\{t_{23}, t_{33}\} = \{0, 1\}$. Но тогда $(T^{(2)} + T^{(3)})^+ = 2 + \sum\limits_{i=4}^{5} \max(t_{i2} + t_{i3}, 0)$. Но поскольку $t_{i2}, t_{i3} \neq 0$ при $i \geqslant 4$, получаем, что $(T^{(2)} + T^{(3)})^+$ четно, противоречие.

Наконец, если $(T^{(1)} + T^{(2)})^+ = 4$, то $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ эквивалентны. Но тогда все столбцы матрицы T эквивалентны по лемме 4.10. Значит, ϕ не удовлетворяет условию $(*)$, противоречие. □

Следствие 7.8. *Пусть ϕ – $(0, \pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^5$, заданный матрицей T и удовлетворяющий условию $(*)$. Предположим, что существуют такие $i, j_1, j_2 \in \mathcal{N}$, что $t_{ij_1} = t_{ij_2} = 1$.*

Тогда для любого $k \in \mathcal{N}$, $k \neq i$, выполнено $t_{kj_1} + t_{kj_2} \leqslant 0$. В частности, для любого $k \in \mathcal{N}$, $k \neq i$, из $t_{kj_1} = 1$ следует $t_{kj_2} = -1$, а из $t_{kj_2} = 1$ следует $t_{kj_1} = -1$.

Доказательство. По лемме 7.7, имеем

$$\begin{aligned} 2 &= \left(T^{(j_1)} + T^{(j_2)}\right)^+ \\ &= t_{ij_1} + t_{ij_2} + \sum_{k \neq i} \max(t_{kj_1} + t_{kj_2}, 0) = 2 + \sum_{k \neq i} \max(t_{kj_1} + t_{kj_2}, 0). \end{aligned}$$

Значит, $t_{kj_1} + t_{kj_2} \leqslant 0$ для любого $k \neq i$. □

Следствие 7.9. *Пусть ϕ – $(0, \pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^5$, заданный матрицей T и удовлетворяющий условию $(*)$. Предположим, что существуют такие $i, j_1, j_2 \in \mathcal{N}$, что $t_{ij_1} = 1$, $t_{ij_2} = 0$.*

Тогда найдется такое $m \in \mathcal{N}$, что $t_{mj_1} = 0$ и $t_{mj_2} = 1$. Кроме того, для любого $k \in \mathcal{N}$, $k \neq i, m$, выполнено $t_{kj_1} + t_{kj_2} \leqslant 0$. В частности, для любого $k \in \mathcal{N}$, $k \neq i, m$, из $t_{kj_1} = 1$ следует $t_{kj_2} = -1$, а из $t_{kj_2} = 1$ следует $t_{kj_1} = -1$.

Доказательство. По лемме 7.7, имеем $2 = (T^{(j_1)} + T^{(j_2)})^+ = t_{ij_1} + t_{ij_2} + \sum\limits_{k \neq i} \max(t_{kj_1} + t_{kj_2}, 0) = 1 + \sum\limits_{k \neq i} \max(t_{kj_1} + t_{kj_2}, 0)$. Таким образом, $\sum\limits_{k \neq i} \max(t_{kj_1} + t_{kj_2}, 0) = 1$. Поскольку все слагаемые последней суммы

– неотрицательные целые числа, получаем, что ровно одно слагаемое равно 1, а остальные слагаемые равны нулю. Таким образом, существует такое $m \in \mathcal{N}$, $m \neq i$, что $t_{mj_1} + t_{mj_2} = 1$ и $t_{kj_1} + t_{kj_2} \leqslant 0$ для любого $k \in \mathcal{N}$, $k \neq i, m$. Наконец, равенство $t_{mj_1} + t_{mj_2} = 1$ означает, что $\{t_{mj_1}, t_{mj_2}\} = \{0, 1\}$. Но $t_{mj_2} \neq 0$, поскольку в столбце $T^{(j_2)}$ содержится ровно один элемент 0. Тогда $t_{mj_1} = 0$ и $t_{mj_2} = 1$. □

Лемма 7.10. *Пусть ϕ – $(0, \pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^5$, заданный матрицей T и удовлетворяющий условию $(*)$. Тогда в каждой строке матрицы T содержится не более двух элементов* 1.

Доказательство. Предположим противное. Переставим строки матрицы T так, что в $T_{(1)}$ содержится минимум три элемента 1. Переставим столбцы T так, что $t_{11} = t_{12} = t_{13} = 1$.

По лемме 7.6, $T^{(1)} = P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ для некоторой $P \in P(5)$, а по лемме 7.1 столбцы T совпадают с точностью до перестановки координат.

Тогда существует такое $i \in \mathcal{N}$, $i \neq 1$, что $t_{i1} = 1$. Тогда, по следствию 7.8, $t_{i2} = t_{i3} = -1$. Аналогично, существует такое $j \in \mathcal{N}$, $j \neq 1, i$, что $t_{j2} = 1$, $t_{j1} = t_{j3} = -1$, и существует такое $k \in \mathcal{N}$, $k \neq 1, i, j$, что $t_{k3} = 1$, $t_{k1} = t_{k2} = -1$.

Переставим, если необходимо, строки матрицы T так, что $i = 2$, $j = 3$, $k = 4$. Тогда $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$.

Предположим, что $t_{14} = 1$. Тогда, по следствию 7.8, $t_{24} = t_{34} = t_{44} = -1$, что противоречит структуре столбцов T. Предположим, что $t_{14} = 0$. Тогда, по следствию 7.9, $t_{54} = 1$. Применяя к столбцам $T^{(1)}$ и $T^{(4)}$ следствие 7.9, получаем, что $t_{24} = -1$. Аналогично, $t_{34} = t_{44} = -1$, что противоречит структуре столбцов T.

Таким образом, $t_{14} = -1$ и $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & \cdot \\ 1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$.

Предположим, что $t_{24} = 0$. Тогда $t_{54} = 1$ по следствию 7.9. Применяя к столбцам $T^{(2)}$ и $T^{(4)}$ следствие 7.9, получаем, что $t_{34} = 0$, что противоречит структуре столбцов T. Следовательно, $t_{24} \neq 0$. Аналогично доказывается, что $t_{34}, t_{44} \neq 0$. Значит, $t_{54} = 0$ и

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & \cdot \\ 1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$.

Тогда из $(T^{(1)} + T^{(4)})^+ = 2$ получаем, что $t_{24} = 1$. Аналогично получаем, что $t_{34} = t_{44} = 1$, что противоречит структуре столбцов T.

Итак, в любой строке T содержится не более двух элементов 1. $\square$

Лемма 7.11. *Пусть ϕ – $(0, \pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^5$, заданный матрицей T и удовлетворяющий условию $(*)$. Тогда строки T совпадают с точностью до перестановки координат. Кроме того, $T_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{smallmatrix} \right) P$ для некоторой $P \in P(5)$.*

Доказательство. По лемме 7.10, в каждой строке матрицы T есть не более двух элементов 1. С другой стороны, оператор $-\phi$ также удовлетворяет условию $(*)$ по лемме 4.15. Применяя лемму 7.10 к оператору $-\phi$, получаем, что в каждой строке T содержится не более двух элементов -1. Тогда в каждой строке T содержится не менее одного элемента 0.

С другой стороны, по лемме 7.6, $T^{(1)} = P \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right)$ для некоторой $P \in P(5)$, а по лемме 7.1 столбцы T совпадают с точностью до перестановки координат. Таким образом, в матрице T содержатся ровно 5 элементов 0. Значит, в каждой строке содержится ровно один элемент 0.

Поскольку в строке 5 элементов, заключаем, что в каждой строке находятся ровно два элемента 1, два элемента -1 и один элемент 0. $\square$

Лемма 7.12. *Пусть ϕ – $(0, \pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^5$, заданный матрицей T. Если ϕ удовлетворяет условию $(*)$, то $T = P_1 A P_2$ для некоторых $P_1, P_2 \in P(5)$, где $A \in \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \right\}$.*

Доказательство. По лемме 7.6, $T^{(1)} = P \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right)$ для некоторой $P \in P(5)$. По лемме 7.7, $(T^{(j_1)} + T^{(j_2)})^+ = 2$ для любых $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$. По лемме 7.1, столбцы матрицы T совпадают с точностью до перестановки координат. Наконец, по лемме 7.11, все строки матрицы совпадают с $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{smallmatrix} \right)$ с точностью до перестановки координат. Напомним, что, по лемме 4.12, перестановка строк и столбцов матрицы T не влияет на свойство $(*)$.

Переставим столбцы матрицы T так, что $T_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Переставим строки, начиная со второй, так, что $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$. По следствию 7.9, $\{t_{22}, t_{32}\} = \{-1, 0\}$. Переставим, если необходимо, $T_{(2)}, T_{(3)}$ так, чтобы получить $t_{22} = 0$. Тогда $t_{32} = -1$. Аналогично доказывается, что $\{t_{23}, t_{33}\} = \{-1, 0\}$. Но в строке $T_{(2)}$ элемент 0 находится только в столбце $T^{(2)}$. Тогда $t_{23} = -1$, $t_{33} = 0$ и $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & 0 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$.

Из структуры столбцов T следует, что $\{t_{42}, t_{52}\} = \{-1, 1\}$. Переставим, если необходимо, строки $T_{(4)}$ и $T_{(5)}$, чтобы получить $t_{42} = -1$, $t_{52} = 1$. Аналогично, $\{t_{43}, t_{53}\} = \{-1, 1\}$. Но в строке $T_{(4)}$ элементы -1 расположены только в столбцах $T^{(1)}, T^{(2)}$. Значит, $t_{43} = 1$, $t_{53} = -1$ и $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & 0 & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$.

Из структуры строк T получаем, что $\{t_{24}, t_{25}\} = \{-1, 1\}$. Переставим, если необходимо, столбцы $T^{(4)}$ и $T^{(5)}$ так, чтобы получить $t_{24} = -1, t_{25} = 1$. Аналогично, $\{t_{34}, t_{35}\} = \{-1, 1\}$. Но в столбце $T^{(4)}$ элементы -1 расположены только в строках $T_{(1)}, T_{(2)}$. Значит, $t_{34} = 1$, $t_{35} = -1$ и $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$.

Из структуры столбцов T следует, что $t_{44} \in \{0, 1\}$. Если $t_{44} = 0$, то $t_{45} = t_{54} = 1$ и $t_{55} = 0$. Если же $t_{44} = 1$, то $t_{45} = t_{54} = 0$ и $t_{55} = 1$.

Таким образом, с точностью до перестановки строк и столбцов матрицы T, имеем $T \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. □

Лемма 7.13. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^5$ задан матрицей $T = P_1 A P_2$ для некоторых $P_1, P_2 \in P(5)$ и*

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов.

Доказательство. Ввиду леммы 4.13, можно предположить, что $P_1 = P_2 = I$. Тогда $T \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Так как столбцы T совпадают с точностью до перестановки строк, то $e^t T^{(j1)} = e^t T^{(j_2)}$ и $(T^{(j_1)})^+ = (T^{(j_2)})^+$ для любых $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$.

Рассмотрим произвольные $j_1, j_2 \in \mathcal{N}$ и проверим, что $2 = (T^{(1)} + T^{(2)})^+ = (T^{(j_1)} + T^{(j_2)})^+$. С точностью до перестановки координат, имеем $T^{(j_1)} + T^{(j_2)} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Значит, $(T^{(j_1)} + T^{(j_2)})^+ = 2$. Заметим также, что $(T^{(j_1)} + T^{(j_2)})^- = -2$.

Рассмотрим произвольные различные $j_1, j_2, j_3 \in \mathcal{N}$. Пусть j_4, j_5 дополняют j_1, j_2, j_3 до множества $\mathcal{N}$. Тогда

$$\Big(\sum_{i=1}^{3} T^{(j_i)}\Big)^+ = \Big(\sum_{j=1}^{5} T^{(j)} - \sum_{i=4}^{5} T^{(j_i)}\Big)^+$$
$$= \Big(-(T^{(j_4)} + T^{(j_5)})\Big)^+ = -\Big(T^{(j_4)} + T^{(j_5)}\Big)^- = 2 = \sum_{j=1}^{3} T^{(j)}.$$

Рассмотрим произвольные различные $j_1, j_2, j_3, j_4 \in \mathcal{N}$. Пусть j_5 дополняет j_1, j_2, j_3, j_4 до множества $\mathcal{N}$. Тогда

$$(\sum_{i=1}^{4} T^{(j_i)})^+ = (\sum_{j=1}^{5} T^{(j)} - T^{(j_5)})^+ = (-T^{(j_5)})^+ = 2.$$

В итоге, получаем, что ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов по теореме 4.4. □

Теорема 7.14. *Пусть ϕ – $(0, \pm 1)$-оператор на $\mathbb{R}^5$. Тогда ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов, если и только если выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *ϕ сохраняет векторную мажоризацию;*
(2) *столбцы $[\phi]$ эквивалентны и совпадают с точностью до перестановки строк;*
(3) *$[\phi] = P_1 A P_2$ для некоторых $P_1, P_2 \in P(5)$ и*

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Доказательство. Предположим, что ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Если ϕ сохраняет векторную мажоризацию, то выполнено утверждение (1). Предположим, что ϕ не сохраняет векторную мажоризацию. По лемме 7.1, столбцы $[\phi]$ совпадают с точностью до перестановки. Если столбцы $[\phi]$ эквивалентны, то выполнено утверждение (2). В противном случае, ϕ удовлетворяет условию $(*)$, и утверждение (3) выполнено по лемме 7.12.

Докажем обратную импликацию. Если выполнено утверждение (1), то ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Если выполнено утверждение (2), то ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов по следствию 7.2. Наконец, если выполнено утверждение (3), то ϕ сохраняет столбцовую мажоризацию $(0,1)$-векторов по лемме 7.13. $\square$

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Александру Эмилевичу Гутерману за постановку задачи и интересные и полезные обсуждения.

Список литературы

1. А. Э. Гутерман, П. М. Штейнер, *Линейные отображения, сохраняющие мажоризацию наборов матриц.* — Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия **7**, No. 2 (2020), 217–229.
2. П. М. Штейнер, *Конвертация столбцовой мажоризации.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 195–215.
3. П. М. Штейнер, *Линейные отображения, сохраняющие некоторые комбинаторные матричные множества.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **504** (2021), 181–199.
4. П. М. Штейнер, *Линейные операторы, сохраняющие и конвертирующие мажоризации* $(0,1)$*-векторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 204–220.
5. T. Ando, *Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues.* — Linear Algebra Appl. **118** (1989), 163–248.
6. L. B. Beasley, S.-G. Lee, Y.-H. Lee, *A characterization of strong preservers of matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **367** (2003), 341–346.
7. L. B. Beasley, S.-G. Lee, *Linear operators preserving multivariate majorization.* — Linear Algebra Appl. **304**, No. 1 (2000), 141–159.
8. R. Brualdi, H. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, 1991.
9. R. Brualdi, *Combinatorial Matrix Classes, Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, 2006.
10. G. Dahl, *Matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **288** (1999), 53–73.
11. G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner, *Majorization for matrix classes.* — Linear Algebra Appl. **555** (2018), 201–221.

12. G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner, *Majorization for* $(0,1)$*-matrices.* — Linear Algebra Appl. **585** (2020), 147–163.
13. G. Frobenius, *Uber die Darstellung der endlichen Gruppen durch linear Substitutionen.* — Sitz. Deutsch. Akad. Wiss., Berlin (1897), 994–1015.
14. A. Guterman, P. Shteyner, *Linear converters of weak, directional and strong majorizations.* — Linear Algebra Appl. **613** (2021), 340–346.
15. A. Guterman, P. Shteyner, *Linear operators preserving strong majorization of* $(0,1)$*-matrices.* — Linear Algebra Appl. **658** (2023), 116–150.
16. A. M. Hasani, M. Radjabalipour, *Linear preserver of matrix majorization.* — Int. J. Pure Appl. Math. **32**, No. 4 (2006), 475–482.
17. A. M. Hasani, M. Radjabalipour, *On linear preservers of* (*right*) *matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **423** (2007), 255–261.
18. C.-K. Li, S. Pierce, *Linear preserver problems.* — Amer. Math. Monthly **108**, No. 7 (2001), 591–605.
19. C.-K. Li, E. Poon, *Linear operators preserving directional majorization.* — Linear Algebra Appl. **325**, No. 1 (2001), 141–146.
20. A. W. Marshall, I. Olkin, B. C. Arnold, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, second edition. Springer, New York, 2011.
21. F. D. Martinez Peria, P. G. Massey, L. E. Silvestre, *Weak matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **403** (2005), 343–368.
22. S. Pierce et al., *A survey of linear preserver problems.* — Linear Multilinear Algebra **33**, No. 1–2 (1992), 1–119.

Shteyner P. M. Linear operators preserving column majorization of $(0,1)$-vectors.

The paper provides a characterization of linear operators preserving column majorization of $(0,1)$-vectors. In addition, such operators are characterized explicitly in the case where they are given by special matrices, namely, (± 1)-matrices of order not exceeding 10 or $(0,\pm 1)$-matrices of order not exceeding 5. A number of related combinatorial-matrix-theory results are also proved.

Университет им. Бар-Илана,
5290002, Рамат-Ган, Израиль
E-mail: pashteiner@ya.ru

Поступило 12 октября 2023 г.