Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 524, 2023 г.

Л. Ю. Колотилина

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ $\|A^{-1}\|_\infty$ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭВЕНТУАЛЬНЫХ $\mathcal{H}$-МАТРИЦ

§1. Введение и предварительные сведения

Один из наиболее хорошо изученных подклассов класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц состоит из матриц, обладающих строгим диагональным преобладанием (Strictly Diagonally Dominant), так называемых SDD матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, удовлетворяющих условию

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$r_i(A) = \sum_{j\in\langle n\rangle\setminus\{i\}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

– это усеченные абсолютные строчные суммы матрицы A, а $\langle n\rangle = \{1, \ldots, n\}$ – множество индексов.

Как хорошо известно, SDD матрицы образуют подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, а норма l_∞ обратной к SDD матрице удовлетворяет следующей классической верхней оценке.

Теорема 1.1 ([3, 12])**.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 1$, – SDD матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}. \tag{1.1}$$

В работе [4] было предложено следующее обобщение SDD матриц.

Определение 1.1. *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, называется эвентуальной SDD матрицей, если существуют комплексное число $s \in \mathbb{C}$ и натуральное число $k \geqslant 1$ такие, что $A = sI_n - B$ и ассоциированная матрица*

$$A_s^{(k)} := s^k I_n - B^k \tag{1.2}$$

имеет строгое диагональное преобладание; в этом случае мы пишем $A \in SDD(s, k)$.

Ключевые слова: l_∞-норма обратной матрицы, верхние оценки, эвентуальные SDD матрицы, эвентуальные DSDD матрицы, эвентуальные $\mathcal{H}$-матрицы.

На протяжении данной статьи I_n – это единичная матрица порядка $n \geqslant 1$.

Здесь представляются уместными следующие простые замечания.

1. Ясно, что A является SDD матрицей тогда и только тогда, когда $A \in SDD(s,1)$ для всех $s \in \mathbb{C}$.

2. Поскольку для матрицы $A = sI_n - B$ и произвольного $\alpha \neq 0$ мы имеем

$$(\alpha A)^{(k)}_{\alpha s} = ((\alpha s)^k I_n - (\alpha B)^k = \alpha^k (s^k I_n - B^k) = \alpha^k A^{(k)}_s,$$

то A и αA являются эвентуальными SDD матрицами одновременно, так что множество эвентуальных SDD матриц для любого фиксированного k замкнуто относительно умножения на ненулевые комплексные числа.

3. В том случае когда матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет постоянную главную диагональ, т.е. $a_{ii} = \xi,\ i = 1, \dots, n$, класс $SDD(\xi, 2)$ совпадает с матричным классом, рассмотренным в статье [8], в которой было показано, что если

$$|\xi^2 - \{B^2\}_{ii}| > r_i(B^2), \quad i = 1, \dots, n,$$

то матрица $A = \xi I_n - B$ является невырожденной, а также были приведены соответствующие множества локализации ее собственных значений. Вопрос об оценке $\|A^{-1}\|_\infty$ в статье [8] не рассматривался.

Заметим, что если $A = sI_n - B$, то

$$A^{(k)}_s = s^k I_n - B^k = p_{k-1}(s, B)A, \tag{1.3}$$

где

$$p_{k-1}(s, B) = \sum_{i=0}^{k-1} s^i B^{k-1-i} = s^{k-1} I_n + s^{k-2} B + \cdots + s B^{k-2} + B^{k-1} \tag{1.4}$$

является полиномом относительно матрицы B.

Из соотношения (1.3) немедленно вытекает, что для того, чтобы матрица $A = sI_n - B$ была невырожденной, достаточно, чтобы матрица $A^{(k)}_s$ была невырожденной. Кроме того, из (1.3) также следует, что $A^{-1} = p_{k-1}(s, B)\, {A^{(k)}_s}^{-1}$, так что

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|p_{k-1}(s, B)\|_\infty \times \|{A^{(k)}_s}^{-1}\|_\infty. \tag{1.5}$$

Если же $A = sI_n - B$ является $SDD(s,k)$ матрицей, то из (1.5) и (1.1) вытекает оценка

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|p_{k-1}(s,B)\|_\infty \times \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{|s^k - \{B^k\}_{ii}| - r_i(B^k)}, \qquad (1.6)$$

которая была предложена в работе [4].

Напомним, что класс $\mathcal{H}_\exists$ эвентуальных $\mathcal{H}$-матриц был определен в работе [4] следующим образом.

Определение 1.2. *Говорят, что матрица $A = sI_n - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, является эвентуальной $\mathcal{H}$-матрицей, если существуют комплексное число $s \in \mathbb{C}$ и натуральное число $k \geqslant 1$ такие, что $A_s^{(k)}$ является $\mathcal{H}$-матрицей; в таком случае мы пишем $A \in \mathcal{H}(s,k)$.*

Ясно, что определения 1.1 и 1.2 можно обобщить следующим образом.

Определение 1.3. *Пусть $\mathcal{K}$ – некоторый класс (невырожденных) матриц. Будем говорить, что $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, является эвентуальной $\mathcal{K}$-матрицей, или, точнее, что $A \in \mathcal{K}(s,k)$, если найдутся комплексное число $s \in \mathbb{C}$ и натуральное число $k \geqslant 1$ такие, что матрица $A_s^{(k)}$ является $\mathcal{K}$-матрицей.*

Определение 1.3 применимо, в частности, в тех случая, когда класс $\mathcal{K}$ состоит из эвентуальных SDD, DSDD, S-SDD, некрасовских и т.п. матриц.

Целью данной статьи является представление двух подходов-технологий, позволяющих получать верхние оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$ для матриц A, принадлежащих к некоторым подклассам класса эвентуальных $\mathcal{H}$-матриц. Первый подход основан на уточнении тривиальной оценки (1.5), а второй – на использовании известных верхних оценок для $\|A^{-1}Q\|_\infty$, где Q – произвольная прямоугольная комплексная матрица подходящих размеров. Первая технология обсуждается в §2, а вторая описывается в §3. Также в §3 объясняется почему, в применении к эвентуальным SDD и эвентуальным DSDD матрицам, обе они приводят к одинаковым результатам. В §4 предложены некоторые обобщения представленных подходов на более широкие классы матриц.

§2. Первый подход

Для улучшения оценки (1.5) мы будем использовать следующий результат.

Теорема 2.1 ([1]). *Пусть A и $G = (g_{ij})$ – невырожденные комплексные матрицы порядка $n \geqslant 1$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|(\Delta^{-1}GA)^{-1}\|_\infty, \tag{2.1}$$

где диагональная матрица $\Delta = \operatorname{diag}\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ определяется соотношениями

$$\delta_i = R_i(G) := |g_{ii}| + r_i(G), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Поскольку, очевидно,

$$\|(\Delta^{-1}GA)^{-1}\|_\infty \leqslant \|\Delta\|_\infty \times \|(GA)^{-1}\|_\infty = \|G\|_\infty \times \|(GA)^{-1}\|_\infty,$$

то оценка (2.1) является, вообще говоря, боле точной, чем тривиальная оценка

$$\|A^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}G^{-1} \cdot G\|_\infty \leqslant \|G\|_\infty \times \|(GA)^{-1}\|_\infty.$$

В частности, при $G = p_{k-1}(s, B)$ мы имеем

$$\delta_i = R_i(p_{k-1}(s, B)), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и из теоремы 2.1 немедленно вытекает следующее улучшение оценки (1.5).

Следствие 2.1. *Пусть $A = sI_n - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 1$, $s \in \mathbb{C}$ и $k \geqslant 1$ – натуральное число. Если матрица $A_s^{(k)} = s^k I_n - B^k$ является невырожденной, то*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|(\Delta^{-1}A_s^{(k)})^{-1}\|_\infty \leqslant \|p_{k-1}(s, B)\|_\infty \times \|A_s^{(k)^{-1}}\|_\infty, \tag{2.2}$$

где

$$\Delta = \operatorname{diag}\{R_1(p_{k-1}(s, B)), \ldots, R_n(p_{k-1}(s, B))\}. \tag{2.3}$$

Мы будем применять следствие 2.1 к эвентуальным $\mathcal{K}$-матрицам в предположении, что выполняются следующие условия:

(i) класс $\mathcal{K}$ состоит из невырожденных матриц;

(ii) класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы (левого масштабирования);

(iii) для любой матрицы $C \in \mathcal{K}$ известна верхняя оценка нормы $\|C^{-1}\|_\infty$.

В этих предположениях, если A – эвентуальная $\mathcal{K}$-матрица, то матрица $\Delta^{-1}A_s^{(k)}$, фигурирующая в следствии 2.1, также является эвентуальной $\mathcal{K}$-матрицей, так что $\|A^{-1}\|_\infty$ можно оценить сверху с помощью левого неравенства из (2.2).

Поскольку класс SDD матриц удовлетворяет условиям (i)–(iii), то описанный выше подход применим, в частности, к эвентуальным SDD матрицам, и, комбинируя следствие 2.1 с теоремой 1.1, мы приходим к следующему улучшению оценки (1.6).

Теорема 2.2. *Пусть* $A = sI_n - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 1$, – $SDD(s,k)$ *матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{R_i(p_{k-1}(s,B))}{|s^k - \{B^k\}_{ii}| - r_i(B^k)}. \tag{2.4}$$

В качестве другой иллюстрации предложенного подхода мы рассмотрим класс эвентуальных DSDD матриц, введенный в работе [11]. Напомним базовое определение DSDD матриц (также известных как матрицы Островского-–Брауэра, OB матрицы).

Определение 2.1. *Говорят, что матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *имеет двойное строгое диагональное преобладание (является Doubly Strictly Diagonally Dominant, DSDD матрицей), если*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\,r_j(A), \quad i \neq j, \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{2.5}$$

Аналог оценки (1.1) для обратных к DSDD матрицам был независимо получен в по крайней мере трех публикациях, и мы напоминаем его в следующей теореме.

Теорема 2.3 ([5, 7, 9])**.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *– DSDD матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\neq j} \frac{|a_{ii}| + r_j(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)}. \tag{2.6}$$

Обобщение оценки (2.6) на случай эвентуальных DSDD матриц, основанное на соотношении (1.5), было представлено в работе [11] и состоит в следующем.

Если $A = sI_n - B$ является $DSDD(s,k)$ матрицей, то

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|p_{k-1}(s,B)\|_\infty \times \max_{i\neq j} \frac{|s^k - \{B^k\}_{ii}| + r_j(B^k)}{|s^k - \{B^k\}_{ii}|\,|s^k - \{B^k\}_{jj}| - r_i(B^k)\,r_j(B^k)}. \tag{2.7}$$

Применяя же предложенную выше технологию, мы получаем следующее улучшение оценки (2.7).

Теорема 2.4. *Пусть* $A = (a_{ij}) = sI_n - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, – $DSDD(s,k)$ *матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\neq j} \frac{|s^k - \{B^k\}_{ii}|R_j + r_j(B^k)R_i}{|s^k - \{B^k\}_{ii}|\,|s^k - \{B^k\}_{jj}| - r_i(B^k)\,r_j(B^k)}, \tag{2.8}$$

где используется сокращенное обозначение

$$R_i = R_i(p_{k-1}(s,B)), \quad i = 1,\dots,n.$$

Доказательство. Поскольку, очевидно, класс DSDD замкнут относительно левого масштабирования, то матрица $\Delta^{-1}A_s^{(k)}$, где

$$\Delta = \operatorname{diag}\{R_1,\dots,R_n\},$$

является DSDD матрицей наряду с $A_s^{(k)}$. Теперь для завершения доказательства остается использовать следствие 2.1 и применить оценку (2.6) к DSDD матрице $\Delta^{-1}A_s^{(k)}$. □

§3. Второй подход

Подход, предлагаемый в этом параграфе, даже проще, чем подход, описанный в §2, и он применим к эвентуальным $\mathcal{K}$-матрицам, если для любой матрицы $C \in \mathcal{K}$ имеется верхняя оценка не только для $\|A^{-1}\|_\infty$, но также и для $\|A^{-1}Q\|_\infty$, где Q – произвольная прямоугольная комплексная матрица соответствующих размеров.

Если $A \in \mathcal{K}(s,k)$, то, по определению, $A_s^{(k)} = p_{k-1}(s,B)A \in \mathcal{K}$, и

$$A^{-1} = {A_s^{(k)}}^{-1}Q, \quad \text{где} \quad Q = p_{k-1}(s,B). \tag{3.1}$$

Таким образом, для эвентуальной $\mathcal{K}$-матрицы A задача оценки сверху $\|A^{-1}\|_\infty$ сводится к оценке $\|{A_s^{(k)}}^{-1}Q\|_\infty$, где $Q = p_{k-1}(s,B)$.

Задача обобщения верхних оценок нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ на случай $\|A^{-1}Q\|_\infty$ рассматривалась в работах [13], [10] и [6] соответственно для классов SDD, DSDD и S-SDD матриц. Общий подход к выводу оценок для $\|A^{-1}Q\|_\infty$ из оценок для $\|A^{-1}\|_\infty$ был разработан и проиллюстрирован в статье [2], где рассматривались случаи SDD, DSDD, S-SDD и некрасовских матриц. Для полноты изложения ниже мы напоминаем результаты для SDD и DSDD матриц (касательно S-SDD и некрасовских матриц, мы отсылаем читателей к работе [2]).

Теорема 3.1 ([13, 2]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является SDD матрицей и пусть $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, где $m \geqslant 1$. Тогда*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{R_i(Q)}{|a_{ii}| - r_i(A)}. \tag{3.2}$$

Теорема 3.2 ([10, 2]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является DSDD (OB) матрицей и пусть $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, где $m \geqslant 1$. Тогда*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\neq j} \frac{|a_{jj}|R_i(Q) + r_i(A)R_j(Q)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)}. \tag{3.3}$$

Следует отметить, что в случае SDD(s,k) и DSDD(s,k) матриц $A = sI_n - B$ оценки теорем 3.1 и 3.2 в применении к матрицам $A_s^{(k)}$ и $Q = p_{k-1}(s, B)$, очевидно, совпадают с оценками соответственно теорем 2.2 и 2.4.

Такое совпадение, как будет показано ниже, не является случайным. Напомним, что в работе [2] вышеуказанные теоремы 3.1 и 3.2 были установлены с помощью следующего общего результата.

Теорема 3.3 ([2]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей и пусть $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$, где $m \geqslant 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \|(\mathcal{M}(D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1}A)^{-1}\|_\infty, \tag{3.4}$$

где мы используем обозначения

$$q^{(\varepsilon)} = (q_i^{(\varepsilon)}), \quad q_i^{(\varepsilon)} = R_i(Q) + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

и

$$D_{q^{(\varepsilon)}} = \operatorname{diag}\{q_1^{(\varepsilon)}, \dots, q_n^{(\varepsilon)}\}.$$

В теореме 3.3 и ниже через $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$ обозначается матрица сравнения для матрицы $A = (a_{ij})$, элементы которой определяются соотношениями

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

Теорема 3.3 позволяет свести задачу получения верхней оценки для $\|A^{-1}Q\|_\infty$ к той же задаче для обратной к матрице $\mathcal{M}(D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1}A)$, которая является матрицей сравнения для отмасштабированной матрицы $D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1}A$.

Если для матриц $C \in \mathcal{K}$ оценка нормы $\|C^{-1}\|_\infty$ совпадает с оценкой нормы $\|\mathcal{M}(C)^{-1}\|_\infty$, то оценка (3.4) принимает вид

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \|(D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1}A)^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}D_{q^{(\varepsilon)}}\|_\infty \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \|A^{-1}D\|_\infty, \qquad (3.5)$$

где

$$D = \operatorname{diag}\{R_1(Q), \ldots, R_n(Q)\}. \qquad (3.6)$$

Далее, если матрица Q не имеет нулевых строк, то матрица D имеет положительные диагональные элементы и, следовательно, является невырожденной. В этом случае, из (3.5) следует, что

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \|(D^{-1}A)^{-1}\|_\infty. \qquad (3.7)$$

В частности, если матрица $A \in \mathcal{K}(s,k)$ невырождена и оценка (3.7) применяется к матрицам $A_s^{(k)}$ и $Q = p_{k-1}(s,B)$, то из (3.1) и (3.7) мы получаем

$$\|A^{-1}\|_\infty = \|{A_s^{(k)}}^{-1} p_{k-1}(s,B)\|_\infty \leqslant \|(\Delta^{-1}A_s^{(k)})^{-1}\|_\infty, \qquad (3.8)$$

где, как и в (2.2),

$$\Delta = \operatorname{diag}\{R_1(p_{k-1}(s,B)), \ldots, R_n(p_{k-1}(s,B))\}.$$

Таким образом, мы пришли к левому неравенству из (2.2), которое было использовано при выводе оценок теорем 2.2 и 2.4 для обратных к SDD(s,k) и DSDD(s,k) матрицам. Этим и объясняется тот факт, что оба подхода к выводу верхних оценок нормы l_∞ обратных матриц приводят к одинаковым результатам как для эвентуальных SDD, так и для эвентуальных DSDD матриц.

§4. Заключительные замечания

В этой заметке были представлены две простые технологии, позволяющие получать верхние оценки обратных к некоторым эвентуальным $\mathcal{H}$-матрицам. Эти технологии были проиллюстрированы на примерах эвентуальных SDD и эвентуальных DSDD матриц, для которых они приводят к улучшению известных верхних оценок.

Более того, поскольку ни одна из технологий не использует никаких специальных свойств матричного полинома $p_{k-1}(s,B)$, фигурирующего в определении эвентуальных $\mathcal{H}$-матриц, они, очевидно, могут быть обобщены и на существенно более широкие классы матриц. Это делается следующим образом.

Пусть $A, G \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 1$, и пусть GA является $\mathcal{K}$-матрицей, где класс $\mathcal{K}$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) из §2. Тогда, по теореме 2.1, мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|(\Delta^{-1}GA)^{-1}\|_\infty,$$

и правую часть можно оценить сверху, применив любую известную верхнюю оценку к $\mathcal{K}$-матрице $\Delta^{-1}GA$.

Альтернативный подход состоит в следующем. Предположим, что для любой матрицы $C \in \mathcal{K}$ и произвольной прямоугольной матрицы Q соответствующих размеров известна верхняя оценка для $\|C^{-1}Q\|_\infty$. В этом случае, используя очевидное соотношение $A^{-1} = (GA)^{-1}G$ и полагая $C = GA$ и $Q = G$, мы получаем верхнюю оценку для $\|(GA)^{-1}G\|_\infty = \|A^{-1}\|_\infty$.

В частности, если GA является SDD матрицей, то, применив теорему 3.1, мы получаем оценку

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{R_i(G)}{|\{GA\}_{ii}| - r_i(GA)},$$

которая первоначально была предложена в работе [1] и обобщает оценку (2.4).

Список литературы

1. Л. Ю. Колотилина, *Некоторые новые классы невырожденных матриц и верхние оценки для их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 184–200.
2. Л. Ю. Колотилина, *Верхние оцнки для* $\|A^{-1}Q\|_\infty$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 77–87.
3. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.
4. L. Cvetković, M. Erić, J. M. Peña, *Eventually SDD matrices and eigenvalue localization.* — Appl. Math. Comput. **252** (2015), 535–540.
5. V. R. Kostić, L. Cvetković, D. I. Cvetković, *Pseudospectra localization and their applications.* — Numer. Linear Algebra Appl. **23** (2016), 356–372.
6. Y. Li, Y. Wang, *Schur complement-based infinity norm bounds for the inverse of GDSDD matrices.* — Mathematics **10** (2022), 186.
7. J. Liu, J. Zhang, Y. Liu, *The Schur complement of strictly doubly diagonally dominant matrices and its application.* — Linear Algebra Appl. **437** (2012), 168–183.
8. A. Melman, *Ovals of Cassini for Toeplitz matrices.* — Linear Multilinear Algebra **60** (2012), 189–199.
9. S. Z. Pan, S. C. Chen, *An upper bound for* $\|A^{-1}\|_\infty$ *of strictly doubly diagonally dominant matrices* [in Chinese]. — J. Fuzhou Univ. Nat. Sci. Ed. **36** (2008), 639–642.

10. C. Sang, *Schur complement-based infinity norm bounds for the inverse of DSDD matrices.* — Bull. Iran. Math. Soc. **47** (2020), 1379–1398.
11. C. Sang, J. X. Zhao, *Eventually DSDD matrices and eigenvalue localization.* — Symmetry **448** (2018), No. 10, doi: 103390/sym10100448.
12. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
13. X. R. Yong, *Two properties of diagonally dominant matrices.* — Numer. Linear Algebra **3** (1996), 173–177.

Kolotilina L. Yu. Upper bounds for $\|A^{-1}\|_\infty$ for some eventually $\mathcal{H}$-matrices.

The paper suggests two general approaches to deriving upper bounds for $\|A^{-1}\|_\infty$ for some eventually $\mathcal{H}$-matrices A. The approaches are illustrated by considering the classes of eventually SDD and eventually DSDD matrices, for which improvements of the known bounds are derived. Also it is indicated that the approaches suggested are actually applicable to considerably larger matrix classes.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 27 июня 2023 г.