Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 524, 2023 г.

Л. Ю. Колотилина

ОБ SDD_1 МАТРИЦАХ И ИХ ОБОБЩЕНИЯХ

§1. Введение и предварительные сведения

Многочисленные работы, вышедшие в последние годы, были посвящены выделению и исследованию различных классов матриц, содержащих подкласс SDD (Strictly Diagonally Dominant) матриц и содержащихся в классе невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, см., например, [1–3, 5–10, 13] и цитируемые в них работы.

Среди таких классов мы отдельно упомянем SDD_1 матрицы, введенные в 2011 Пеньей [13].

Класс SDD_1 матриц исследовался в работах [5,7] и [3]. Совсем недавно, в статье [8], были введены в рассмотрение так называемые GSDD_1 матрицы как обобщение SDD_1 матриц. В настоящей работе мы продолжаем исследование GSDD_1 матриц, концентрируясь на их определении и на верхних оценках их обратных в норме l_∞. В частности, в §2 предлагается альтернативное, несколько отличное определение $GSDD_1^*$ матриц, которое представляется предпочтительным, и исследуются свойства GSDD_1 и GSDD_1^* матриц.

Поскольку как GSDD_1, так и GSDD_1^* матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами, естественно рассмотреть задачу об установлении верхних оценок для их обратных. Мы рассматриваем ее в §3, где приводится оценка, полученная в работе [8], и доказываются новые оценки, зависящие от того, является ли GSDD_1^* матрица также и SDD_1^* матрицей или же нет.

В заключительном §4 мы вводим в рассмотрение еще один матричный класс, состоящий из так называемых SD-SDD матриц, который содержит S-SDD, GSDD_1 и GSDD_1^* матрицы. Для SD-SDD матриц A мы выводим две верхние оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$, одна из которых зависит от параметра и обобщает оценку, предложенную в [8], тогда как другая оценка от параметров не зависит. Также мы доказываем, что не зависящая от параметров оценка является наиболее точной, а для

Ключевые слова: l_∞-норма обратной матрицы, верхние оценки, SDD_1 матрицы, SDD_1^* матрицы, GSDD_1 матрицы, GSDD_1^* матрицы, SD-SDD матрицы, $\mathcal{H}$-матрицы.

S-SDD матриц она сводится к оценке, первоначально установленной в работе [12]. В случае же GSDD_1 и GSDD_1^* матриц, новая, не зависящая от параметров, оценка улучшает оценки, приведенные в §3.

Напомним необходимые обозначения и определения.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 1$. Обозначим $\langle n\rangle = \{1,\ldots,n\}$, и пусть S – некоторое подмножество множества индексов $\langle n\rangle$. Через $\bar{S} = \langle n\rangle \backslash S$ будем обозначать дополнение множества S в $\langle n\rangle$. Положим

$$r_i(A) = \sum_{j\in\langle n\rangle\backslash\{i\}} |a_{ij}|, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{1.1}$$

а также

$$r_i^S(A) = \begin{cases} \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} |a_{ij}|, & i \in S,\\ \sum_{j\in S} |a_{ij}|, & i \notin S; \end{cases} \tag{1.2}$$

через $A[S]$ будем обозначать главную подматрицу $(a_{ij})_{i,j\in S}$ матрицы A.

Определение 1.1. *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *называется* SDD (Strictly Diagonally Dominant) матрицей, *если*

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1.3}$$

Определение 1.2 ([6,15]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $S \subset \langle n\rangle$ *– непустое подмножество множества индексов. Матрица* A *называется* S-SDD (S-Strictly Diagonally Dominant) матрицей, *если выполнены следующие два условия:*

$$|a_{ii}| > r_i^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \tag{1.4}$$

и

$$\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] > r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \text{ и } j \in \bar{S}. \tag{1.5}$$

Замечание 1.1. Для общности и удобства, в определении 1.2 мы допускаем случай $S = \langle n\rangle$, не являющийся общепринятым, так что SDD матрицы могут рассматриваться как $\langle n\rangle$-SDD матрицы.

Следует упомянуть, что S-SDD матрицы впервые появились в работе [9], где было показано, что они являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами. Тот же матричный класс рассматривался в статьях [1,2,11] и [10].

На протяжении данной работы через

$$R_A = \{i \in \langle n\rangle :\ |a_{ii}| > r_i(A)\} \tag{1.6}$$

обозначается множество номеров строк матрицы A, имеющих строгое диагональное преобладание, и мы полагаем

$$p_i(A) = p_i^{R_A}(A) + r_i^{\overline{R_A}}(A), \quad i = 1, \dots, n,$$

где используется (1.2) и аналогичное обозначение

$$p_i^{R_A}(A) = \sum_{j \in R_A \setminus \{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.7}$$

Через I_n (или просто I) обозначается единичная матрица порядка $n \geqslant 1$.

SDD_1 и SDD_1^* матрицы определяются следующим образом.

Определение 1.3 ([13]). *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется* SDD_1 матрицей*, если она удовлетворяет условию*

$$|a_{ii}| > p_i(A) \quad \text{для всех} \quad i \notin R_A. \tag{1.8}$$

Определение 1.4 ([3]). *SDD_1 матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется* SDD_1^* матрицей*, если*

$$r_i(A) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i \in R_A. \tag{1.9}$$

Поскольку при всех $i \notin R_A$ мы имеем $r_i(A) \geqslant |a_{ii}| > 0$, то условие (1.9) можно заменить на формально более сильное условие

$$r_i(A) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i \in \langle n\rangle, \tag{1.10}$$

означающее, что у A нет диагональных строк.

В заключение этого параграфа мы напомним два результата, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Для матрицы, обратной к SDD матрице, имеется следующая классическая оценка.

Теорема 1.1 ([4, 14]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i \in \langle n\rangle} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}. \tag{1.11}$$

Следующая теорема устанавливает соотношение между SDD_1^* матрицами, не имеющими строгого диагонального преобладания, и R_A-SDD матрицами.

Теорема 1.2 ([3, теорема 2.1])**.** *Пусть* $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$*,* $n\geqslant 2$*, является* SDD_1^* *матрицей, причем* $R_A\neq\langle n\rangle$*, и пусть матрица* $B=(b_{ij})$ *определяется соотношением*

$$B=(b_{ij})=A\Delta_A, \tag{1.12}$$

где

$$\Delta_A=\operatorname{diag}\{\delta_1,\dots,\delta_n\},\quad \delta_i=\begin{cases}\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, & i\in R_A,\\ 1, & i\in\overline{R_A}.\end{cases}$$

Тогда B *является* R_A*-SDD матрицей.*

Заметим, что в том случае (не рассматриваемом в теореме 1.2), когда A является SDD матрицей без диагональных строк, мы имеем $R_A=\langle n\rangle$, $b_{ii}=r_i(A)$ при всех $i\in\langle n\rangle$, и

$$r_i(B)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|}<r_i(A)=b_{ii},\quad i=1,\dots,n. \tag{1.13}$$

Следовательно, B является SDD матрицей, а значит также и R_A-SDD матрицей.

§2. GSDD$_1$ и GSDD$_1^*$ матрицы

В этом параграфе мы напоминаем и обсуждаем определение GSDD$_1$ матриц, предложенное в работе [8]. Также мы вводим в рассмотрение альтернативное обобщение SDD$_1$ матриц, так называемые GSDD$_1^*$ матрицы, и приводим некоторые свойства обоих типов обобщенных SDD$_1$ матриц.

Определение 2.1 ([8])**.** *Матрица* $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$*,* $n\geqslant 2$*, называется* $GSDD_1$ *матрицей, если выполнены следующие два условия:*

$$r_i(A)>p_i^{R_A}(A)\quad\text{для всех}\quad i\in R_A \tag{2.1}$$

и

$$\Big[r_i(A)-p_i^{R_A}(A)\Big]\Big[|a_{jj}|-r_j^{\overline{R_A}}(A)\Big]>r_i^{\overline{R_A}}(A)\,p_j^{R_A}(A)\quad\text{для всех}\quad i\in R_A\ \text{и}\ j\in\overline{R_A}. \tag{2.2}$$

Следует отметить, что, в соответствии с определением 2.1, произвольная матрица A такая, что $R_A=\varnothing$, является GSDD$_1$ матрицей. Действительно, в этом случае, оба условия (2.1) и (2.2) исчезают. Поскольку мы заинтересованы в обобщениях SDD матриц, то матрицы, для которых $R_A=\varnothing$, следует исключить из определения 2.1. Но в работе [8] эта ситуация попросту игнорируется, и в результатах, в ней полученных, следует дополнительно предполагать, что $R_A \neq \varnothing$.

GSDD_1 матрицы обладают следующим простым, но существенным свойством.

Предложение 2.1. *Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является $GSDD_1$ матрицей, причем $R_A \neq \varnothing$, то*

$$r_i(A) > 0 \quad \text{для всех} \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.3}$$

Доказательство. Если $i \in R_A$, то $r_i(A) > 0$ в силу (2.1). Пусть $R_A \neq \langle n\rangle$ и пусть $j \in \overline{R_A}$, т.е.

$$r_j(A) \geqslant |a_{jj}|. \tag{2.4}$$

Поскольку оба множества R_A и $\overline{R_A}$ непустые, то из (2.2) следует, что

$$|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A) > 0.$$

Отсюда вытекает, что $|a_{jj}| > 0$, что, наряду с (2.4), доказывает, что $r_j(A) > 0$. □

Пусть задана матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Определим диагональную матрицу

$$\Delta_A = \operatorname{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_n\}, \quad \delta_i = \begin{cases} \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, & i \in R_A, \\ 1, & i \in \overline{R_A}, \end{cases} \tag{2.5}$$

использованную в работах [3, 5, 7]. Ясно, что $0 \leqslant \Delta_A \leqslant I_n$, так что матрица Δ_A невырождена тогда и только тогда, когда $r_i(A) > 0$ для всех $i \in R_A$. Из предложения 2.1 мы немедленно получаем следующий результат.

Следствие 2.1. *Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – $GSDD_1$ матрица и $R_A \neq \varnothing$, то диагональная матрица Δ_A является невырожденной.*

Используя матрицу Δ_A, с заданной матрицей A мы ассоциируем отмасштабированную матрицу

$$B = (b_{ij}) = A\Delta_A.$$

Как легко видеть,

$$b_{ii} = \begin{cases} r_i(A), & i \in R_A, \\ |a_{ii}|, & i \notin R_A, \end{cases} \tag{2.6}$$

и

$$r_i(B) = p_i(A), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.7}$$

В терминах матрицы B условия (2.1) и (2.2) формулируются в виде

$$|b_{ii}| > r_i^{R_A}(B), \quad i \in R_A, \tag{2.8}$$

и

$$[|b_{ii}| - r_i^{R_A}(B)]\,[|b_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(B)] > r_i^{\overline{R_A}}(B)\, r_j^{R_A}(B), \quad i \in R_A,\ j \in \overline{R_A}. \tag{2.9}$$

Сравнивая последние соотношения с определением 1.2, мы немедленно приходим к следующему утверждению.

Предложение 2.2. *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, для которой $S = R_A \neq \varnothing$, является GSDD$_1$ матрицей тогда и только тогда, когда отмасштабированная матрица $B = A\Delta_A$ является R_A-SDD матрицей.*

Из предложения 2.2 легко получить следующий результат.

Следствие 2.2. *Пусть A – GSDD$_1$ матрица, причем $R_A \neq \varnothing$. Тогда A является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.*

Доказательство. В силу предложения 2.2, матрица $B = A\Delta_A$ является R_A-SSD матрицей. Отсюда следует (см. [6,15]), что B – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица, а значит существует невырожденная диагональная матрица D такая, что матрица $BD = A(\Delta_A D)$ имеет строгое диагональное преобладание. Этим доказано, что A является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей. □

Следует упомянуть, что утверждение следствия 2.2 было первоначально установлено в работе [8], где была приведена диагональная матрица W такая, что AW имеет строгое диагональное преобладание. Предположение, что $R_A \neq \varnothing$, в работе [8] отсутствует. Однако в том случае, когда $R_A = \varnothing$, не только матрица AW не имеет строгого диагонального преобладания, но и ни одна из ее строк не имеет строгого диагонального преобладания, поскольку в этом случае $W = \varepsilon I_n$.

Также следует отметить, что, в соответствии с определением 2.1, класс всех SDD матриц не является подклассом класса всех GSDD$_1$ матриц. Действительно, по определению 2.1, SDD матрица A, для которой $R_A = \langle n\rangle$, является GSDD$_1$ матрицей тогда и только тогда, когда

$$r_i(A) > p_i(A) = \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

что, очевидно, равносильно условию

$$r_i(A) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Итак, *SDD матрица является GSDD$_1$ матрицей тогда и только тогда, когда у нее нет диагональных строк.*

Поскольку класс GSDD$_1$ матриц был введен как обобщение SDD$_1$ матриц, можно было бы ожидать, что $\{\mathrm{SDD}_1\} \subset \{\mathrm{GSDD}_1\}$. Однако это не так. Верно следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD$_1$ матрица. Тогда A является GSDD$_1$ матрицей тогда и только тогда, когда она является SDD$_1^*$ матрицей.*

Доказательство. Если A является SDD$_1$ матрицей, то, очевидно, $R_A \neq \varnothing$. Следовательно, если A является GSDD$_1$ матрицей, то, в силу предложения 2.1, у матрицы A нет диагональных строк, т.е. она является SDD$_1^*$ матрицей. Этим доказана необходимость.

Обратно, пусть A является SDD$_1^*$ матрицей. Если $R_A \neq \langle n\rangle$, то матрица $B = A\Delta_A$ является R_A-SDD матрицей по теореме 1.2, так что A является GSDD$_1$ матрицей в силу предложения 2.2. Наконец, если A – SDD матрица без диагональных строк, то, в соответствии с определением 2.1, A является GSDD$_1$ матрицей тогда и только тогда, когда

$$r_i(A) > p_i(A) \quad \text{для всех} \quad i \in n. \tag{2.10}$$

Поскольку $R_A = \langle n\rangle$, то $r_i(A) < |a_{ii}|$, $i = 1, \ldots, n$, так что

$$p_i(A) = \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теперь условие (2.10) следует из условия $r_i(A) > 0$, $i = 1, \ldots, n$. $\square$

В силу предложения 2.3, имеет место следующее соотношение:

$$\{\mathrm{SDD}_1^*\} = \{\mathrm{SDD}_1\} \cap \{\mathrm{GSDD}_1\}. \tag{2.11}$$

Таким образом, класс GSDD$_1$ в действительности представляет собой расширение класса SDD$_1^*$, а не SDD$_1$ матриц.

Ниже мы предлагаем альтернативное определение обобщенных SDD$_1$ матриц.

Определение 2.2. *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *называется* $GSDD_1^*$ *матрицей, если выполняются следующие два условия:*

$$|a_{jj}| > r_j^{\overline{R_A}}(A) \quad \textit{для всех} \quad j \in \overline{R_A} \tag{2.12}$$

и

$$\Big[r_i(A) - p_i^{R_A}(A)\Big]\,\Big[|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A)\Big] > r_i^{\overline{R_A}}(A)\, p_j^{R_A}(A) \\ \textit{для всех} \quad i \in R_A \ \textit{и}\ j \in \overline{R_A}. \tag{2.13}$$

Замечание 2.1. Ясно, что в том случае, когда R_A – непустое собственное подмножество множества индексов, A является GSDD$_1$ матрицей тогда и только тогда, когда она является GSDD$_1^*$ матрицей. Однако, в отличие от GSDD$_1$ матриц, всякая GSDD$_1^*$ матрица A необходимо удовлетворяет условию $R_A \neq \varnothing$. Действительно, если бы мы имели $R_A = \varnothing$, то, в силу (2.12), мы бы также имели

$$|a_{jj}| > r_j(A) \quad \text{для всех} \quad j \in \langle n\rangle,$$

что означало бы, что $R_A = \langle n\rangle$. Полученное противоречие доказывает, что $R_A \neq \varnothing$.

С другой стороны, если A является SDD матрицей, т.е. $R_A = \langle n\rangle$, то оба условия (2.12) и (2.13) исчезают. Таким образом, мы имеем желаемое включение

$$\{\text{SDD}\} \subset \{\text{GSDD}_1^*\}. \tag{2.14}$$

Аналогом предложения 2.1 для GSDD$_1^*$ матриц является следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Если* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *–* $GSDD_1^*$ *матрица и* $R_A \neq \langle n\rangle$, *то*

$$r_i(A) > 0 \quad \textit{для всех} \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.15}$$

Доказательство. Поскольку $R_A \neq \langle n\rangle$, то $\overline{R_A} \neq \varnothing$. Если $j \in \overline{R_A}$, т.е. $r_j(A) \geqslant |a_{jj}|$, то из (2.13) следует, что

$$|a_{jj}| > r_j^{\overline{R_A}}(A),$$

так что $|a_{jj}| > 0$ и, следовательно,

$$r_j(A) \geqslant |a_{jj}| > 0, \quad j \in \overline{R_A}.$$

Пусть теперь $i \in R_A$. В этом случае, в силу (2.13), мы имеем

$$r_i(A) > p_i^{R_A}(A) \geqslant 0.$$

Предложение доказано. □

Из предложения 2.4 мы немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – $GSDD_1^*$ матрица и $R_A \neq \langle n\rangle$, то матрица Δ_A невырождена.*

Предложение 2.4 утверждает, что любая GSDD_1^* матрица либо имеет строгое диагональное преобладание, либо не содержит диагональных строк.

Для GSDD_1^* матриц справедлив следующий аналог предложения 2.2.

Предложение 2.5. *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, такая что $R_A \neq \langle n\rangle$, является $GSDD_1^*$ матрицей тогда и только тогда, когда отмасштабированная матрица $B = A\Delta_A$ является R_A-SDD матрицей.*

Доказательство. Заметим сперва, что, в силу замечания 2.1, для любой GSDD_1^* матрицы A мы имеем $R_A \neq \varnothing$. С другой стороны, в условиях предложения, мы также имеем $\overline{R_A} \neq \varnothing$. В этих условиях, по определению 1.2, B является R_A-SDD матрицей тогда и только тогда, когда она является $\overline{R_A}$-SDD матрицей. Наконец, остается заметить, что, ввиду определения 2.2 и соотношений (2.6)–(2.7), A является GSDD_1^* матрицей в том и только том случае, когда B является $\overline{R_A}$-SDD матрицей. □

Поскольку как SDD, так и S-SDD матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами, то из предложения 2.5 мы легко получаем следующий аналог следствия 2.2.

Следствие 2.4. *Всякая $GSDD_1^*$ матрица является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.*

Следующее предложение можно рассматривать как обоснование использования обозначения GSDD_1^* в определении 2.2.

Предложение 2.6. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является SDD_1^* матрицей. Тогда A является $GSDD_1^*$ матрицей, так что*

$$\{SDD_1^*\} \subset \{SDD_1\} \cap \{GSDD_1^*\}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Пусть A – SDD_1^* матрица. Если $R_A = \langle n\rangle$, то A также является и GSDD_1^* матрицей в силу (2.14). Если же $R_A \neq \langle n\rangle$, то, по теореме 1.2, $B = A\Delta_A$ является R_A-SDD матрицей. Следовательно, по предложению 2.5, A – GSDD_1^* матрица. $\square$

Из (2.14) и предложения 2.6 следует, что

$$\{\mathrm{SDD}\} \cup \{\mathrm{SDD}_1^*\} \subseteq \{\mathrm{SDD}_1\} \cap \{\mathrm{GSDD}_1^*\}. \tag{2.17}$$

На самом деле, справедливо следующее более сильное утверждение, которое является аналогом предложения 2.3.

Предложение 2.7.

$$\{SDD\} \cup \{SDD_1^*\} = \{SDD_1\} \cap \{GSDD_1^*\}. \tag{2.18}$$

Доказательство. Ввиду (2.17), для доказательства (2.18) нужно лишь показать, что

$$\{\mathrm{SDD}\} \cup \{\mathrm{SDD}_1^*\} \supseteq \{\mathrm{SDD}_1\} \cap \{\mathrm{GSDD}_1^*\}.$$

Действительно, пусть $A \in \{\{\mathrm{SDD}_1\} \cap \{\mathrm{GSDD}_1^*\}\} \setminus \{\mathrm{SDD}_1^*\}$. Тогда, в силу определения 1.4, в матрице A есть диагональная строка. По предложению 2.4, при $R_A \neq \langle n \rangle$ это невозможно, и мы заключаем, что $R_A = \langle n \rangle$, т.е. A является SDD матрицей. $\square$

В заключение этого параграфа мы приведем условие, которое с необходимостью выполнено для матрицы $A \in \{\mathrm{GSDD}_1^*\} \setminus \{\mathrm{SDD}_1^*\}$ при $R_A \neq \langle n \rangle$.

Предложение 2.8. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – $GSDD_1^*$ матрица и пусть $R_A \neq \langle n \rangle$. Если A не является SDD_1^* матрицей, то*

$$r_i^{R_A}(A) \neq 0 \quad \textit{для всех} \quad i \in R_A. \tag{2.19}$$

Доказательство. Ввиду предложения 2.4, матрица A не имеет диагональных строк. Следовательно, в силу определений 1.3 и 1.4, если она не является SDD_1^* матрицей, то она не является и SDD_1 матрицей, т.е. $\exists j \in \overline{R_A}:\ |a_{jj}| \leqslant p_j(A)$. Ввиду соотношений (2.6)–(2.7), это означает, что матрица B удовлетворяет условию

$$\exists j \in \overline{R_A}:\ |b_{jj}| \leqslant r_j(B). \tag{2.20}$$

В частности, из (2.20) следует, что $\overline{R_B} \neq \varnothing$, или $R_B \neq \langle n \rangle$. По предложению 2.5, B является R_A-SDD матрицей, и из определения 1.2 в применении к матрице B с $S = R_A$ и (2.20) следует, что

$$|b_{ii}| > r_i(B) \quad \text{для всех} \quad i \in R_A. \tag{2.21}$$

Поскольку неравенство в (2.21), очевидно, равносильно неравенству $r_i^{R_A}(A) > p_i^{R_A}(A)$, то условие (2.21) равносильно (2.19). □

Итак, класс GSDD_1^* матриц содержится в объединении SDD матриц, SDD_1^* матриц и таких матриц A, что их главные подматрицы вида $A[R_A]$ не содержат диагональных строк. Этим структурным результатом мы воспользуемся в следующем параграфе.

§3. Верхние оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$

В работе [8] была предложена следующая верхняя оценка.

Теорема 3.1 ([8]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – $GSDD_1$ матрица и пусть $R_A \neq \varnothing$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\max_{i\in R_A}\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|},\ \gamma\right\} \times \max\left\{\frac{1}{\min_{i\in R_A}\varphi_i},\ \frac{1}{\min_{j\in \overline{R_A}}\psi_j}\right\}, \tag{3.1}$$

где

$$\varphi_i = r_i(A) - p_i^{R_A}(A) - \gamma r_i^{\overline{R_A}}(A), \quad i \in R_A,$$
$$\psi_i = \gamma(|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A)) - p_j^{R_A}(A), \quad j \in \overline{R_A},$$

и

$$\gamma \in \Gamma = \left(\max_{j\in\overline{R_A}}\frac{p_j^{R_A}(A)}{|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A)},\ \min_{j\in R_A}\frac{r_j(A) - p_j^{R_A}(A)}{r_j^{\overline{R_A}}(A)}\right). \tag{3.2}$$

Оценка (3.1) получается применением оценки теоремы 1.1 к SDD матрице $C = AW_\gamma$, где

$$W_\gamma = \mathrm{diag}\,\{w_1^{(\gamma)}, \dots, w_n^{(\gamma)}\}, \quad w_i^{(\gamma)} = \begin{cases} \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, & i \in R_A, \\ \gamma, & i \in \overline{R_A}. \end{cases}$$

Строгое диагональное преобладание в матрице C обеспечивается условием (3.2).

Существенным недостатком оценки (3.1) является ее зависимость от параметра γ, поскольку непонятно, как следует выбирать значение γ оптимальным образом. Ниже мы представим не содержащие параметров оценки $\|A^{-1}\|_\infty$ для GSDD_1^* матриц A, не имеющих строгого диагонального преобладания. Для этого нам понадобится следующий известный результат.

Теорема 3.2 ([12]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SDD матрицей для непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n\rangle$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar S} \frac{\max\{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A),\ |a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A) + r_i^{\bar S}(A)\}}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] - r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A)}. \tag{3.3}$$

Кроме того, если $S \subseteq R_A \neq \langle n\rangle$, то

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar S} \frac{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A)}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] - r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A)}. \tag{3.4}$$

Основываясь на теореме 3.2, мы установим следующий результат, обобщающий теорему 2.5 работы [3], в которой предложена верхняя оценка $\|A^{-1}\|_\infty$ для SDD_1^* матрицы A.

Теорема 3.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – $GSDD_1^*$ матрица, причем $R_A \neq \langle n\rangle$, и пусть $B = A\Delta_A$, где диагональная матрица Δ_A определена в соответствии с (2.5).*

• *Если $R_B \neq \langle n\rangle$ и A не является SDD_1^* матрицей, то*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in R_A,\, j\in\overline{R_A}} \frac{r_i(A) - p_i^{R_A}(A) + p_j^{R_A}(A)}{[r_i(A) - p_i^{R_A}(A)][|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A)] - r_i^{\overline{R_A}}(A)\, p_j^{R_A}(A)}. \tag{3.5}$$

• *Если $R_B \neq \langle n\rangle$ и A является SDD_1^* матрицей, то*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in R_A,\, j\in\overline{R_A}} \frac{|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A) + r_i^{\overline{R_A}}(A)}{[r_i(A) - p_i^{R_A}(A)][|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A)] - r_i^{\overline{R_A}}(A)\, p_j^{R_A}(A)}. \tag{3.6}$$

• *Если $R_B = \langle n\rangle$, то для любого непустого собственного подмножества S множества $\langle n\rangle$ верно неравенство*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar S} \frac{\max\{|b_{ii}| - r_i^S(B) + r_j^S(B),\ |b_{jj}| - r_j^{\bar S}(B) + r_i^{\bar S}(B)\}}{[|b_{ii}| - r_i^S(B)]\,[|b_{jj}| - r_j^{\bar S}(B)] - r_i^{\bar S}(B)\, r_j^S(B)}; \tag{3.7}$$

в частности, при $S = R_A$ имеем оценку

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar S} \frac{\max\{r_i(A) - p_i^{R_A}(A) + p_j^{R_A}(A),\ |a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A) + r_i^{\overline{R_A}}(A))\}}{\Big[r_i(A) - p_i^{R_A}(A)\Big]\Big[|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A)\Big] - r_i^{\overline{R_A}}(A)\, p_j^{R_A}(A))}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Заметим сперва, что, в силу замечания 2.1, $R_A \neq \varnothing$. По предложению 2.5, отмасштабированная матрица $B = A\Delta_A$ является R_A-SDD матрицей.

Предположим сначала, что $R_B \neq \langle n\rangle$. Если A при $R_A \neq \langle n\rangle$ не является SDD_1^* матрицей, то, как было показано в доказательстве предложения 2.8, $|b_{ii}| > r_i(B)$ для всех $i \in R_A$; это означает, что $R_A \subseteq R_B$. Тогда, применяя оценку (3.4) теоремы 3.2 к матрице B при $S = R_A$, а также используя соотношения (2.6)–(2.7), мы выводим:

$$\|B^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in R_A,\, j\in\overline{R_A}} \frac{|b_{ii}| - r_i^{R_A}(B) + r_j^{R_A}(B)}{[|b_{ii}| - r_i^{R_A}(B)][|b_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(B)] - r_i^{\overline{R_A}}(B)\, p_j^{R_A}(B)}$$

$$= \max_{i\in R_A,\, j\in\overline{R_A}} \frac{r_i(A) - p_i^{R_A}(A) + p_j^{R_A}(A)}{[r_i(A) - p_i^{R_A}(A)][|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A)] - r_i^{\overline{R_A}}(A)\, p_j^{R_A}(A)}. \tag{3.9}$$

Если же A при $R_A \neq \langle n\rangle$ является SDD_1^* матрицей, то для всех $j \in \overline{R_A}$ выполнено $|a_{jj}| > p_j(A)$, или $|b_{jj}| > r_j(B)$, что означает, что $\overline{R_A} \subseteq R_B$.

Применяя оценку (3.4) теоремы 3.2 к матрице B для $S = \overline{R_A}$ и используя соотношения (2.6)–(2.7), мы получаем:

$$\|B^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in R_A,\, j\in\overline{R_A}} \frac{|b_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(B) + r_i^{\overline{R_A}}(B)}{[|b_{ii}| - r_i^{R_A}(B)][|b_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(B)] - r_i^{\overline{R_A}}(B)\, p_j^{R_A}(B)}$$

$$= \max_{i\in R_A,\, j\in\overline{R_A}} \frac{|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A) + r_i^{\overline{R_A}}(A)}{[r_i(A) - p_i^{R_A}(A)][|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A)] - r_i^{\overline{R_A}}(A)\, p_j^{R_A}(A)}. \tag{3.10}$$

Наконец, в том случае, когда B является SDD матрицей, мы применяем оценку (3.3) теоремы 3.2 к матрице B и получаем:

$$\|B^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \frac{\max\{|b_{ii}| - r_i^S(B) + r_j^S(B),\ |b_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(B) + r_i^{\bar{S}}(B)\}}{[|b_{ii}| - r_i^S(B)]\,[|b_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(B)] - r_i^{\bar{S}}(B)\, r_j^S(B)}. \tag{3.11}$$

Ввиду соотношений (2.6)–(2.7), для $S = R_A$ оценка (3.11) принимает вид

$$\|B^{-1}\|_\infty$$
$$\leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \frac{\max\{r_i(A) - p_i^{R_A}(A) + p_j^{R_A}(A),\ |a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A) + r_i^{\overline{R_A}}(A))\}}{[r_i(A) - p_i^{R_A}(A)][|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A)] - r_i^{\overline{R_A}}(A)\, p_j^{R_A}(A))}. \tag{3.12}$$

Теперь для завершения доказательства остается воспользоваться оценками (3.9)–(3.12) в сочетании с неравенством

$$\|A^{-1}\|_\infty = \|\Delta_A\, B^{-1}\|_\infty \leqslant \|B^{-1}\|_\infty,$$

вытекающим из того факта, что $\Delta_A \leqslant I_n$. □

В следующем заключительном параграфе мы обобщим оценки теорем 3.1 и 3.2 на более широкий класс матриц, содержащий GSDD$_1$, GSDD$_1^*$, а также и S-SDD матрицы, и покажем, что аналог теоремы 3.2 является, вообще говоря, более точным, чем аналог теоремы 3.1. Как следствие мы получим верхнюю оценку $\|A^{-1}\|_\infty$ для GSDD$_1$ и GSDD$_1^*$ матриц A, которая одновременно уточняет оценки как теоремы 3.1, так и теоремы 3.3.

§4. SD-SDD матрицы

В этом параграфе мы вводим в рассмотрение так называемые SD-SDD матрицы, которые являются одновременным обобщением S-SDD матриц, а также GSDD$_1$ и GSDD$_1^*$ матриц A, для которых $R_A \neq \varnothing, \langle n\rangle$, и образуют подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. Также мы переносим оценки теорем 3.1 и 3.2 для $\|A^{-1}\|_\infty$ на случай SD-SDD матриц A и устанавливаем соотношение между новыми оценками. Наконец, мы применяем полученные результаты к GSDD$_1$ и GSDD$_1^*$ матрицам и улучшаем результаты §3.

Определение 4.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть S – непустое подмножество множества $\langle n\rangle$. Матрица A называется* SD-SDD матрицей, если найдется такая невырожденная диагональная матрица $D = \operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$, что $d_i = 1$ при $i \in \bar{S}$ и матрица $B = AD$ является S-SDD матрицей.

Ясно, что класс SD-SDD содержит GSDD_1 матрицы A с $R_A \neq \varnothing$, GSDD_1^* матрицы A с $R_A \neq \langle n\rangle$, а также S-SDD матрицы. С другой стороны, поскольку S-SDD матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами, см., например, [6], то класс SD-SDD матриц также, очевидно, является подклассом класса матриц $\mathcal{H}$-матриц.

Заметим, что, в соответствии с определением 4.1, при $S = \langle n\rangle$ матрица A является $\langle n\rangle D$-SDD матрицей, если AD является $\langle n\rangle$-SDD матрицей, т.е. имеет строгое диагональное преобладание. Итак, в случае $S = \langle n\rangle$, SD-SDD матрицы – это невырожденные $\mathcal{H}$-матрицы.

Начнем с вывода аналога теоремы 3.1 для SD-SDD матриц.

Теорема 4.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является SD-SDD матрицей для непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n\rangle$ и пусть $D = \operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$, где $d_i = 1$ при $i \in \bar{S}$, – такая невырожденная диагональная матрица, что $B = (b_{ij}) = AD$ является S-SDD матрицей. Тогда для произвольного*

$$\gamma \in \Gamma_B = \left(\max_{j\in\bar{S}} \frac{r_j^S(B)}{|b_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(B)}, \quad \min_{i\in S} \frac{|b_{ii}| - r_i^S(B)}{r_i^{\bar{S}}(B)} \right), \tag{4.1}$$

справедливо неравенство

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\{\omega, \gamma\}\, \Phi_\gamma^S(B), \tag{4.2}$$

где мы полагаем

$$\omega = \max_{i\in S} d_i. \tag{4.3}$$

В теореме 4.1 и ниже по тексту, для заданных матрицы $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, подмножества $S \in \langle n\rangle$ и числа $\gamma > 0$ мы используем обозначение

$$\Phi_\gamma^S(B) = \max\left\{ \frac{1}{\min\limits_{i\in S}\{|b_{ii}| - r_i^S(B) - \gamma r_i^{\bar{S}}(B)\}}, \frac{1}{\min\limits_{j\in\bar{S}}\{\gamma[|b_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(B)] - r_j^S(B)\}} \right\}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (4.2), определим матрицу

$$C_\gamma = (c_{ij}^{(\gamma)}) = A\Delta_\gamma = BD_\gamma, \tag{4.5}$$

где

$$D_\gamma = \mathrm{diag}\,\{d_1^{(\gamma)}, \dots, d_n^{(\gamma)}\}, \quad d_i^{(\gamma)} = \begin{cases} 1, & i \in S, \\ \gamma, & j \in \bar{S}, \end{cases} \tag{4.6}$$

и

$$\Delta_\gamma = \mathrm{diag}\,\{\delta_1^{(\gamma)}, \dots, \delta_n^{(\gamma)}\}, \quad \delta_i^{(\gamma)} = \begin{cases} d_i, & i \in S, \\ \gamma, & j \in \bar{S}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Тогда, как легко видеть,

$$\Phi_\gamma^S(B) = \max_{k \in \langle n \rangle} \frac{1}{|c_{kk}^{(\gamma)}| - r_k(C_\gamma)},$$

а условие $\gamma \in \Gamma_B$ означает, что матрица C_γ имеет строгое диагональное преобладание. Следовательно, по теореме 1.1, мы имеем:

$$\|C_\gamma^{-1}\|_\infty \leqslant \Phi_\gamma^S(B). \tag{4.8}$$

Наконец, используя соотношение $A^{-1} = \Delta_\gamma C_\gamma^{-1}$, определения (4.3), (4.7) и неравенство (4.8), мы выводим:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\Delta_\gamma\|_\infty \times \|C_\gamma^{-1}\| \leqslant \max\{\omega, \gamma\}\ \Phi_\gamma^S(B).$$

□

Замечание 4.1. Если A – GSDD$_1$ матрица и $R_A \neq \varnothing$, то оценка (4.2) теоремы 4.1 сводится к оценке (3.1) теоремы 3.1.

Заметим, что оценка (4.2) теоремы 4.1 зависит от параметра γ. Не зависящую от параметров оценку $\|A^{-1}\|_\infty$ дает следующая теорема.

Теорема 4.2. *В условиях теоремы* 4.1*,*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \omega \Psi_\omega^S(B), \tag{4.9}$$

где ω определяется в соответствии с (4.3)*.*

Здесь и далее мы используем обозначение

$$\Psi_\gamma^S(B) = \max_{i \in S, j \in \bar{S}} \left\{ \frac{\xi_i^S(B)}{\gamma \Delta_{ij}^S(B)}, \quad \frac{\zeta_j^S(B)}{\Delta_{ij}^S(B)} \right\}, \tag{4.10}$$

где $\gamma > 0$, а величины $\xi_i^S(B)$, $\zeta_j^S(B)$ и $\Delta_{ij}^S(B)$ определяются следующими соотношениями:

$$\xi_i^S(B) = |b_{ii}| - r_i^S(B) + r_j^S(B), \quad i \in S, \tag{4.11}$$

$$\zeta_j^S(B) = |b_{jj}| - r_j^{\bar S}(B) + r_i^{\bar S}(B), \quad j \in \bar S, \tag{4.12}$$

и

$$\Delta_{ij}^S(B) = [|b_{ii}| - r_i^S(B)]\,[|b_{jj}| - r_j^{\bar S}(B)] - r_i^{\bar S}(B)\, r_j^S(B), \quad i \in S,\ j \in \bar S. \tag{4.13}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $C_\omega = A\Delta_\omega$, где диагональная матрица Δ_ω определена в соответствии с (4.7). Как нетрудно понять, матрица $C_\omega = BD_\omega$ является S-SDD матрицей, поскольку матрица $B = AD$ является таковой по условию теоремы. Следовательно, по теореме 3.2, во введенных обозначениях имеет место оценка

$$\|C_\omega^{-1}\|_\infty \leqslant \Psi_1^S(C_\omega). \tag{4.14}$$

С другой стороны, очевидно, справедливо тождество

$$\Psi_1^S(C_\omega) = \Psi_\omega^S(B). \tag{4.15}$$

Используя (4.14) и (4.15), мы выводим требуемое неравенство (4.9) следующим образом:

$$\|A^{-1}\|_\infty = \|\Delta_\omega\, C_\omega^{-1}\|_\infty \leqslant \|\Delta_\omega\|_\infty \times \|C_\omega^{-1}\|_\infty \leqslant \omega\ \Psi_\omega^S(B).$$

Теорема доказана. □

Замечание 4.2. Пусть A – S-SDD матрица. Тогда она является и SD-SDD матрицей, причем $D = I_n$. В этом случае, $B = A$, $\omega = 1$, и оценка (4.9) сводится к оценке

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \Psi_1^S(A),$$

т.е. к оценке (3.3) теоремы 3.2.

Чтобы показать, что не зависящая от параметров оценка теоремы 4.2 улучшает, вообще говоря, оценку теоремы 4.1, нам дополнительно потребуется следующая теорема сравнения.

Теорема 4.3 ([2, 12]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD матрица и пусть S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$. Тогда*

$$\Psi_1^S(A) = \max_{i\in S, j\in\bar S} \left\{ \frac{\xi_i^S(A)}{\Delta_{ij}^S(A)}, \quad \frac{\zeta_j^S(A)}{\Delta_{ij}^S(A)} \right\} \leqslant \Phi_1^S(A) = \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}.$$

Теорема 4.4. *В условиях теоремы* 4.1, *при всех* $\gamma \in \Gamma_B$ *справедливо неравенство*

$$\omega\, \Psi_\omega^S(B) \leqslant \max\{\omega,\ \gamma\}\ \Phi_\gamma^S(B); \tag{4.16}$$

здесь Γ_B, ω, $\Psi_\omega^S(B)$ *и* $\Phi_\gamma^S(B)$ *соответственно определяются формулами* (4.1), (4.3), (4.10) *и* (4.4).

Доказательство. Для доказательства (4.16) предположим сперва, что $\omega \geqslant \gamma$. В этом случае, $\max\{\omega,\ \gamma\} = \omega$, так что неравенство (4.16) равносильно неравенству

$$\Psi_\omega^S(B) \leqslant \Phi_\gamma^S(B). \tag{4.17}$$

Поскольку для S-SDD матрицы B функция $\Psi_\gamma^S(B)$ является невозрастающей функцией от $\gamma > 0$ и поскольку $\omega \geqslant \gamma$, то

$$\Psi_\omega^S(B) \leqslant \Psi_\gamma^S(B). \tag{4.18}$$

С другой стороны, из очевидных тождеств

$$\Psi_\gamma^S(B) = \Psi_1^S(C_\gamma) \quad \text{и} \quad \Phi_1^S(C_\gamma) = \Phi_\gamma^S(B)$$

и неравенства

$$\Psi_1^S(C_\gamma) \leqslant \Phi_1^S(C_\gamma),$$

которое получается применением теоремы 4.3 к SDD матрице C_γ, следует, что

$$\Psi_\gamma^S(B) \leqslant \Phi_\gamma^S(B), \quad \gamma \in \Gamma_B. \tag{4.19}$$

Теперь требуемое неравенство (4.17) получается из (4.18) и (4.19).

Пусть теперь $\omega \leqslant \gamma$. В этом случае, учитывая, что функция $\gamma\Psi_\gamma^S(B)$ является неубывающей функцией от $\gamma > 0$ и используя (4.19), получаем:

$$\omega\Psi_\omega^S(B) \leqslant \gamma\Psi_\gamma^S(B) = \max\{\omega,\ \gamma\}\ \Psi_\gamma^S(B) \leqslant \max\{\omega,\ \gamma\}\ \Phi_\gamma^S(B).$$

Этим доказательство теоремы 4.4 завершается. □

Замечание 4.3. Для S-SDD матрицы A, которая является SD-SDD матрицей с $D = I_n$, так что $B = A$ и $\omega = 1$, теорема 4.4 дает:

$$\Psi_1^S(A) \leqslant \max\{1,\ \gamma\}\ \Phi_\gamma^S(A). \tag{4.20}$$

Таким образом, из текоремы 4.4 в частности следует, что оценку теоремы 3.2 невозможно улучшить масштабированием столбцов матрицы A с помощью диагональной матрицы вида D_γ, см. (4.6), и последующим применением теоремы 1.1.

Мы завершим данный параграф и статью в целом, применяя теоремы 4.2 и 4.4 к соответствующим GSDD_1 (или GSDD_1^*) матрицам. В этом частном случае, мы имеем $S = R_A$,

$$d_i = \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} < 1, \quad i \in R_A, \tag{4.21}$$

$\|D\|_\infty = 1$, и из теоремы 4.2 мы немедленно получаем следующую не содержащую параметров оценку, вообще говоря, более точную чем оценки теоремы 3.3.

Следствие 4.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является $GSDD_1$ или же $GSDD_1^*$ матрицей, причем $R_A \neq \varnothing$, $\langle n\rangle$, и пусть*

$$\tau = \max_{i\in R_A} \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}.$$

Тогда

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \tau\, \Psi_\tau^{R_A}(B) \leqslant \Psi_1^{R_A}(B). \tag{4.22}$$

Доказательство. Ввиду теоремы 4.2, нам остается лишь заметить, что

$$\tau\, \Psi_\tau^{R_A}(B) \leqslant \Psi_1^{R_A}(B),$$

поскольку $\tau < 1$. □

Наконец, в применении к соответствующим GSDD_1 (или же GSDD_1^*) матрицам из теоремы 4.4 немедленно следует, что не зависящая от параметров оценка из (4.22) по крайней мере не хуже, чем оценка теоремы 3.1, зависящая от параметра γ.

Следствие 4.2. *В условиях следствия* 4.1 *для любого $\gamma \in \Gamma_B$ справедливо неравенство*

$$\tau\, \Psi_\tau^{R_A}(B) \leqslant \max\{\tau,\ \gamma\}\, \Phi_\gamma^{R_A}(B). \tag{4.23}$$

Список литературы

1. Л. Ю. Колотилина, *Псевдоблочные условия диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 94–131.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
3. Л. Ю. Колотилина, *Об SDD_1 матрицах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 88–112.
4. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.

5. X. Cheng, Y. Li, L. Liu, Y. Wang, *Infinity norm upper bounds for the inverse of SDD_1 matrices.*— AIMS Math. **7**, No. 5 (2022), 8847–8860.
6. L. Cvetković, V. Kostić, R. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area.* — ETNA **18** (2004), 73–80.
7. P. F. Dai, *A note on diagonal dominance, Schur complements and some classes of H-matrices and P-matrices.*— Adv. Comput. Math. **42** (2016), 1–4.
8. Ping-Fan Dai, Jinping Li, Shaoyu Zhao, *Infinity norn bounds for the inverse for $GSDD_1$ matrices using scaling matrices.*— Comput. Appl. Math. **42** (2023), 121.
9. Y. M. Gao, X. H. Wang, *Criteria for generalized diagonal dominant and M-matrices.*— Linear Algebra Appl. **169** (1992), 257–268.
10. Y. Li, Y. Wang, *Schur complement-based infinity norm bounds for the inverse of GDSDD matrices.* — Mathematics **10** (2022), 186.
11. J. Liu, Y. Huang, F. Zhang, *The Schur complements of generalized doubly diagonally dominant matrices.*— Linear Algebra Appl. **378** (2004), 231–244.
12. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and $\mathcal{S}$-SDD matrices.*— J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.
13. J. M. Peña, *Diagonal dominance, Schur complements and some classes of H-matrices and P-matrices.*— Adv. Comput. Math. **35** (2011), 357–373.
14. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
15. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.* Springer, 2004.

Kolotilina L. Yu. SDD_1 matrices and their generalizations.

The paper considers the classes of GSDD_1, GSDD_1^*, and SD-SDD matrices, which contain the class of SDD (strictly diagonally dominant) matrices and are contained in the class of nonsingular $\mathcal{H}$-matrices. New upper bounds on $\|A^{-1}\|_\infty$ for GSDD_1, GSDD_1^*, and SD-SDD matrices A, generalizing known upper bounds for S-SDD, SDD_1^*, and GSDD_1 matrices, are established and compared.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 3 ноября 2023 г.