Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 524, 2023 г.

В. Н. Чугунов

ОБ ОТСУТСТВИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О σ-КОММУТИРОВАНИИ ($\sigma \neq 0, \pm 1$) ТЕПЛИЦЕВОЙ И ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦ В СПЕЦИАЛЬНОМ КЛАССЕ

§1. Введение

Понятие σ-коммутирования матриц является достаточно новым в линейной алгебре и мало изученным.

Матрицы K и M σ-коммутируют (или квазикоммутируют), если найдется такое число σ, что $KM = \sigma MK$ (см. [1]). В той же работе [1] отмечается, что квазикоммутативность является важным соотношением в квантовой физике [2, 3], а также в теории представлений аффинных алгебр Гекке (Hecke) [4].

Задача о σ-коммутировании теплицевой и ганкелевой матриц заключается в описании пар ненулевых матриц (T, H) таких, что T – теплицева, H – ганкелева и выполняется соотношение

$$TH = \sigma HT. \tag{1}$$

Произвольный выбор σ возможен лишь в случае, когда хотя бы одна из матриц T или H вырождена. Если же обе матрицы невырождены, то σ является одним из корней n-ой степени из единицы. В данной работе от параметра σ мы требуем, чтобы $\sigma \neq 0, \pm 1$.

Заметим, что поскольку след произведения двух матриц не меняется при перестановке сомножителей и $\sigma \neq 1$, то матрицы TH и HT имеют нулевой след.

Хотя задача о σ-коммутировании теплицевой и ганкелевой матриц пока не имеет полного решения, в [5] были описаны некоторые частные множества решений.

Ключевые слова: теплицева матрица, ганкелева матрица, σ-коммутирование.

Работа автора поддержана Московским центром фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (Соглашение No. 075-15-2022-286 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации).

Теорема 1 ([5]). *Ненулевые теплицева матрица T и ганкелева матрица H σ-коммутируют ($\sigma \neq 0, \pm 1$), если T и H входят хотя бы в один из описываемых ниже классов.*

Класс 1. *Матрица T является циркулянтом,*

$$T = F_n{}^* D_1 F_n,$$

а H – ганкелевым циркулянтом,

$$H = F_n{}^* D_2 F_n \mathcal{P}_n.$$

Здесь F_n – (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ – первообразный корень n-ой степени из единицы; $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы; при этом

$$d_1^{(2)} d_1^{(1)} = 0,$$
$$d_j^{(2)} \left(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+2-j}^{(1)}\right) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Класс 2. *Матрица T является косым циркулянтом,*

$$T = G_{-1} F_n{}^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

а H – ганкелевым косым циркулянтом,

$$H = G_{-1} F_n{}^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n,$$

где

$$G_{-1} = \operatorname{diag}(1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{n-1}),$$

$\psi = e^{\frac{i\pi}{n}}$ есть корень n-ой степени из -1. Диагональные матрицы $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}\right)$ должны удовлетворять соотношениям

$$d_1^{(2)} \left(d_1^{(1)} - \sigma d_2^{(1)}\right) = 0, \qquad d_2^{(2)} \left(d_2^{(1)} - \sigma d_1^{(1)}\right) = 0,$$
$$d_j^{(2)} \left(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+3-j}^{(1)}\right) = 0, \qquad j = 3, 4, \dots, n.$$

Класс 3. *Пусть $n = 2r$, а матрицы T и H имеют вид*

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \sigma\mathcal{P}_r \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{P}_r$ есть так называемая перъединичная $r \times r$ матрица,

$$\mathcal{P}_r = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$

α и β – произвольные числа, $0_{r,r}$ – нулевая $r \times r$ матрица.

Класс 4. *Пусть $n = 2r$, матрицы T и H имеют вид*

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \sigma\mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \mathcal{P}_r \end{pmatrix}.$$

Здесь α и β – произвольные числа.

Данные множества были получены из различных соображений. Позднее, в работе [6], был предложен унифицированный подход к получению полного набора требуемых матриц. Сущность его состоит в сужении множества всех пар матриц (T, H) до множеств, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи, после чего задача о σ-коммутировании исследуется на каждой конкретной более узкой комбинации наборов (T, H). Основную роль в этом процессе играет следующее утверждение.

Лемма 1 ([6]). *Всякую пару (T, H), решающую задачу о σ-коммутировании теплицевой и ганкелевой матриц, можно представить в виде*

$$\begin{cases} T = \alpha_1 \left(A - \sigma A^\top \right), \\ H = \beta_1 B \mathcal{P}_n, \end{cases} \tag{2}$$

где A и B – нескалярные теплицевы матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} AB = BA, \\ A^\top B + BA^\top = \mu AB, \\ \mu = \frac{1+\sigma^2}{\sigma}, \\ \mu \neq \pm 2, \end{cases} \tag{3}$$

а α_1, β_1 – произвольные числа.

Сформулированная лемма позволяет считать основным уравнением соотношение

$$A^\top B + BA^\top = \mu AB. \tag{4}$$

Заметим, что в данном уравнении матрицы A и B определены с точностью до скалярного множителя.

Для упрощения уравнения (4) воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2 ([7]). *Две нескалярные теплицевы матрицы $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$ коммутируют тогда и только тогда, когда $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$ принадлежат хотя бы одному из следующих классов:*

Класс КТМ_1. *Матрицы $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$ обе верхнетреугольные или же обе нижнетреугольные.*

Класс КТМ_2. *Матрицы $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$ суть φ-циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$.*

Класс КТМ_3. *Одна из матриц $\widetilde{T}_1$ или $\widetilde{T}_2$ является линейной функцией от другой.*

Согласно приведенной лемме, для коммутирующих теплицевых матриц A и B возможны лишь следующие четыре случая: 1) обе матрицы A и B являются верхними треугольными; 2) обе матрицы A и B – нижние треугольные; 3) обе матрицы A и B суть φ-циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$; 4) $B = \gamma A + \delta I_n$.

Целью данной работы является применение унифицированного подхода к конструированию пар матриц (T, H), решающих задачу о σ-коммутировании теплицевой и ганкелевой матриц, для исследования наличия новых классов решений при определенных ограничениях. А именно, будет исследован случай, когда обе матрицы A и B являются верхними или нижними треугольными. Главным результатом является сформулированная в §2 теорема 2 об отсутствии решений рассматриваемой задачи среди пар (T, H) в конкретном подмножестве; доказательство теоремы 2 приводится в §3.

Введем обозначение. Если T – теплицева $n \times n$ матрица, то ее первая строка имеет вид $(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$, а первый столбец имеет вид $(t_0, t_{-1}, \ldots, t_{-(n-1)})^\top$.

§2. Главный результат

Теорема 2. *Если нескалярные теплицевы матрицы A и B являются верхними или нижними треугольными одновременно, то решение* *уравнения* (4) *не дает классов пар σ-коммутирующих теплицевой и ганкелевой матриц.*

§3. Обоснование главного результата

Пусть сначала матрицы A и B верхние треугольные. В этом случае, A и B имеют нулевые элементы с отрицательными индексами. Рассмотрим основное уравнение (4). Матрица в правой части является теплицевой, значит и матрица в левой части должна быть теплицевой:

$$\left\{A^\top B + BA^\top\right\}_{k,m} = \left\{A^\top B + BA^\top\right\}_{k+1,m+1}, \quad k,m = 1,\dots,n-1.$$

Подробная запись последнего равенства

$$\sum_{l=1}^{n} \left\{A^\top\right\}_{k,l} \{B\}_{l,m} + \sum_{l=1}^{n} \{B\}_{k,l} \left\{A^\top\right\}_{l,m} - \sum_{l=1}^{n} \left\{A^\top\right\}_{k+1,l} \{B\}_{l,m+1} - \sum_{l=1}^{n} \{B\}_{k+1,l} \left\{A^\top\right\}_{l,m+1} = 0,$$

в силу теплицевости A и B, эквивалентна условию

$$\sum_{l=1}^{n} a_{k-l} b_{m-l} + \sum_{l=1}^{n} b_{l-k} a_{l-m} - \sum_{l=1}^{n} a_{k+1-l} b_{m+1-l} - \sum_{l=1}^{n} b_{l-k-1} a_{l-m-1} = 0.$$

Заменим индекс суммирования l на p, полагая $p = l$ в первой и второй суммах и $p = l - 1$ в третьей и четвертой суммах:

$$\sum_{p=1}^{n} a_{k-p} b_{m-p} + \sum_{p=1}^{n} b_{p-k} a_{p-m} - \sum_{p=0}^{n-1} a_{k-p} b_{m-p} - \sum_{p=0}^{n-1} b_{p-k} a_{p-m} = 0.$$

Выполняя элементарные преобразования, приходим к равенству

$$a_{-(n-k)} b_{-(n-m)} - a_k b_m + b_{n-k} a_{n-m} - b_{-k} a_{-m} = 0,$$

которое, в силу верхней треугольности A и B, идентично соотношению

$$b_{n-k} a_{n-m} - a_k b_m = 0,$$

а после замены m на $n-m$ – условию

$$a_k b_{n-m} - a_m b_{n-k} = 0. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение вспомогательную $(n-1)\times 2$ матрицу $\mathcal{F}$, задавая ее формулой

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} a_1 & b_{n-1} \\ a_2 & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & b_1 \end{bmatrix}.$$

Так как матрицы A и B не являются скалярными, то у матрицы $\mathcal{F}$ нет нулевых столбцов, поэтому $\operatorname{rank}\mathcal{F} \geqslant 1$. В силу (5), все миноры второго порядка у матрицы $\mathcal{F}$ равны нулю, значит $\operatorname{rank}\mathcal{F} = 1$. Так как матрицы A и B могут быть определены по условию задачи с точностью до скалярного кратного, то, не ограничивая общности, можно считать, что матрица $\mathcal{F}$ имеет одинаковые столбцы.

Определим вспомогательные матрицы. Пусть U и U^c – строго верхние треугольные теплицевы матрицы с элементами первых строк $0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ и $0, u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_1$ соответственно. Тогда

$$A = a_0 I_n + U, \quad B = b_0 I_n + U^c. \tag{6}$$

Теперь исследуемое уравнение принимает вид

$$\left(a_0 I_n + U^\top\right)\left(b_0 I_n + U^c\right) + \left(b_0 I_n + U^c\right)\left(a_0 I_n + U^\top\right) = \mu\left(a_0 I_n + U\right)\left(b_0 I_n + U^c\right).$$

Умножив обе части уравнения на вектор e_1, будем иметь

$$b_0\left(a_0 I_n + U^\top\right)e_1 + \left(b_0 I_n + U^c\right)\left(a_0 I_n + U^\top\right)e_1 = \mu a_0 b_0 e_1,$$

или

$$\left(2b_0 I_n + U^c\right)\left(a_0 I_n + U^\top\right)e_1 = \mu a_0 b_0 e_1. \tag{7}$$

Для обоснования дальнейших рассуждений сделаем важное замечание. Пусть U_j, $j = 1, 2, 3,$ – верхние треугольные теплицевы матрицы с последними столбцами x_j соответственно. Тогда условие $U_1 U_2 = U_3$ эквивалентно соотношению $U_1 x_2 = x_3$.

Применяя данное замечание для матрицы $U_1 = 2b_0 I_n + U^c$, $x_2 = \left(a_0 I_n + U^\top\right)e_1$, $x_3 = \mu a_0 b_0 e_1$ и вводя дополнительную верхнюю треугольную матрицу V с первой строкой $u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_1, a_0$, приходим к матричной форме условия (7):

$$\left(2b_0 I_n + U^c\right)V = \mu a_0 b_0 e_1 e_n^\top. \tag{8}$$

Подробная запись (8) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2b_0 & u_{n-1} & u_{n-2} & u_{n-3} & \dots & u_1 \\ & 2b_0 & u_{n-1} & u_{n-2} & \dots & u_2 \\ & & 2b_0 & u_{n-1} & \dots & u_3 \\ & & & 2b_0 & \dots & u_4 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 2b_0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_{n-2} & u_{n-3} & \dots & u_1 & a_0 \\ & u_{n-1} & u_{n-2} & \dots & u_2 & u_1 \\ & & u_{n-1} & \dots & u_3 & u_2 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & u_{n-1} & u_{n-2} \\ & & & & & u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & & \mu a_0 b_0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}.$$

Предположим сначала, что $b_0 \neq 0$, тогда матрица $2b_0 I_n + U^c$ невырождена, ранг матрицы $\mu a_0 b_0 e_1 e_n^\top$ не превосходит единицы, и соотношение (8) приводит к условию $U = 0$, которое означает скалярность матриц A и B, что противоречит рассматриваемому случаю. Значит, $b_0 = 0$.

Приходим к ситуации, когда матрица в правой части (8) нулевая. Чтобы и левая часть (8) была нулевой, необходимо потребовать обращение в нуль несколько первых столбцов в матрицах $2b_0 I_n + U^c$ и V. Для этого для некоторого числа j наложим ограничения $u_{n-1} = u_{n-2} = \dots = u_{j+1} = 0$, которые означают, что матрица $2b_0 I_n + U^c$ имеет нулевыми первые $n - j$ столбцов, а матрица V – первые $n - j - 1$ столбцов. Теперь для удовлетворения равенства (8) должно выполняться условие $2n - 2j - 1 \geqslant n + 1$, или $j \leqslant n - j - 2$.

Сама матрица B также имеет нулевыми первые $n - j$ столбцов. Тогда то же самое можно сказать про матрицы $A^\top B$ и μAB, и, в силу (4), о матрице $BA^\top$. При этом $n - j > j$. Обозначим через B_j $j \times j$ подматрицу в матрице B, расположенную в правом верхнем углу, а через Z – подматрицу в матрице $BA^\top$, расположенную в тех же строках $1, 2, \dots, j$ и столбцах $n - 2j + 1, n - 2j + 2, \dots, n - j$. Ненулевой вклад в Z могут давать лишь B_j и $j \times j$ подматрица M в матрице $A^\top$, расположенная в последних j строках и столбцах $n - 2j + 1, n - 2j + 2, \dots, n - j$. В силу (6), справедливы равенства $\{A^\top\}_{n,n-j} = u_j$, $\{A^\top\}_{n-1,n-j} = u_{j-1}, \dots$, $\{A^\top\}_{n-j+1,n-j} = u_1$ и $\{A^\top\}_{n,n-j-1} = u_{j+1}, \dots$, $\{A^\top\}_{n,n-2j+1} = u_{2j-1}$, которые означают совпадение M с B_j. Значит, $Z = B_j^2$. Так как Z расположена в столбцах $n - 2j + 1, n - 2j + 2, \dots, n - j$, то $Z = 0$, поэтому $u_j = u_{j-1} = \dots = u_{p+1} = 0$, где $p = \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$. Следовательно, на самом деле j гораздо меньше. Вычитая из j величину $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ и проводя аналогичные рассуждения, получаем, что j можно еще уменьшить. Повторяя эти выкладки несколько раз, приходим к условиям $U = U^c = 0$, A и B – скалярные матрицы. Получаем, что случай верхнетреугольных матриц A и B не дает решений уравнения (4).

Пусть теперь матрицы A и B нижние треугольные. Протранспонируем уравнение (4):

$$\left(A^\top\right)^\top \left(B^\top\right) + \left(B^\top\right) \left(A^\top\right)^\top = \mu \left(A^\top\right) \left(B^\top\right).$$

Проводя предыдущие рассуждения для верхнетреугольных матриц $A^\top$ и $B^\top$, получаем, что A и B – скалярные матрицы. Этот случай также не дает решений. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. A. E. Guterman, O. V. Markova, V. Mehrmann, *Length realizability for pairs of quasi-commuting matrices.* — Linear Algebra Appl. **568** (2019), 135–154.
2. C. Kassel, *Quantum Groups* (Grad. Texts in Math. **155**), Springer-Verlag, New York, 1995.
3. Yu. I. Manin, *Quantum Groups and Non-Commutative Geometry*, CRM, Montréal, 1988.
4. N. Chriss, V. Ginzburg, *Representation Theory and Complex Geometry*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1997.
5. В. Н. Чугунов, *О некоторых множествах пар σ-коммутирующих ($\sigma \neq 0, \pm 1$) теплицевой и ганкелевой матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 288–294.
6. В. Н. Чугунов, Х. Д. Икрамов, *Об одном частном решении задачи о σ-коммутировании ($\sigma \neq 0, \pm 1$) теплицевой и ганкелевой матриц.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **63**, No. 11 (2023), 1817–1828.
7. В. И. Гельфгат, *Условия коммутирования теплицевых матриц.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **38**, No. 1 (1998), 11–14.

Chugunov V. N. Absence of solutions to the σ-commutation problem ($\sigma \neq 0, \pm 1$) for Toeplitz and Hankel matrices in a special class.

It is established that the σ-commutation problem for Toeplitz and Hankel matrices has no solutions in a particular subset.

ИВМ РАН, Москва, Россия

E-mail: chugunov.vadim@gmail.com

Поступило 28 августа 2023 г.