Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 524, 2023 г.

Л. П. Лившиц, А. А. Макаров, С. В. Макарова

О КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МИНИМАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ

Светлой памяти Юрия Казимировича Демьяновича посвящаем

§1. Введение

Понятие *сплайна* как кусочно-полиномиальной функции введено И. Шенбергом [32]. Классический подход к построению интерполяционных сплайнов подразумевает решение системы линейных алгебраических уравнений, порядок которой определяется количеством интерполяционных условий, необходимых для решения той или иной задачи интерполяции (задачи Лагранжа, Эрмита или Эрмита–Биркгофа) в классе функций с "кусочными" свойствами с определенной гладкостью в узлах рассматриваемой сетки. Принципиальным достижением этой теории стало построение B-сплайнов (*базисных* сплайнов), которые при заданной гладкости имеют минимальный носитель. Это обеспечивает при введении новых узлов интерполяции лишь локальное изменение интерполирующего сплайна. При этом аппроксимационные свойства и вычислительная простота получаемых сплайнов всякий раз исследуются дополнительно [23, 33].

Исторически самый первый и в то же время один из самых простых примеров приближения сплайнами – это непрерывная кусочно-линейная интерполяция, представляющая собой ломанную Эйлера [10]. Вообще говоря, такой метод приближения является *локальным* методом аппроксимации, не требующим решения огромной системы линейных алгебраических уравнений, которая может быть заменена решением нескольких систем небольшого размера. В локальных методах коэффициенты при базисных функциях определяются как значения аппроксимационных функционалов, представляющих из

Ключевые слова: минимальные сплайны, интерполяция, аппроксимация.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Проект No. FSEE-2021-0015).

себя, например, линейные комбинации значений приближаемой функции и ее производных в нескольких точках. Однако это не обязательно ведет к потере точности приближения. Локальные схемы, в которых достигается максимальный порядок точности, называют квазиинтерполяцией [1, 24]. При решение большинства прикладных задач используются методы теории приближений и численного анализа, так или иначе связанные с локальной аппроксимацией (подробнее см., например, [13, 14, 21, 22, 25, 29, 31, 35]).

Сами локальные базисные функции можно определять, например, решая системы линейных алгебраических уравнений невысокого порядка. Такой подход появился в связи с теорией метода конечных элементов и применялся Дж. Гоэлом [26], Г. Стрэнгом и Дж. Фиксом [34], С. Г. Михлиным и Ю. К. Демьяновичем [2, 9, 18]. Подход Михлина–Демьяновича к построению полиномиальных сплайнов, удовлетворяющих *аппроксимационным соотношениям* и имеющих заданную гладкость, ориентирован на построение простейших аппроксимационных формул. При этом сначала минимизируется *кратность накрытия* (так называется минимальная кратность перекрытия носителей базисных функций) базисных сплайнов, а затем степень сплайнов. Построенные таким образом функции называются *минимальными сплайнами* для данных аппроксимационных соотношений и для заданной гладкости. Ввиду важности этих соотношений С. Г. Михлин [18] называл их *фундаментальными*. Если воспользоваться аппроксимационными соотношениями интерполяционного характера, то получаются аппроксимации, точные на полиномах определенной степени (показатель этой степени называется *порядком точности*). Отсюда можно найти минимальные сплайны с локальным интерполяционным базисом. Весьма важной характеристикой аппроксимации является число входящих в нее производных приближаемой функции. Это число называется *высотой аппроксимации*. Сплайн нулевой высоты использует значения приближаемой функции, но не использует ее производных; такой сплайн называется *лагранжевым*. Сплайн, использующий последовательные i-ые производные приближаемой функции ($i = 0, 1, \ldots, H$, где $H \in \mathbb{N}$) называется *эрмитовым* или *сплайном высоты* H. Обобщению аппроксимационных соотношений и развитию на их основе общей теории минимальных сплайнов (как с локальным интерполяционным базисом, так и с аппроксимационным; как полиномиальных, так и неполиномиальных) посвящены работы Ю. К. Демьяновича [3–5], его учеников и коллег (подробнее см. [6, 12, 15, 27] и цитируемую там литературу). В них построенные аппроксимации обладают свойством точности на степенях заданной произвольной достаточно гладкой функции.

Естественно, что получаемые из аппроксимационных соотношений классы сплайнов имеют непустое пересечение со сплайнами, получаемыми при использовании других подходов. Например, минимальными сплайнами являются хорошо известные полиномиальные B-сплайны, что подчеркивает глубокую связь подходов Шенберга и Михлина–Демьяновича. Сплайны В. С. Рябенького [19] представляют собой минимальные лагранжевы сплайны, порядки гладкости и точности которых совпадают. Классические эрмитовы сплайны являются частным случаем минимальных эрмитовых сплайнов. Известные квадратичные и кубические непрерывные конечно-элементные аппроксимации [20] оказываются в классе минимальных сплайнов. Кусочно-полиномиальные функции Дженкинса, известные в теории оскуляторной интерполяции, являются частными случаями минимальных сплайнов [8]. Другие примеры см., например, в [7, 11, 28].

В данной работе рассматриваются минимальные сплайны, полученные из аппроксимационных соотношений с использованием полной цепочки векторов и порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$. Определенный способ выбора полной цепочки векторов позволяет рассмотреть минимальные сплайны, обладающие свойством максимальной гладкости ($B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны), и установить единственность пространства таких сплайнов среди множества пространств минимальных сплайнов (определяемых произвольным выбором упомянутой цепочки векторов при заданной сетке и заданной порождающей вектор-функции).

Целью данной работы является изучение квазилинейной интерполяции минимальными сплайнами (максимальной гладкости), которые строятся на неравномерных сетках с кратными узлами. В работе получены асимптотические представления для нормализованных сплайнов. Доказаны теоремы о точности биортогональной аппроксимации и о порядке точности квазилинейной интерполяции относительно шага сетки. Приведены результаты численных экспериментов по приближению некоторых тестовых функций в зависимости от выбора порождающей вектор-функции для построения соответствующего минимального сплайна.

§2. Пространство координатных сплайнов

Пусть $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}^1$ – множества целых и вещественных чисел соответственно. Через $C^r[a,b]$ обозначим множество r раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций, полагая $C^0[a,b] := C[a,b]$. Пространство кусочно-непрерывных функций с конечным числом разрывов первого рода на отрезке $[a,b]$ обозначим через $C^{-1}[a,b]$; при этом будем считать, что каждая функция этого пространства непрерывна слева.

На отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X с двумя дополнительными узлами вне отрезка $[a,b]$:

$$X : x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b < x_{n+1}. \qquad (1)$$

Введем обозначение $J_{i,k} := \{i, i+1, \ldots, k\}$, $i, k \in \mathbb{Z}$, $i < k$. Упорядоченное множество векторов $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^2 \mid j \in J_{-1,n-1}\}$ будем называть *цепочкой* векторов. Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной*, если квадратные матрицы $(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)$, составленные из векторов $\mathbf{a}_{j-1}$ и $\mathbf{a}_j$, являются невырожденными:

$$\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0, \quad j \in J_{-1,n-1}. \qquad (2)$$

Объединение всех элементарных сеточных интервалов обозначим через $M := \cup_{j \in J_{-1,n}} (x_j, x_{j+1})$. Пусть $\mathbb{X}(M)$ – линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M.

Пусть $\mathbf{A}$ – полная цепочка векторов. Для заданной вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ определим функции $\omega_j \in \mathbb{X}(M)$, $j \in J_{-1,n-1}$, из следующих соотношений:

$$\begin{gathered}\sum_{j'=k-1}^{k} \mathbf{a}_{j'}\, \omega_{j'}(t) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t), \quad t \in (x_k, x_{k+1}), \quad k \in J_{-1,n-1}, \\ \omega_j(t) \equiv 0, \qquad t \notin [x_j, x_{j+2}] \cap M.\end{gathered} \qquad (3)$$

Для каждого фиксированного $t \in (x_k, x_{k+1})$ соотношения (3) могут быть рассмотрены как система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. В силу предположения (2), система (3) однозначно разрешима, при этом $\operatorname{supp} \omega_j(t) \subset [x_j, x_{j+2}]$.

По формулам Крамера из системы линейных алгебраических уравнений (3) находим

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \boldsymbol{\varphi}(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\det(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$ называется *пространством минимальных координатных* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов*, которое мы будем обозначать через $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$. Тождества (3) называются *аппроксимационными соотношениями*. Вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется *порождающей* или *генерирующей* вектор-функцией для $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$-сплайнов. Термин *координатные сплайны* используем для функций, являющихся базисом сплайнового пространства (для того, чтобы не применять термин «базисные сплайны», который у разных авторов имеет различный смысл). Функции ω_j, являющиеся решением аппроксимационных соотношений вида (3), называем минимальными координатными сплайнами *лагранжева типа*.

Рассмотрим цепочку $\mathbf{A}$, определяемую формулой

$$\mathbf{a}_j := \boldsymbol{\varphi}_{j+1} = (1, \rho_{j+1})^T, \tag{5}$$

в которой порождающая вектор-функция задается равенством $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, \rho(t))^T$. Здесь через T обозначено транспонирование; $\boldsymbol{\varphi}_j := \boldsymbol{\varphi}(x_j)$, $\rho_j := \rho(x_j)$, $j \in J_{-1,n-1}$. Функцию $\rho(t)$ будем также называть *порождающей*.

Далее будем считать, что функция $\rho(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\rho \in C^1[a,b], \quad \rho'(t) \neq 0, \quad t \in [a,b]. \tag{6}$$

Полнота цепочки (5) очевидна. Левая часть соотношения (2), в силу формулы конечных приращений, может быть записана в виде

$$\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) = \rho_{j+1} - \rho_j = \rho'(\theta)(x_{j+1} - x_j), \quad \theta \in (x_j, x_{j+1}),$$

откуда ясно, что если функция $\rho(t)$ строго монотонна на отрезке $[a,b]$, то цепочка (5) является полной. Для сетки (1) это вытекает из условий (6).

Для полной цепочки (5) формулы (4) принимают следующий вид:

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\det(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}(t))}{\det(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_{j+1})} = \dfrac{\rho(t) - \rho_j}{\rho_{j+1} - \rho_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\det(\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\varphi}_{j+2})}{\det(\boldsymbol{\varphi}_{j+1}, \boldsymbol{\varphi}_{j+2})} = \dfrac{\rho_{j+2} - \rho(t)}{\rho_{j+2} - \rho_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases} \tag{7}$$

Непрерывность функций (7) на множестве элементарных сеточных интервалов M обеспечивается непрерывностью функции $\rho(t)$. В узлах сетки непрерывность непосредственно следует из равенства

$$\omega_j(x_i) = \delta_{j,i-1}, \tag{8}$$

где $\delta_{j,i}$ – символ Кронекера.

Как установлено выше, ввиду условия (6), функция $\rho(t)$ строго монотонна. Поэтому функции (7) положительны внутри носителя, т.е.

$$\omega_j(t) > 0, \quad t \in (x_j, x_{j+2}). \tag{9}$$

Для функций (7) справедливо свойство *разбиения единицы*:

$$\sum_{j=-1}^{n-1} \omega_j(t) \equiv 1, \quad t \in [a, b], \tag{10}$$

получаемое покомпонентным рассмотрением аппроксимационных соотношений.

Для удобства, далее компоненты векторов будем обозначать квадратными скобками и нумеровать целыми неотрицательными числами. Например, вектор $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^2$ можно записать в виде $\mathbf{a}_j := ([\mathbf{a}_j]_0, [\mathbf{a}_j]_1)^T$. Тогда, в силу формулы (5), имеем $[\mathbf{a}_j]_0 = 1$ и $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 = 1$. Следовательно, коэффициент перед функцией $\omega_j(t)$ и правая часть в формуле (3) равны 1, и потому выполняется свойство (10).

Пространство $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$, в котором цепочка $\mathbf{A}$ определяется через вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi}(t)$ по формуле (5) при условии (6), обозначается через

$$\mathbb{S}(X) := \Big\{ u \mid u = \sum_{j=-1}^{n-1} c_j\, \omega_j, \ \ c_j \in \mathbb{R}^1 \Big\}$$

и называется *пространством нормализованных линейных минимальных координатных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов (второго порядка)* на сетке X. Сами сплайны будем называть *нормализованными минимальными координатными сплайнами максимальной гладкости.*

Если порождающую вектор-функцию задать равенством $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t)^T$, т.е. в формуле (5) положить $\rho(t) = t$, то функции (7) совпадут с известными полиномиальными B-сплайнами первой степени (второго порядка), т.е. с одномерными функциями Куранта:

$$\omega_j^B(t) = \begin{cases} \dfrac{t - x_j}{x_{j+1} - x_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{x_{j+2} - t}{x_{j+2} - x_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases} \tag{11}$$

В случае полиномиальных компонент порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ можно говорить о степени сплайна. Очевидно, что полиномиальные сплайны максимальной гладкости (11) являются сплайнами первой степени, т.е. линейными сплайнами. Разность между степенью полиномиального сплайна и порядком его наивысшей непрерывной производной называется *дефектом* сплайна. Таким образом, сплайны (11) являются сплайнами с минимальным дефектом (равным 1).

§3. Сплайны с кратными узлами

Введем обозначения для шага и характеристики мелкости сетки (1):

$$h_j := x_{j+1} - x_j, \quad h := \max_j \{h_j\}, \quad j \in J_{-1,n}. \tag{12}$$

Предположим, что $h \to +0$. Будем использовать обозначение $o(1)$ для бесконечно малых при $h \to 0$, т.е. $o(1) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Далее потребуется разложение функции $\rho(t)$ по формуле Тейлора:

$$\rho(t) = \rho_{j+k} + (t - x_{j+k})\rho'_{j+k} + (t - x_{j+k})o(1). \tag{13}$$

Ясно, что для $t = x_{j+p}$ предыдущая формула принимает вид

$$\rho_{j+p} = \rho_{j+k} + (x_{j+p} - x_{j+k})\rho'_{j+k} + (x_{j+p} - x_{j+k})o(1). \tag{14}$$

Теорема 1. *Для функций $\omega_j(t)$ вида (7) справедливо асимптотическое представление*

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{t - x_j}{h_j}\left(1 + o(1)\right), & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{x_{j+2} - t}{h_{j+1}}\left(1 + o(1)\right), & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases} \tag{15}$$

Доказательство. Из представления (7) при $t \in [x_j, x_{j+1})$ для функции $\omega_j(t)$, используя разложения (13) и (14), находим

$$\omega_j(t) = \frac{(t - x_j)(\rho_j' + o(1))}{(x_{j+1} - x_j)(\rho_j' + o(1))} = \frac{t - x_j}{x_{j+1} - x_j}\,(1 + o(1))\,.$$

Аналогично, при $t \in [x_{j+1}, x_{j+2})$ имеем

$$\omega_j(t) = \frac{(t - x_{j+2})(\rho_{j+2}' + o(1))}{(x_{j+1} - x_{j+2})(\rho_{j+2}' + o(1))} = \frac{x_{j+2} - t}{x_{j+2} - x_{j+1}}\,(1 + o(1))\,.$$

Учитывая обозначения (12), находим искомое представление (15). □

Замечание 1. Главная часть асимптотики в разложении (15) совпадает с представлением B-сплайна (11).

На отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X_n:

$$x_{-1} \leqslant a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b \leqslant x_{n+1}. \tag{16}$$

Узлы сетки (16), значения которых совпадают, называются *кратными.* Если узел x_j в сетке X_n встречается k раз, т.е. $x_j = x_{j+1} = \ldots = x_{j+k-1}$, то он имеет кратность k.

Теорема 2. *В узлах кратности* 2 *функция* ω_j *принадлежит пространству* $C^{-1}[a, b]$*; при этом*

(1) *если* $x_j = x_{j+1} < x_{j+2}$, *то* $\omega_j(x_j + 0) = 1$*;*
(2) *если* $x_j < x_{j+1} = x_{j+2}$, *то* $\omega_j(x_{j+1} - 0) = 1$.

Доказательство. Ясно, что $\omega_j(x_j - 0) = 0$. В силу представления (15), справедлива цепочка равенств

$$\omega_j(x_j + 0) = \lim_{t \to x_{j+1} + 0} \frac{x_{j+2} - t}{h_{j+1}}(1 + o(1)) = 1,$$

откуда следует первое утверждение доказываемой теоремы. Второе утверждение устанавливается аналогичным образом. □

Замечание 2. Для сеток вида (1) результат теоремы 2 может иметь такую интерпретацию. В сетку (1) можно не вводить дополнительных узлов вне отрезка $[a, b]$. Тогда граничные функции ω_{-1} и ω_{n-1} должны быть определены следующими формулами:

$$\omega_{-1}(t) = \begin{cases} \dfrac{\rho_1 - \rho(t)}{\rho_1 - \rho_0}, & t \in [x_0, x_1), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\omega_{n-1}(t) = \begin{cases} \dfrac{\rho(t)-\rho_{n-1}}{\rho_n-\rho_{n-1}}, & t\in[x_{n-1},x_n],\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

§4. О приближении сплайнами

Рассмотрим некоторое линейное пространство $\mathfrak{U}$ над полем вещественных чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{U}^*$ линейных функционалов λ над пространством $\mathfrak{U}$. Значение функционала λ на элементе $u\in\mathfrak{U}$ обозначим через $\langle\lambda,u\rangle$.

Будем говорить, что система функционалов $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *биортогональна* системе функций $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, если $\langle\mu_i,f_j\rangle=\delta_{i,j}$, где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Функционалы μ_i называются *биортогональными* или *двойственными* функционалами к функциям f_j.

Рассмотрим сплайны (7), их производную

$$\omega_j'(t) = \begin{cases} \dfrac{\rho'(t)}{\rho_{j+1}-\rho_j}, & t\in[x_j,x_{j+1}),\\ -\dfrac{\rho'(t)}{\rho_{j+2}-\rho_{j+1}}, & t\in[x_{j+1},x_{j+2}),\\ 0 & \text{иначе,}\end{cases} \tag{17}$$

и линейные функционалы $\lambda_j^{\langle r\rangle}$, $r=0,1$, $j\in J_{-1,n-1}$, заданные следующими формулами:

$$\langle\lambda_j^{\langle 0\rangle},u\rangle := u(x_j)+\frac{\rho_{j+1}-\rho_j}{\rho_j'}\,u'(x_j),\quad u\in C^1[a,b]. \tag{18}$$

$$\langle\lambda_j^{\langle 1\rangle},u\rangle := u(x_{j+1}),\quad u\in C[a,b]. \tag{19}$$

Теорема 3. *Для каждого фиксированного* $r\in\{0,1\}$ *система линейных функционалов* $\{\lambda_j^{\langle r\rangle}\}$, *заданная формулами* (18)–(19), *биортогональна системе функций* $\{\omega_{j'}\}$, *т.е.*

$$\langle\lambda_j^{\langle r\rangle},\omega_{j'}\rangle=\delta_{j,j'},\quad j,j'\in J_{-1,n-1}. \tag{20}$$

Доказательство. Для $r=1$ утверждение теоремы очевидно ввиду свойства (8). При $r=0$ левая часть выражения (20) принимает вид

$$\langle\lambda_j^{\langle 0\rangle},\omega_{j'}\rangle=\omega_{j'}(x_j)+\frac{\rho_{j+1}-\rho_j}{\rho_j'}\,\omega_{j'}'(x_j). \tag{21}$$

В силу расположения носителей функций $\omega_{j'}$ и $\omega'_{j'}$, входящих в выражение (21), равенство $\langle\lambda_j^{\langle 0\rangle}, \omega_{j'}\rangle = 0$ справедливо для всех таких j, что $j \neq j'$ и $j \neq j'+1$. При $j = j'$, используя свойство (8) и формулу (17) при $t = x_j$, находим, что $\langle\lambda_j^{\langle 0\rangle}, \omega_j\rangle = 1$. Используя те же свойства, при $j = j'+1$ имеем $\langle\lambda_j^{\langle 0\rangle}, \omega_{j-1}\rangle = 0$. Утверждение теоремы доказано. □

Замечание 3. Описание общего метода построения функционалов, биортогональных к минимальным сплайнам, см. в [16, 17].

Рассмотрим интерполяционную задачу

$$\langle\lambda_i^{\langle r\rangle}, \widetilde{u}\rangle = v_i, \quad i \in J_{-1,n-1}, \quad \widetilde{u} \in \mathbb{S}(X), \tag{22}$$

где $\{v_i\}$ – заданная последовательность чисел. Для каждого фиксированного $r \in \{0,1\}$ в пространстве $\mathbb{S}(X)$ существует единственное решение прямой интерполяционной задачи (22), которое задается формулой

$$\widetilde{u}(t) = \sum_{j=-1}^{n-1} v_j\,\omega_j(t), \quad t \in [a,b].$$

Для заданной на отрезке $[a,b]$ функции u рассмотрим сплайн

$$u_h(t) = \sum_{j=-1}^{n-1} \langle\mu_j, u\rangle\,\omega_j(t), \quad t \in [a,b], \tag{23}$$

где $\langle\mu_j, u\rangle$ – некоторые линейные функционалы, которые будем называть *аппроксимационными* функционалами. Если система функционалов $\{\mu_i\}$ биортогональна системе функций $\{\omega_j\}$, то приближение вида (23) будем называть *биортогональной* сплайн-аппроксимацией.

Рассмотрим биортогональную сплайн-аппроксимацию (23) для $\langle\mu_j, u\rangle = \langle\lambda_j^{\langle r\rangle}, u\rangle$. Принимая во внимание расположение носителей функций ω_j при $t \in [x_k, x_{k+1}]$, видим, что сумма (23) содержит только два ненулевых слагаемых, поэтому

$$u_h^{\langle r\rangle}(t) = \sum_{j=k-1}^{k} \langle\lambda_j^{\langle r\rangle}, u\rangle\,\omega_j(t), \quad t \in [x_k, x_{k+1}]. \tag{24}$$

Теорема 4. *Для каждого фиксированного $r \in \{0,1\}$ аппроксимация (24) обладает свойством точности на компонентах вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$, т.е. если $u \in \{1, \rho(t)\}$, то справедливо тождество*

$$u_h^{\langle r\rangle}(t) \equiv u(t).$$

Доказательство. Аппроксимационные соотношения (3) могут быть переписаны в следующем покомпонентном виде:

$$\sum_{j=k-1}^{k} \langle \lambda_j^{\langle r\rangle}, [\boldsymbol{\varphi}]_i \rangle \, \omega_j(t) = [\boldsymbol{\varphi}]_i(t), \quad i = 0, 1. \tag{25}$$

Для $i = 0$ имеем $[\boldsymbol{\varphi}]_i = 1$ и $\langle \lambda_j^{\langle r\rangle}, 1\rangle = 1$ при $r = 0, 1$, поэтому точность эквивалентна свойству разбиения единицы (10). Для $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_1 = \rho(t)$ находим $\langle \lambda_j^{\langle r\rangle}, \rho\rangle = \rho_{j+1}$ при $r = 0, 1$, так что точность на функции $u = \rho$ непосредственно следует из соотношений (24) и (25). $\square$

Обозначим через $S(t)$ приближение (24), получаемое при $r = 1$ с аппроксимационным функционалом (19), т.е. $S(t) := u_h^{\langle 1\rangle}(t)$. Тогда при $t \in [x_k, x_{k+1}]$ находим

$$S(t) = \sum_{j=k-1}^{k} u(x_{j+1}) \, \omega_j(t) = u(x_k) \, \omega_{k-1}(t) + u(x_{k+1}) \, \omega_k(t)$$

$$= u(x_k) \, (1-\omega_k(t)) + u(x_{k+1}) \, \omega_k(t) = u(x_k) + \big(u(x_{k+1}) - u(x_k)\big) \, \omega_k(t). \tag{26}$$

С вычислительной точки зрения, для сокращения количества операций из всех выписанных формул (26), с учетом представления (7), предпочтение следует отдавать формуле

$$S(t) = u_k + \big(u_{k+1} - u_k\big) \, \frac{\rho(t) - \rho_k}{\rho_{k+1} - \rho_k}, \quad t \in [x_k, x_{k+1}], \tag{27}$$

где $u_k := u(x_k)$.

Теперь ясно, что сплайн (27) является интерполяционным сплайном, т.е.

$$S(x_k) = u_k, \quad k \in J_{0,n}.$$

Для порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t)^T$, т.е. при $\rho(t) = t$, приближение (27) является известной непрерывной кусочно-линейной интерполяцией. Для других порождающих будем называть приближение (27) *квазилинейной* интерполяцией (минимальными сплайнами).

§5. Погрешность квазилинейной интерполяции

В этом параграфе в дополнение к условиям (6), накладываемым на функцию $\rho(t)$, будем считать, что также $\rho \in C^2[a,b]$. Это позволит и далее использовать разложение Тейлора корректно.

Норму в пространстве $C[a,b]$ будем определять равенством

$$\|f(t)\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|\,, \quad f \in C[a,b].$$

Теорема 5. *Для функции $u \in C^1[a,b]$ верна оценка*

$$|u(t) - S(t)| \leqslant 2h\,\|u'(t)\|_{C[a,b]},$$

а для функции $u \in C^2[a,b]$ справедливо неравенство

$$|u(t) - S(t)| \leqslant Ch^2\left(\|u'(t)\|_{C[a,b]} + \|u''(t)\|_{C[a,b]}\right),$$

где константа $C > 0$ от u и h не зависит и может быть выписана в явном виде.

Доказательство. Используя для $S(t)$ представление (26), при $t \in [x_k, x_{k+1}]$ получаем

$$|S(t) - u(t)| = |u_k + \big(u_{k+1} - u_k\big)\,\omega_k(t) - u(t)|. \tag{28}$$

Для функции $u \in C^1[a,b]$ справедливы формулы конечных приращений при некоторых средних значениях $\theta_{k,t} \in (x_k, t)$ и $\theta_{k,k+1} \in (x_k, x_{k+1})$:

$$u(t) = u_k + u'(\theta_{k,t})(t - x_k), \quad u_{k+1} = u_k + u'(\theta_{k,k+1})(x_{k+1} - x_k),$$

подставляя которые в предыдущее выражение (28), находим:

$$|S(t) - u(t)| = |u'(\theta_{k,k+1})(x_{k+1} - x_k)\omega_k(t) - u'(\theta_{k,t})(t - x_k)|.$$

Ввиду положительности (9) и разбиения единицы (10), ясно, что $|\omega_k(t)| \leqslant 1$. Поэтому, используя обозначения (12), заключаем, что справедливо неравенство

$$|S(t) - u(t)| \leqslant 2 \max_{t\in[x_k,x_{k+1}]} |u'(t)|\,h,$$

откуда следует первое доказываемое утверждение теоремы.

Теперь в выражении (28) фигурирует функция $u \in C^2[a,b]$, для которой справедливо разложение по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$$u(t) = u_k + u'_k(t - x_k) + \frac{1}{2}u''(\overline{\theta}_{k,t})(t - x_k)^2,$$
$$u_{k+1} = u_k + u'_k(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}u''(\overline{\theta}_{k,k+1})(x_{k+1} - x_k)^2,$$

где $\overline{\theta}_{k,t} \in (x_k, t)$ и $\overline{\theta}_{k,k+1} \in (x_k, x_{k+1})$.

Отсюда, подставляя $u(t)$ и $(u_{k+1} - u_k)$ в равенство (28), находим

$$|S(t) - u(t)| = \Big| u'_k(x_{k+1} - x_k)\,\omega_k(t) - u'_k(t - x_k)$$
$$+ \frac{1}{2}u''(\overline{\theta}_{k,k+1})(x_{k+1} - x_k)^2\omega_k(t) - \frac{1}{2}u''(\overline{\theta}_{k,t})(t - x_k)^2 \Big|.$$

Вводя обозначение

$$P := u'_k(x_{k+1} - x_k)\,\omega_k(t) - u'_k(t - x_k), \tag{29}$$

оценим предыдущее равенство сверху следующим выражением:

$$|S(t) - u(t)| \leqslant |P| + \frac{1}{2}\left|u''(\overline{\theta}_{k,k+1})\right|(x_{k+1} - x_k)^2\,|\omega_k(t)|$$
$$+ \frac{1}{2}\left|u''(\overline{\theta}_{k,t})\right|(t - x_k)^2.$$

Используя обозначения (12) и тот факт, что $|\omega_k(t)| \leqslant 1$, выводим:

$$|S(t) - u(t)| \leqslant |P| + \max_{t \in [x_k, x_{k+1}]} |u''(t)|\; h^2. \tag{30}$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части неравенства (30). Учитывая представления (7) и (29), получаем:

$$P = u'_k(x_{k+1} - x_k)\left(\frac{\rho(t) - \rho_k}{\rho_{k+1} - \rho_k} - \frac{t - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right). \tag{31}$$

Разложение функции $\rho(t)$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа, включая формулу конечных приращений, имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_k + \rho'_k(t - x_k) + \frac{1}{2}\rho''(\overline{\tau}_{k,t})(t - x_k)^2, \\ \rho_{k+1} &= \rho_k + \rho'(\tau_{k,k+1})(x_{k+1} - x_k), \end{aligned} \tag{32}$$

где $\overline{\tau}_{k,t} \in (x_k, t)$ и $\tau_{k,k+1} \in (x_k, x_{k+1})$.

Подставляя разложения (32) в равенство (31), находим

$$\begin{aligned} P =& u_k'(x_{k+1}-x_k)\left(\frac{\rho_k'(t-x_k)+\frac{1}{2}\rho''(\overline{\tau}_{k,t})(t-x_k)^2}{\rho'(\tau_{k,k+1})(x_{k+1}-x_k)}-\frac{t-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right) \\ =& u_k'(t-x_k)\left(\frac{\rho_k'-\rho'(\tau_{k,k+1})+\frac{1}{2}\rho''(\overline{\tau}_{k,t})(t-x_k)}{\rho'(\tau_{k,k+1})}\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Заметим, что для функции ρ' существует точка $\sigma_{k,\tau}\in(x_k,\tau_{k,k+1})$, для которой

$$\rho_k'-\rho'(\tau_{k,k+1})=\rho''(\sigma_{k,\tau})(x_k-\tau_{k,k+1}),$$

поэтому выражение (33) принимает вид

$$P=u_k'(t-x_k)\left(\frac{\rho''(\sigma_{k,\tau})(x_k-\tau_{k,k+1})+\frac{1}{2}\rho''(\overline{\tau}_{k,t})(t-x_k)}{\rho'(\tau_{k,k+1})}\right).$$

Оценим сверху предыдущее выражение:

$$\begin{aligned} |P| &\leqslant |u_k'|\,|t-x_k|\,\frac{|\rho''(\sigma_{k,\tau})|\,|x_k-\tau_{k,k+1}|+\frac{1}{2}\,|\rho''(\overline{\tau}_{k,t})|\,|t-x_k|}{|\rho'(\tau_{k,k+1})|} \\ &\leqslant \frac{\frac{3}{2}\max\limits_{t\in[x_k,x_{k+1}]}|\rho''(t)|}{\min\limits_{t\in[x_k,x_{k+1}]}|\rho'(t)|}\max_{t\in[x_k,x_{k+1}]}|u'(t)|\,h^2. \end{aligned} \tag{34}$$

Наконец, объединяя неравенства (30) и (34), находим

$$|S(t)-u(t)|\leqslant Ch^2\left(\max_{t\in[x_k,x_{k+1}]}|u'(t)|+\max_{t\in[x_k,x_{k+1}]}|u''(t)|\right), \tag{35}$$

где $C=\max\left\{1,\frac{3}{2}\max\limits_{t\in[a,b]}|\rho''(t)|\,/\min\limits_{t\in[a,b]}|\rho'(t)|\right\}$, а через $\max\{\cdot,\cdot\}$ обозначен максимум из двух чисел.

Теперь из неравенства (35) следует второе доказываемое утверждение теоремы. □

Замечание 4. Для поиска оценки приближения можно использовать метод интегрального представления остатка, связанного с обыкновенным дифференциальным оператором, для которого фундаментальной системой решений соответствующего однородного уравнения служат компоненты порождающей вектор-функции (подробнее см. [6]).

§6. Численные эксперименты по квазилинейной интерполяции

Рассмотрим квазилинейную интерполяцию функций $u(t) = \mathrm{arctg}(t)$ и $u(t) = \sqrt{1-t^2}$ на отрезке $[a, b] = [0.1, 0.6]$. Для этого будем использовать сетки вида (1), для которых учтено замечание 2. Такие сетки будем обозначать через $X_{n,[a,b]}$, а их узлы x_j, $j \in J_{0,n}$, будем определять формулой $x_j = x_0 + j\,h$, где $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$, а $n = 10, 20, 30$.

При проведении численных экспериментов для приближаемых функций $u(t)$ будем строить квазилинейную интерполяцию $S(t)$ по формуле (27) для различных порождающих функций $\rho(t)$.

В качестве ошибки E_n построенного приближения используется оценка максимума абсолютного значения отклонения полученного интерполянта $S(t)$ от значений исходной функции $u(t)$, вычисленных в узлах вспомогательной сетки, которая в десять раз мельче, чем исходная, т.е.

$$E_n = \max_{t_j \in X_{10n,[a,b]}} |u(t_j) - S(t_j)|. \tag{36}$$

Результаты численного эксперимента по нахождению ошибки приближения (36) в зависимости от шага сетки и выбора порождающей функции $\rho(t)$ приведены в таблице 1 и в таблице 2. В первой строке каждой таблицы размещен случай выбора $\rho(t) = t$, соответствующий кусочно-линейной интерполяции (при помощи B-сплайнов первой степени).

Таблица 1. Ошибка приближения функции $u(t) = \mathrm{arctg}(t)$.

$\rho(t)$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$
t	0.000203	0.000051	0.000023
$\sin(t)$	0.000072	0.000018	0.000008
$\mathrm{th}(t)$	**0.000041**	**0.000011**	**0.000005**

Таблица 2. Ошибка приближения функции $u(t) = \sqrt{1-t^2}$.

$\rho(t)$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$
t	0.000571	0.000147	0.000066
$\sqrt{1-t}$	0.000312	0.000079	0.000035
$\mathrm{ch}(t)$	**0.000148**	**0.000040**	**0.000018**

Как видно из приведенных таблиц, точность получаемого приближения меняется в зависимости от выбора порождающей функции $\rho(t)$.

В последней строке каждой таблицы расположен лучший результат из рассмотренных вариантов порождающих функций. Результаты численного эксперимента согласуются с порядком точности относительно шага сетки, который установлен в теореме 5. Ввиду теоремы 4, совершенно ясно, что наилучший результат приближения ($E_n = 0$ с точностью до ошибок округления) достигается при выборе порождающей функции $\rho(t) = u(t)$. Однако, ввиду очевидности, этот результат в таблицы не включен.

Заметим, что приближение дуги окружности (см. таблицу 2) имеет самостоятельный интерес в связи с широким использованием в системах автоматизированного проектирования (подробнее см. [30]).

Список литературы

1. Ю. С. Волков, В. В. Богданов, *О погрешности приближения простейшей локальной аппроксимацией сплайнами.* — Сиб. матем. ж. **61**, No. 5 (2020), 1000–1008.
2. Ю. К. Демьянович, *О построении пространств локальных функций на неравномерной сетке.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **124** (1983), 140–163.
3. Ю. К. Демьянович, *Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны.* СПб, 1994.
4. Ю. К. Демьянович, *Всплески и минимальные сплайны.* СПб, 2003.
5. Ю. К. Демьянович, *Теория сплайн-всплесков.* СПб, 2013.
6. Ю. К. Демьянович, В. О. Дронь, О. Н. Иванцова, *Об аппроксимации $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнами.* — Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. **3** (2013), 67–72.
7. Ю. К. Демьянович, А. А. Макаров, *Необходимые и достаточные условия неотрицательности координатных тригонометрических сплайнов второго порядка.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, **4(62)**, No. 1 (2017), 9–16.
8. А. Ю. Демьянович, В. Н. Малоземов, *Функции Дженкинса и минимальные сплайны.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. сер. 1, **2**, No. 8 (1998), 38–43.
9. Ю. К. Демьянович, С. Г. Михлин, *О сеточной аппроксимации функций соболевских пространств.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **35** (1973), 6–11.
10. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций.* М., 1980.
11. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *Об аппроксимации гиперболическими сплайнами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 179–194.
12. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *О квадратичных минимальных сплайнах с кратными узлами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 220–230.
13. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *О модифицированном методе сплайн-коллокаций решения интегрального уравнения Фредгольма.* — Дифф. ур. проц. упр. No. **4** (2021), 211–223.

14. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *Об одном методе решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 113–125.
15. А. А. Макаров, *О построении сплайнов максимальной гладкости.* — Пробл. матем. анал. **60** (2011), 25–38.
16. А. А. Макаров, *Биортогональные системы функционалов и матрицы декомпозиции для минимальных сплайнов.* — Укр. мат. вiсн. **9**, No. 2 (2012), 219–236.
17. А. А. Макаров, *О двойственных функционалах к минимальным сплайнам.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 198–218.
18. С. Г. Михлин, *Вариационно-сеточная аппроксимация.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **48** (1974), 32–188.
19. В. С. Рябенький, *Об устойчивости конечно-разностных уравнений.* — Дис. канд. физ.-мат. наук, М., 1952.
20. Г. Стрэнг, Дж. Фикс, *Теория метода конечных элементов.* М., 1977.
21. Б. М. Шумилов, Э. А. Эшаров, Н. К. Аркабаев, *Построение и оптимизация прогнозов на основе рекуррентных сплайнов первой степени.* — Сиб. ж. вычисл. матем. **13**, No. 2 (2010), 227–241.
22. И. В. Ююкин, *Интерполяция навигационной функции сплайном лагранжева типа.* — Вестн. Гос. ун-та морск. речн. флота **12**, No. 1 (2020), 57–70.
23. C. de Boor, *A Practical Guide to Splines.* Springer-Verlag, New York, 2001.
24. M. Buhmann, J. Jäger, *Quasi-Interpolation.* Cambridge University Press, 2022.
25. G. Y. Deniskina, Y. I. Deniskin, Y. I. Bityukov, *About some computational algorithms for local approximation splines, based on the wavelet transformation and convolution.* — Lect. Notes Electr. Eng. **729** (2021), 182–191.
26. J. J. Goel, *Construction of basis functions for numerical utilization of Ritz's method.* — Numer. Math. **12** (1968), 435–447.
27. O. Kosogorov, A. Makarov, *On some piecewise quadratic spline functions.* — Lect. Notes Comput. Sci. **10187** (2017), 448–455.
28. E. Kulikov, A. Makarov, *On de Boor–Fix type functionals for minimal splines.* — Topics in Classical and Modern Analysis (Applied and Numerical Harmonic Analysis), 2019, 211–225.
29. E. Kulikov, A. Makarov, *On biorthogonal approximation of solutions of some boundary value problems on Shishkin mesh.* — AIP Conf. Proc. **2302** (2020), 110005.
30. A. A. Makarov, *On example of circular arc approximation by quadratic minimal splines.* — Poincare J. Anal. Appl. **2(II)** (2018), 103–107.
31. V. L. Leontiev, *Orthogonal splines in approximation of functions.* — Math. Statistic **8**, No. 2 (2020), 167–172.
32. I. J. Schoenberg, *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions.* — Quart. Appl. Math. **4** (1946), 45–99, 112–141.
33. L. L. Schumaker, *Spline Functions: Computational Methods.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2015.
34. G. Strang, G. Fix, *Fourier analysis of the finite element method in Ritz–Galerkin theory.* — Stud. Appl. Math. **48**, No. 3 (1969), 265–273.
35. A. I. Zadorin, *Interpolation method for a function with a singular component.* — Lect. Notes Comp. Sci. **5434** (2009), 612–619.

Livshits L. P., Makarov A. A., Makarova S. V. On quasilinear interpolation by minimal splines.

The paper studies quasilinear interpolation by minimal splines that are constructed on nonuniform grids with multiple nodes. Asymptotic representations for normalized splines are obtained.The sharpness of biorthogonal approximation and the order of accuracy of quasilinear interpolation with respect to the grid step are established. Results of numerical experiments on approximating some test functions, which demonstrate the effect of choosing a generating vector function in constructing the corresponding minimal spline, are presented.

Поступило 16 октября 2023 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская набережная, 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: st088046@student.spbu.ru

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская набережная, 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургский государственный
электротехнический университет “ЛЭТИ”,
ул. Профессора Попова, 5,
197022, С.-Петербург, Россия
E-mail: a.a.makarov@spbu.ru

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская набережная, 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: st122359@student.spbu.ru