Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 524, 2023 г.

Л. Ю. Колотилина

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА PF МАТРИЦЫ

В работе [6], Ноутсос ввел следующее определение.

Определение 1. *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, обладает свойством Перрона–Фробениуса, если ее доминирующее собственное значение положительно, а соответствующий правый собственный вектор неотрицателен. Следуя* [5]*, такие матрицы мы также будем называть PF матрицами.*

В статье [6] было установлено следующее обобщение двусторонних столбцовых оценок Фробениуса для перроновского корня неотрицательной матрицы на случай спектрального радиуса PF матрицы.

Теорема 1 ([6])**.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, является PF матрицей. Тогда ее доминирующее собственное значение $\rho(A)$ удовлетворяет двусторонним оценкам*

$$\min_{i\in\langle n\rangle} R_i(A^T) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} R_i(A^T).$$

Здесь и ниже мы используем обозначения

$$\langle n\rangle = \{1, \dots, n\}$$

и

$$R_i(A) = \sum_{j\in\langle n\rangle} a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

К сожалению, строчные аналоги оценок теоремы 1 в общем случае неверны. Однако, как было установлено в работе [5], спектральный радиус PF матрицы удовлетворяет следующим трем верхним оценкам, формулируемым в терминах ее строчных сумм.

Теорема 2 ([5])**.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – PF матрица. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} R_i(A^+); \tag{1}$$

Ключевые слова: спектральный радиус, неотрицательные матрицы, перроновский корень, свойство Перрона–Фробениуса, доминирующее собственное значение, верхние оценки.

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2} \max_{\substack{i,\, j \in \langle n \rangle \\ i \neq j}} \left\{ a_{ii} + a_{jj} + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4 r_i(A^+)\, r_j(A^+)} \right\}; \qquad (2)$$

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2} \min_{S \subset \langle n \rangle} \max_{\substack{i \in S, \\ j \in \bar{S}}} \left\{ R_i^S(A^+) + R_j^{\bar{S}}(A^+) \right.$$
$$\left. + \sqrt{\left[R_i^S(A^+) - R_j^{\bar{S}}(A^+) \right]^2 + 4 R_i^{\bar{S}}(A^+)\, R_j^S(A^+)} \right\}. \qquad (3)$$

В теореме 2 и далее по тексту мы используем следующие обозначения:

$A^+ = (a_{ij}^+) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – это матрица, получаемая из A обнулением всех отрицательных внедиагональных элементов, так что

$$a_{ij}^+ = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если} \quad i = j \quad \text{или} \quad a_{ij} \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad a_{ij} < 0; \end{cases} \qquad (4)$$

для заданных матрицы $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и подмножества $S \subseteq \langle n \rangle$ мы полагаем

$$r_i(B) = R_i(B) - b_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

а также

$$R_i^S(B) = \sum_{j \in S} b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

дополнение $\langle n \rangle \setminus S$ множества S до $\langle n \rangle$ обозначается чрез $\bar{S}$.

I_n обозначает единичную матрицу порядка n.

Векторные неравенства понимаются покомпонентно.

В этой заметке мы показываем, как произвольную верхнюю оценку для перроновского корня неотрицательной матрицы можно обобщить на случай доминирующего собственного значения PF матрицы. Предложенный подход мы демонстрируем, показывая, как можно получить и уточнить оценки теоремы 1, а также выводя аналог классической теоремы Островского.

Следующая простая лемма немедленно вытекает из определения матрицы A^+.

Лемма 1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть $x \in \mathbb{R}^n$ – неотрицательный вектор. Тогда*

$$A^+ x \geqslant Ax \quad \text{и} \quad x^T A^+ \geqslant x^T A.$$

Нашим главным инструментом будет неотрицательная матрица

$$A_\gamma^+ = A^+ + \gamma I_n,$$

где γ – такое неотрицательное число, что

$$\gamma + a_{ii} \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Сперва мы выведем верхнюю оценку для положительного (необязательно доминирующего) собственного значения вещественной матрицы, которому отвечает неотрицательный собственный вектор.

Предложение 1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть*

$$Ax = \lambda x, \tag{6}$$

где λ – положительное собственное значение, а вектор $x \in \mathbb{R}^n$ является неотрицательным и ненулевым. Тогда при любом γ, удовлетворяющим условию (5)*, справедливо неравенство*

$$\lambda \leqslant \rho(A_\gamma^+) - \gamma. \tag{7}$$

Доказательство. В силу (6) и леммы 1, мы имеем

$$\lambda x = Ax \leqslant A^+ x.$$

Отсюда следует, что

$$A_\gamma^+ x = A^+ x + \gamma x \geqslant Ax + \gamma x = (\lambda + \gamma)x.$$

Но тогда, ввиду [3, Chapter 2, Theorem 1.11], перроновский корень неотрицательной матрицы A_γ^+ удовлетворяет нижней оценке

$$\rho(A_\gamma^+) \geqslant \lambda + \gamma,$$

что и доказывает (7). □

В качестве очевидного следствия предложения 1 мы получаем следующий результат, являющийся базовым для данной работы.

Теорема 3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – PF матрица и пусть γ удовлетворяет условию* (5)*. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \rho(A_\gamma^+) - \gamma. \tag{8}$$

Ясно, что оценка (8) не зависит от выбора допустимого значения параметра γ и позволяет конвертировать любую имеющуюся верхнюю оценку перроновского корня неотрицательной матрицы A_γ^+ в соответствующую верхнюю оценку для доминирующего собственного значения PF матрицы A, не зависящую от параметра γ. Кроме того, если одна из оценок, применяемых к $\rho(A_\gamma^+)$, является более точной, чем другая, то то же самое соотношение будет иметь место и для соответствующих оценок доминирующего собственного значения PF матрицы A.

Для того, чтобы проиллюстрировать предлагаемый подход, мы выведем три оценки теоремы 1 из соответствующих оценок для перроновского корня неотрицательной матрицы.

1. Используя (8) и верхнюю оценку Фробениуса

$$\rho(A_\gamma^+) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} R_i(A_\gamma^+)$$

и принимая во внимание соотношения

$$R_i(A_\gamma^+) = \gamma + R_i(A^+), \quad i = 1, \ldots, n,$$

мы немедленно получаем оценку (1).

2. Комбинируя оценку (8) с верхней оценкой Брауэра–Джентри [4]

$$\rho(B) \leqslant \frac{1}{2} \max_{\substack{i,\, j \in \langle n \rangle \\ i \neq j}} \left\{ b_{ii} + b_{jj} + \sqrt{(b_{ii} - b_{jj})^2 + 4 r_i(B)\, r_j(B)} \right\}$$

для перроновского корня неотрицательной матрицы $B = (b_{ij})$ и учитывая очевидные соотношения

$$\begin{gathered} \{A_\gamma^+\}_{ii} + \{A_\gamma^+\}_{jj} = 2\gamma + a_{ii} + a_{jj}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \\ \{A_\gamma^+\}_{ii} - \{A_\gamma^+\}_{jj} = a_{ii} - a_{jj}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \\ r_i(A_\gamma^+) = r_i(A^+), \quad i = 1, \ldots, n, \end{gathered}$$

мы приходим к оценке (2).

Более того, если вместо классической оценки Брауэра–Джентри воспользоваться ее более точной версией, учитывающей структуру разреженности матрицы [1], то точно таким же образом мы получим следующее улучшение оценки (2):

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2} \max_{\substack{i \neq j: \\ a_{ij} \neq 0}} \left\{ a_{ii} + a_{jj} + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4 r_i(A^+)\, r_j(A^+)} \right\}. \tag{9}$$

3. Оценку (3) мы получим как частный случай более общей верхней оценки. Для этого нам понадобится следующий результат.

Теорема 4 ([2]). *Пусть $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть $\langle n\rangle = \bigcup_{i=1}^m S_i$ – это разбиение множества индексов на $m \geqslant 1$ непересекающихся непустых подмножеств S_i. Обозначим*

$$B^{(i_1,i_2,\dots,i_m)} = \begin{bmatrix} R_{i_1}^{S_1}(B) & R_{i_1}^{S_2}(B) & \dots & R_{i_1}^{S_m}(B) \\ R_{i_2}^{S_1}(B) & R_{i_2}^{S_2}(B) & \dots & R_{i_2}^{S_m}(B) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{i_m}^{S_1}(B) & R_{i_m}^{S_2}(B) & \dots & R_{i_m}^{S_m}(B) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где

$$i_1 \in S_1, \quad i_2 \in S_2, \quad \dots, \quad i_m \in S_m.$$

Тогда

$$\rho(B) \leqslant \max_{(i_1,i_2,\dots,i_m)} \rho(B^{(i_1,i_2,\dots,i_m)}), \tag{11}$$

где максимум берется по всем наборам $i_k \in S_k$, $k = 1,\dots,m$.

Сочетая теоремы 3 и 4, мы получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – PF матрица и пусть $\langle n\rangle = \bigcup_{i=1}^m S_i$ – некоторое разбиение множества индексов на $m \geqslant 1$ непересекающихся непустых подмножеств S_i. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \max_{(i_1,i_2,\dots,i_m)} \rho(A_\gamma^{+(i_1,i_2,\dots,i_m)}) - \gamma. \tag{12}$$

Заметим, что при $m = 1$ оценка (12) сводится к оценке (1). Если же $m = 2$, то для заданного непустого собственного подмножества S и индексов $i \in S$ и $j \in \bar{S}$ мы имеем

$$A_\gamma^{+(i,j)} = \begin{bmatrix} R_i^S(A^+) + \gamma & R_i^{\bar{S}}(A^+) \\ R_j^S(A^+) & R_j^{\bar{S}}(A^+) + \gamma \end{bmatrix},$$

так что оценка (12) принимает вид

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2} \max_{\substack{i\in S,\\ j\in\bar{S}}} \Bigg\{ R_i^S(A^+) + R_j^{\bar{S}}(A^+) + \sqrt{\Big[R_i^S(A^+) - R_j^{\bar{S}}(A^+)\Big]^2 + 4R_i^{\bar{S}}(A^+)\, R_j^S(A^+)} \Bigg\},$$

и из нее немедленно следует оценка (3), если в правой части перейти к минимуму по всем непустым собственным подмножествам S множества $\langle n\rangle$.

4. В качество последнего примера мы рассмотрим следующую классическую верхнюю оценку Островского [7] для перроновского корня неотрицательной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$:

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \left\{a_{ii} + r_i(A)^{\alpha}\, r_i(A^T)^{1-\alpha}\right\}, \quad \alpha \in [0,\ 1]. \tag{13}$$

Используя теорему 3 и применяя оценку (13) к неотрицательной матрице A_γ^+, мы немедленно приходим к новой верхней оценке для доминирующего собственного значения PF матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$,

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \left\{a_{ii} + r_i(A^+)^{\alpha}\, r_i({A^+}^T)^{1-\alpha}\right\}, \tag{14}$$

справедливой для произвольного $\alpha \in [0,\ 1]$. Ясно, что при $\alpha = 1$ оценка (14) сводится к оценке (1).

В завершение данной работы мы воспользуемся следующим свойством PF матриц.

Предложение 2. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – PF матрица и пусть $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – диагональная матрица с положительными диагональными элементами. Тогда сопряженная матрица $D^{-1}AD$ также обладает свойством Перрона–Фробениуса.*

Доказательство. Пусть $Ax = \rho(A)x$, где $x \geqslant 0$. Тогда

$$(D^{-1}AD)D^{-1}x = D^{-1}Ax = \rho(A)D^{-1}x = \rho(D^{-1}AD)D^{-1}x,$$

что и показывает, что $D^{-1}AD$ является PF матрицей, если только диагональные элементы матрицы D положительны. □

Ввиду предложения 2, оценку (8) теоремы 3 можно обобщить до более точной оценки

$$\rho(A) \leqslant \min_D \rho((D^{-1}AD)_\gamma^+) - \gamma = \min_D \rho(D^{-1}A_\gamma^+ D) - \gamma, \tag{15}$$

где минимум берется по всем диагональным матрицам D с положительными диагональными элементами. Соответственно, оценки (9), (3) и (14) могут быть обобщены до следующих более сильных оценок для доминирующего собственного назначения PF матрица A:

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2} \min_{D} \max_{\substack{i \neq j: \\ a_{ij} \neq 0}} \Big\{ a_{ii} + a_{jj} + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4 r_i(D^{-1}A^+D)\, r_j(D^{-1}A^+D)} \Big\}, \qquad (16)$$

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2} \min_{S \subset \langle n \rangle} \min_{D} \max_{\substack{i \in S, \\ j \in \bar{S}}} \Big\{ R_i^S(D^{-1}A^+D) + R_j^{\bar{S}}(D^{-1}A^+D) + \Big(\Big[R_i^S(D^{-1}A^+D) - R_j^{\bar{S}}(D^{-1}A^+D) \Big]^2 + 4 R_i^{\bar{S}}(D^{-1}A^+D)\, R_j^S(D^{-1}A^+D) \Big)^{1/2} \Big\}, \qquad (17)$$

$$\rho(A) \leqslant \min_{D} \max_{i \in \langle n \rangle} \Big\{ a_{ii} + r_i(D^{-1}A^+D)^{\alpha}\, r_i(DA^{+T}D^{-1})^{1-\alpha} \Big\}, \quad \alpha \in [0,\ 1]. \qquad (18)$$

Список литературы

1. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 77–122.
2. Л. Ю. Колотилина, *Об улучшении оценок Чистякова для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 103–118.
3. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New York etc., 1979.
4. A. Brauer, I. C. Gentry, *Bounds for the greatest characteristic root of an irreducible nonnegative matrix.* — Linear Algebra Appl. **8** (1974), 105–107.
5. Jun He, Yanmin Liu, Wei Lv, *New upper bounds for the dominant eigenvalue of a matrix with Perron–Frobenius property.* — J. Ineq. Appl. **2023:13** (2023).
6. D. Noutsos, *On Perron–Frobenius property of matrices having some negative entries.* — Linear Algebra Appl. **412** (2006), 132–153.
7. A. M. Ostrowski, *Über das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln von Matrizen.* — Comp. Math. **9** (1951), 209–226.

Kolotilina L. Yu. Upper bounds for the spectral radius of a PF matrix.

The paper suggests and illustrates a simple unified approach to deriving upper bounds for the dominant eigenvalues of the so-called PF matrices (or

matrices with the Perron–Frobenius property) from those for the Perron root of a nonnegative matrix.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 6 апреля 2023 г.