Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 524, 2023 г.

**С. А. Жилина**

# О ДИАМЕТРЕ ГРАФА КОММУТАТИВНОСТИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ СЕДЕНИОНОВ

## §1. Введение

Одним из способов визуализации произвольного бинарного алгебраического отношения $R$ является построение соответствующего ему графа. Вершинам графа соответствуют элементы или их классы эквивалентности в рассматриваемой алгебраической структуре, а существование ребра из $x$ в $y$ равносильно условию $xRy$. Наиболее распространёнными графами отношений для алгебр и колец являются графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля.

Изучение графов отношений оказывается особенно интересным в случае неассоциативных алгебр. Одним из важных классов таких алгебр являются алгебры Кэли–Диксона $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, над произвольным полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$. Они представляют собой последовательность $2^n$-мерных алгебр, определяемых индуктивно: $\mathcal{A}_0 = \mathbb{F}$, и на каждом шаге алгебра $\mathcal{A}_{n+1}$ получается из алгебры $\mathcal{A}_n$ с помощью процедуры удвоения Кэли–Диксона с некоторым параметром $\gamma_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Элементами $\mathcal{A}_{n+1}$ являются упорядоченные пары элементов из $\mathcal{A}_n$, то есть элементы вида $(a, b) \in \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n$. Уже при $n = 3$ алгебра $\mathcal{A}_n$ неассоциативна, а при $n \geqslant 4$ не является даже альтернативной, то есть в ней не выполняются тождества $a(ab) = (aa)b$ и $(ba)a = b(aa)$.

Важным частным случаем алгебр Кэли–Диксона являются вещественные алгебры главной последовательности, которые мы обозначаем через $\mathcal{M}_n$. В них $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, а все параметры Кэли–Диксона равны $-1$. Норма, которую можно определить на произвольной алгебре Кэли–Диксона, в случае алгебр главной последовательности оказывается анизотропной, то есть для любого $a \in \mathcal{M}_n \setminus \{0\}$ выполнено $n(a) \neq 0$. Отсюда нетрудно вывести, что если алгебра $\mathcal{M}_n$ альтернативна, то она не содержит делителей нуля. Таким образом, первой

*Ключевые слова*: алгебры Кэли–Диксона, седенионы, графы отношений, граф коммутативности, альтернативные элементы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 22-11-00052.

алгеброй главной последовательности, в которой возникают делители нуля, является алгебра седенионов $\mathbb{S} = \mathcal{M}_4$.

Среди авторов, изучавших делители нуля в алгебрах главной последовательности, стоит выделить Морено [12–14], а также Бисса, Даггера и Исаксена [7,8]. В частности, в работах [7,8] были полностью описаны размерности аннуляторов элементов, а также классифицированы те делители нуля, аннуляторы которых имеют наибольшую возможную размерность. Затем Пикстон [15] получил аналогичный результат для размерностей альтернаторов элементов этих алгебр. Отметим, что Морено был первым, кто начал изучать дважды альтернативные делители нуля, то есть такие элементы, обе компоненты которых альтернативны в предыдущей алгебре этой последовательности. Он установил ряд интересных свойств таких делителей нуля, см. [12, стр. 25–27].

Свойства графов отношений алгебр Кэли–Диксона исследовались в работах автора [2–5,18]. В статье [18] изучены делители нуля, имеющие некоторые ограничения на альтернативность и норму, в произвольных вещественных алгебрах Кэли–Диксона. Установлено, что они образуют шестиугольные структуры в графах ортогональности и делителей нуля, см. [18, следствие 3.7]. В алгебрах главной последовательности каждая пара делителей нуля порождает так называемый двойной шестиугольник, см. [18, описание 4.8], и таблица умножения вершин двойного шестиугольника имеет блочную структуру, см. [18, теорема 4.11].

В статье [5] эти результаты были обобщены на случай произвольных алгебр Кэли–Диксона над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, причём в общем случае алгебрам главной последовательности соответствуют алгебры Кэли–Диксона с анизотропной нормой. Кроме того, на случай алгебр Кэли–Диксона с анизотропной нормой удалось обобщить большинство утверждений из работ [7,12]. Так, согласно [5, теорема 6.11], если $n \geqslant 2$ и $\mathcal{A}_n$ – алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой, то размерность аннулятора любого элемента $\mathcal{A}_n$ кратна четырём. Доказательство этого (и некоторых других результатов) использует свойства операторов левого и правого умножения на фиксированный элемент. В частности, в случае алгебры Кэли–Диксона $\mathcal{A}_n$ с анизотропной нормой оператор левого умножения на элемент, след обеих компонент которого равен нулю, оказывается сопряжённо-линейным косоэрмитовым отображением относительно некоторого эрмитова скалярного произведения на $\mathcal{A}_n$. Отсюда следует, что коразмерность (а значит, и размерность) его ядра кратна четырём.

Ещё одним важным подклассом алгебр Кэли–Диксона являются расщепляемые алгебры Кэли–Диксона, иногда также называемые контр-алгебрами. Они характеризуются тем, что норма на них изотропна, поэтому делители нуля возникают даже в том случае, когда алгебра $\mathcal{A}_n$ альтернативна. Широко известно ([11, стр. 160 и 166]), что расщепляемые кватернионы $\mathcal{A}_2$ над произвольным полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, изоморфны алгебре $M_2(\mathbb{F})$ квадратных матриц порядка 2 над полем $\mathbb{F}$, а расщепляемые октонионы $\mathcal{A}_3$ изоморфны векторно-матричной алгебре Цорна, определение которой дано в подразделе 3.2. Указанные изоморфизмы позволяют значительно упростить работу с элементами этих алгебр. Кроме того, с их помощью Лопатиным и Зубковым были найдены орбиты всех элементов, а также всех пар элементов расщепляемых октонионов над бесконечным полем $\mathbb{F}$, относительно действия группы автоморфизмов, см. [10, предложение 3.4 и теорема 4.1]. Графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля для вещественных расщепляемых алгебр малой размерности (при $n \leqslant 4$) подробно описаны в работах [3, 4].

Целью настоящей работы является изучение компонент связности графа коммутативности вещественной алгебры седенионов $\mathbb{S}$, обозначаемого $\Gamma_C(\mathbb{S})$. Тем самым мы продолжаем исследование графов отношений алгебры седенионов, начатое в статье [2]. Одним из основных результатов предыдущей работы является полное описание компонент связности графа ортогональности седенионов $\Gamma_O(\mathbb{S})$. Показано, что компоненты связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$ находятся в биективном соответствии с прямыми из мнимой части алгебры октонионов, см. [2, теорема 4.15]. Для каждой из компонент связности явно описано множество вершин и доказано, что её диаметр равен трём, см. [2, следствие 4.10 и теорема 4.11].

Работа построена следующим образом: В §2 мы вводим основные определения и обозначения, используемые на протяжении всего текста. В частности, в подразделе 2.2 подробно описана процедура Кэли–Диксона, а в подразделе 2.3 приведены некоторые свойства алгебр Кэли–Диксона. В подразделе 3.1 мы напоминаем основные результаты работы [5] о графах ортогональности алгебр Кэли–Диксона с анизотропной нормой. Затем в подразделе 3.2 мы приводим явные определения алгебр октонионов и седенионов, а также рассматриваем матричные представления октонионов.

Наконец, в §4 мы рассматриваем граф коммутативности $\mathbb{S}$. Ключевую роль здесь играет лемма 4.2, которая устанавливает связь между ортогонализатором и централизатором произвольного элемента. Из неё сразу следует, что те элементы, мнимая часть которых не является делителем нуля, соответствуют изолированным вершинам в $\Gamma_C(\mathbb{S})$. Теорема 4.13 показывает, что подграф $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$, образованный всеми остальными элементами, является компонентой связности и его диаметр равен трём. Для её доказательства используется лемма 4.12, в которой получен критерий существования пути длины два между двумя произвольными элементами $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$. Отметим, что теорема 4.13 содержит конструктивный алгоритм построения пути длины три между произвольной парой элементов, который сводится к решению системы из четырёх линейных уравнений с пятью неизвестными.

## §2. Основные определения и обозначения

**2.1. Алгебраические отношения и их графы.** Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $(\mathcal{A},+,\cdot)$ – алгебра с единицей $1_{\mathcal{A}}$ над полем $\mathbb{F}$, возможно, некоммутативная или неассоциативная. Говорят, что элементы $a, b \in \mathcal{A}$ *антикоммутируют*, если $ab + ba = 0$, и элементы $a, b$ *ортогональны*, если $ab = ba = 0$. Множество всех делителей нуля в $\mathcal{A}$ (левых, правых и двусторонних) будем обозначать через $Z(\mathcal{A})$, множество двусторонних делителей нуля в $\mathcal{A}$ – через $Z_{LR}(\mathcal{A})$, а центр $\mathcal{A}$ – через $C_{\mathcal{A}}$.

**Определение 2.1.** *Пусть $a$ – произвольный элемент алгебры $\mathcal{A}$.*

- Централизатором *$a$ называется*

$$C_{\mathcal{A}}(a) = \left\{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba\right\}$$

*– множество элементов $\mathcal{A}$, коммутирующих с $a$.*

- Антицентрализатором *$a$ называется*

$$\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}}(a) = \left\{b \in \mathcal{A} \mid ab + ba = 0\right\}$$

*– множество элементов $\mathcal{A}$, антикоммутирующих с $a$.*

- Ортогонализатором *$a$ называется*

$$O_{\mathcal{A}}(a) = \left\{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba = 0\right\}$$

*– множество элементов $\mathcal{A}$, ортогональных к $a$.*

Ясно, что $C_{\mathcal{A}}(a)$, $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}}(a)$ и $O_{\mathcal{A}}(a)$ – линейные пространства над $\mathbb{F}$.

**Обозначение 2.2.** Для любого подмножества $X$ линейного пространства $W$ над $\mathbb{F}$ введём множество прямых, проходящих через элементы $X$:

$$\mathbb{P}(X) = \{[x] = \mathbb{F}x \mid x \in X \setminus \{0\}\}.$$

Введём теперь графы отношений, изучению которых посвящена данная работа.

**Определение 2.3.** *Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная алгебра. Определим следующие графы отношений алгебры $\mathcal{A}$:*

- граф коммутативности $\Gamma_C(\mathcal{A})$: *его вершины – это элементы*

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}}) = \{[a + C_{\mathcal{A}}] = \mathbb{F}a + C_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}\},$$

  *причём различные вершины $[a + C_{\mathcal{A}}]$ и $[b + C_{\mathcal{A}}]$ соединены ребром, если и только если $ab = ba$;*
- граф ортогональности $\Gamma_O(\mathcal{A})$*: его вершины – это элементы $\mathbb{P}(Z_{LR}(\mathcal{A}))$, причём различные вершины $[a]$ и $[b]$ соединены ребром, если и только если $ab = ba = 0$.*

Заметим, что рёбра графов $\Gamma_C(\mathcal{A})$ и $\Gamma_O(\mathcal{A})$ корректно определены. Говоря о вершинах этих графов, мы не будем проводить различия между ненулевым элементом $a$ и проходящей через него прямой $[a] = \mathbb{F}a$. Обозначим также $\operatorname{span}(a_1, \ldots, a_k) = \mathbb{F}a_1 + \cdots + \mathbb{F}a_k$.

Напомним, что в неориентированном графе $\Gamma$ величина $d(x, y) = d_\Gamma(x, y)$ – это *расстояние* между двумя вершинами $x$ и $y$, а $d(\Gamma) = \sup\limits_{x,y\in\Gamma} d(x, y)$ – *диаметр* $\Gamma$.

**2.2. Построение алгебр Кэли–Диксона.** Вспомогательные определения и основные свойства алгебр Кэли–Диксона могут быть найдены в работах [11, 16].

**Определение 2.4.** *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$ с инволюцией $a \mapsto \bar{a}$. Алгебра $\mathcal{A}\{\gamma\}$, полученная из $\mathcal{A}$ с помощью* процедуры Кэли–Диксона *с параметром $\gamma \in \mathbb{F}$, $\gamma \neq 0$, определяется как множество упорядоченных пар элементов из $\mathcal{A}$ с операциями*

$$\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b);$$
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$
$$(a, b)(c, d) = (ac + \gamma \bar{d} b, da + b\bar{c})$$

*и инволюцией*

$$\overline{(a,b)} = (\bar{a}, -b), \qquad a,b,c,d \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{F}.$$

**Замечание 2.5** ([16, стр. 435])**.** Если в алгебре $\mathcal{A}$ есть единица $1_{\mathcal{A}}$, то $(1_{\mathcal{A}}, 0)$ – единица алгебры $\mathcal{A}\{\gamma\}$. Если, кроме того, инволюция на $\mathcal{A}$ регулярна, то есть $a + \bar{a} \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$ и $a\bar{a} = \bar{a}a \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$ для любого $a \in \mathcal{A}$, то инволюция на $\mathcal{A}\{\gamma\}$ также регулярна.

Далее будем считать, что $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, и дадим определение произвольной алгебры Кэли–Диксона в зависимости от набора её параметров.

**Определение 2.6.** *Для каждого целого $n \geqslant 0$ и ненулевых чисел $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{F}$ алгебра Кэли–Диксона $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ определяется индуктивно:*

1) $\mathcal{A}_0 = \mathbb{F}$*;*
2) $\mathcal{A}_{n+1}\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\} = (\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\})\{\gamma_n\}$*.*

Для каждого целого $n \geqslant 0$ структура $\mathcal{A}_n$ из определения 2.6 – это $2^n$-мерная алгебра над $\mathbb{F}$ с единицей и регулярной инволюцией.

**Определение 2.7.** *Пусть $a \in \mathcal{A}_n$.* Следом *$a \in \mathcal{A}_n$ называется $t(a) = a + \bar{a}$,* мнимой частью *– $\mathfrak{Im}(a) = \frac{a-\bar{a}}{2}$,* нормой *– $n(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$. Поскольку инволюция на $\mathcal{A}_n$ регулярна, $t(a), n(a) \in \mathbb{F}$.*

**Предложение 2.8** ([16, стр. 435])**.** *След и норма элемента $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$ могут быть вычислены индуктивно с использованием следующих соотношений:*

$$t((a,b)) = t(a),$$
$$n((a,b)) = n(a) - \gamma_n n(b).$$

Из предложения 2.8 следует, что норма $n(\cdot)$ является невырожденной квадратичной формой на $\mathcal{A}_n$.

**2.3. Свойства алгебр Кэли–Диксона.** Далее подразумеваем, что $\mathcal{A}$ – произвольная алгебра над полем $\mathbb{F}$, а $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ – произвольная алгебра Кэли–Диксона над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$.

**Предложение 2.9** ([16, стр. 440])**.** *Пусть $\langle a, b\rangle$ – $\mathbb{F}$-значная симметрическая билинейная форма на $\mathcal{A}_n$, соответствующая квадратичной форме $n(a)$. Тогда $\langle a, a\rangle = n(a)$ и $2\langle a, b\rangle = a\bar{b} + b\bar{a} = \bar{a}b + \bar{b}a = t(a\bar{b})$ для любых $a, b \in \mathcal{A}_n$. Кроме того, для всех $a, b \in \mathcal{A}_n$ выполнено $\langle a, b\rangle = \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle$ и $t(a) = 2\langle a, e_0\rangle$.*

**Обозначение 2.10.** Мы будем использовать обозначение $a \perp b$, если $a$ и $b$ ортогональны относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то есть $\langle a, b\rangle = 0$.

Следующая лемма описывает антицентрализатор произвольного ненулевого элемента $\mathcal{A}_n$ с нулевым следом.

**Лемма 2.11** ([1, лемма 5.8]). *Пусть* $a \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$ *и* $t(a) = 0$. *Тогда*

$$\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \{b \in \mathcal{A}_n \mid t(b) = 0 \text{ и } \langle a, b\rangle = 0\}.$$

Перейдём к некоторым понятиям, связанным с ассоциативностью. Ассоциатором элементов $a, b, c \in \mathcal{A}$ называется $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$, а их антиассоциатором – $\{a, b, c\} = (ab)c + a(bc)$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *альтернативной*, если для всех $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено $[a, a, b] = [b, a, a] = 0$, и *эластичной*, если для всех $a, b \in \mathcal{A}$ верно $[a, b, a] = 0$. В любой эластичной алгебре $\mathcal{A}$ для всех $a, b, c \in \mathcal{A}$ имеет место равенство $[a, b, c] = -[c, b, a]$. Хорошо известно, что алгебра $\mathcal{A}_n$ альтернативна, если и только если $n \leqslant 3$, однако все алгебры Кэли–Диксона являются эластичными, см. [16, стр. 436, теорема 1].

**Определение 2.12** ([13, стр. 12, 15]). *Пусть* $a, b \in \mathcal{A}_n$.

- *Элемент* $a$ альтернирует *с элементом* $b$, *если* $[a, a, b] = 0$.
- *Если элемент* $a$ *альтернирует со всеми* $b \in \mathcal{A}_n$, *то* $a$ *называется* альтернативным.
- *Элемент* $a$ строго альтернирует *с элементом* $b$, *если* $[a, a, b]=0$ *и* $[b, b, a]=0$.
- *Если* $a$ *строго альтернирует со всеми* $b \in \mathcal{A}_n$, *то* $a$ *называется* строго альтернативным.

## §3. Алгебры с анизотропной нормой

**3.1. Делители нуля в алгебрах с анизотропной нормой.** В этом разделе мы рассматриваем такие алгебры Кэли–Диксона над произвольным полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\, \mathbb{F} \neq 2$, норма на которых анизотропна, то есть $n(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$. Будем обозначать $\widetilde{e}_0 = (0, e_0) \in \mathcal{A}_n$ и $\widetilde{a} = a\widetilde{e}_0$ для всех $a \in \mathcal{A}_n$. Заметим, что если $a = (x, y)$, то $\widetilde{a} = (\gamma_n y, x)$.

Согласно [5, следствие 4.16], в алгебрах Кэли–Диксона все делители нуля оказываются двусторонними делителями нуля, то есть $Z(\mathcal{A}_n) = Z_{LR}(\mathcal{A}_n)$. Однако в случае алгебр Кэли–Диксона с анизотропной нормой имеет место более сильный результат.

**Лемма 3.1** ([12, следствия 1.6 и 1.12], [5, лемма 5.1])**.** *Пусть* $\mathcal{A}_n$ – *алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой,* $a, b \in \mathcal{A}_n$*. Тогда* $ab = 0$*, если и только если* $ba = 0$*, если и только если* $a\widetilde{b} = 0$*.*

**Лемма 3.2** ([12, стр. 25–27], [5, лемма 5.6])**.** *Пусть* $\mathcal{A}_{n+1}$ – *алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой, элементы* $c, d \in \mathcal{A}_n$ *альтернируют с элементами* $a, b \in \mathcal{A}_n$*,* $(a, b), (c, d) \in Z(\mathcal{A}_{n+1})$*,* $(a, b)(c, d) = 0$*. Тогда*

(1) $t(a) = t(b) = t(c) = t(d) = 0$*;*
(2) $n(a) = -\gamma_n n(b)$ *и* $n(c) = -\gamma_n n(d)$*;*
(3) $[c, a, d] = 2n(c)b$*,* $[c, b, d] = -2n(d)a$*;*
(4) $\{c, a, d\} = \{c, b, d\} = 0$*;*
(5) $a \perp b$*;*
(6) $a, b \in \operatorname{span}(e_0, c, d, cd)^{\perp}$*;*
(7) $(c, d)(ac, ad) = 0$*.*

**Следствие 3.3** ([7, предложение 11.1], [5, лемма 4.19])**.** *Пусть* $\mathcal{A}_{n+1}$ – *алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой,* $(c, d) \in Z(\mathcal{A}_{n+1})$ *и элементы* $c, d$ *альтернативны в* $\mathcal{A}_n$*. Тогда*

$$O_{\mathcal{A}_{n+1}}((c, d)) = \left\{ \left( a, \frac{(ca)d}{n(c)} \right) \;\middle|\; t(a) = 0,\ \{c, a, d\} = 0 \right\}.$$

**Доказательство.** Согласно [5, лемма 4.19],

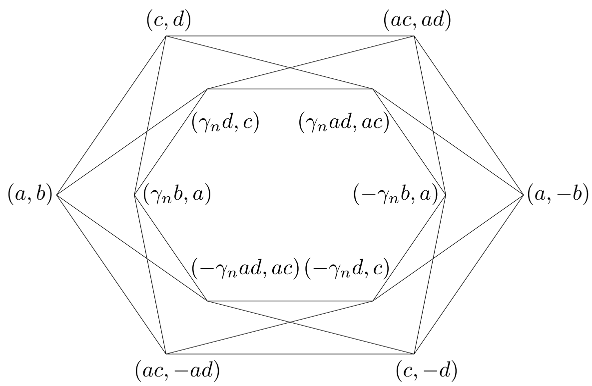
$$O_{\mathcal{A}_{n+1}}((c, d)) = \left\{ \left( a, -\frac{(da)c}{n(c)} \right) \;\middle|\; t(a) = 0,\ d(ac) = \chi(da)c \right\}, \qquad (3.1)$$

где $\chi = \frac{\gamma_n n(d)}{n(c)}$. Обозначим $b = -\frac{(da)c}{n(c)} = -\chi\frac{d(ac)}{n(c)}$. Так как $c, d$ альтернативны в $\mathcal{A}_n$, они, в частности, альтернируют с элементами $a, b \in \mathcal{A}_n$. По лемме 3.2(2), $\chi = -1$, поэтому последнее условие в правой части равенства (3.1) принимает вид $\{d, a, c\} = (da)c + d(ac) = 0$. Из леммы 3.2(1) следует, что $t(a) = t(b) = t(c) = t(d) = 0$. Тогда $\{c, a, d\} = -\overline{\{d, a, c\}} = 0$ и $b = -\bar{b} = -\overline{\frac{d(ac)}{n(c)}} = \frac{(ca)d}{n(c)}$. □

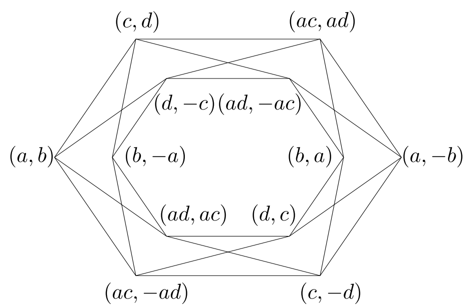
**Теорема 3.4** ([5, теорема 5.11])**.** *Пусть* $\mathcal{A}_{n+1}$ – *алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой,* $(a, b), (c, d) \in Z(\mathcal{A}_{n+1})$*,* $(a, b)(c, d) = 0$ *и элементы* $a, b \in \mathcal{A}_n$ *строго альтернируют с элементами* $c, d \in \mathcal{A}_n$*, то есть* $[x, x, y] = [y, y, x] = 0$ *при* $x \in \{a, b\}$ *и* $y \in \{c, d\}$*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Элементы* $ac, ad$ *строго альтернируют с элементами* $a, b, c, d$*.*

(2) *Элементы* $e_0, a, b, c, d, ac, ad$ *ортогональны относительно* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$.
(3) *Существует подграф* $\Gamma_O(\mathcal{A}_{n+1})$, *изображённый на рисунке* 1(a) *и называемый двойным шестиугольником.*
(4) *Все элементы в вершинах двойного шестиугольника линейно независимы.*




(a) Алгебра с анизотропной нормой.




(b) Алгебра главной последовательности.

Рис. 1. Двойные шестиугольники.

Важным частным случаем алгебр Кэли–Диксона с анизотропной нормой являются так называемые вещественные алгебры главной последовательности.

**Определение 3.5.** *Пусть* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. *Алгебра* $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$ *является* вещественной алгеброй главной последовательности Кэли–Диксона, *если* $\gamma_k = -1$ *для всех* $k = 0, \dots, n-1$. *Мы будем обозначать такую алгебру символом* $\mathcal{M}_n$, *от слова "main".*

**Предложение 3.6** ([7, предложение 3.2])**.** *Если* $\mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n$, *то билинейная форма* $\langle a, b\rangle$ *– евклидово скалярное произведение. В частности, норма* $n(a)$ *анизотропна.*

**Следствие 3.7.** *Для вещественных алгебр главной последовательности справедливы утверждения* 3.1–3.4. *Двойной шестиугольник в этом случае принимает вид, изображённый на рисунке* 1(b). *В* [18, *теорема* 4.11] *была также получена таблица умножения вершин этого двойного шестиугольника, и оказалось, что она имеет удобный блочный вид.*

**Пример 3.8.** Алгебры комплексных чисел ($\mathbb{C}$), кватернионов ($\mathbb{H}$), октонионов ($\mathbb{O}$) и седенионов ($\mathbb{S}$) являются вещественными алгебрами главной последовательности при $n = 1$, 2, 3 и 4 соответственно, см. [6].

**3.2. Алгебры октонионов и седенионов.** Ниже приведены точные определения и основные свойства алгебр $\mathbb{O}$ и $\mathbb{S}$.

**Определение 3.9** ([6, стр. 6])**.** *Алгебра* октонионов $\mathbb{O}$ *– восьмимерная алгебра над* $\mathbb{R}$ *с базисом* $1, e_1, \dots, e_7$. *Инволюция на* $\mathbb{O}$ *задаётся формулой*

$$\overline{a_0 + a_1e_1 + \dots + a_7e_7} = a_0 - a_1e_1 - \dots - a_7e_7,$$

*а умножение задаётся таблицей* 1.

Таблица 1. Таблица умножения базисных октонионов.

| $\times$ | $1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
| $e_1$ | $e_1$ | $-1$ | $e_3$ | $-e_2$ | $e_5$ | $-e_4$ | $-e_7$ | $e_6$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $-e_3$ | $-1$ | $e_1$ | $e_6$ | $e_7$ | $-e_4$ | $-e_5$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $e_2$ | $-e_1$ | $-1$ | $e_7$ | $-e_6$ | $e_5$ | $-e_4$ |
| $e_4$ | $e_4$ | $-e_5$ | $-e_6$ | $-e_7$ | $-1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $e_5$ | $e_5$ | $e_4$ | $-e_7$ | $e_6$ | $-e_1$ | $-1$ | $-e_3$ | $e_2$ |
| $e_6$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_4$ | $-e_5$ | $-e_2$ | $e_3$ | $-1$ | $-e_1$ |
| $e_7$ | $e_7$ | $-e_6$ | $e_5$ | $e_4$ | $-e_3$ | $-e_2$ | $e_1$ | $-1$ |

Хорошо известно, что $\mathbb{O} \cong \mathcal{M}_3$, поэтому $\mathbb{O}$ – некоммутативная, неассоциативная, но альтернативная алгебра без делителей нуля, см. [6, стр. 10]. Базис $1, e_1, \ldots, e_7$ является ортонормированным относительно евклидова скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Алгебра *седенионов* определяется как $\mathbb{S} = \mathcal{M}_4$. Легко видеть, что $\mathbb{S} = \mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_3\{-1\} \cong \mathbb{O}\{-1\}$, и этот изоморфизм приводит нас к наиболее удобной форме записи седенионов. Алгебра $\mathbb{S}$ – некоммутативная, неассоциативная и неальтернативная алгебра с делителями нуля, см. [12, стр. 2].

Широко известны представление комплексных чисел в виде вещественных матриц порядка 2, а также представление кватернионов в виде вещественных матриц порядка 4 или комплексных матриц порядка 2. Они задаются с помощью следующих отображений:

$$\mathbb{C} \ni a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{H} \ni (a + bi) + (c + di)j = x + yj \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}.$$

Однако для октонионов, в силу их неассоциативности, аналогичного представления не существует. В работе [17] для произвольного $x \in \mathbb{O}$ рассматривались левое $\omega(x)$ и правое $\nu(x)$ восьмимерные матричные представления над $\mathbb{R}$, удовлетворяющие равенствам $\overrightarrow{xy} = \omega(x)\overrightarrow{y}$ и $\overrightarrow{yx} = \nu(x)\overrightarrow{y}$, где $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^8$ – вектор координат элемента $y \in \mathbb{O}$. Было показано, что они могут применяться для решения некоторых линейных и матричных уравнений над $\mathbb{O}$.

Другой способ записать октонионы в виде матриц использует векторно-матричную алгебру Цорна. Над произвольным полем она определяется следующим образом:

$$\mathrm{Zorn}(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{F},\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{F}^3 \right\},$$

причём сложение и умножение задаются формулами

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & \mathbf{v} + \mathbf{v}' \\ \mathbf{w} + \mathbf{w}' & b + b' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}' & a\mathbf{v}' + b'\mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{w}' \\ a'\mathbf{w} + b\mathbf{w}' - \mathbf{v} \times \mathbf{v}' & bb' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{w} \end{pmatrix},$$

где $\cdot$ и $\times$ обозначают скалярное и векторное произведения элементов из $\mathbb{F}^3$ соответственно. На алгебре $\mathrm{Zorn}(\mathbb{F})$ также заданы инволюция и норма:

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix}, \text{ то } \bar{A} = \begin{pmatrix} b & -\mathbf{v} \\ -\mathbf{w} & a \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad n(A) = ab - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

Если $\mathcal{A}_3$ – это алгебра Кэли–Диксона над произвольным полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$, норма на которой изотропна (т.е. найдётся такой элемент $a \in \mathcal{A}_3 \setminus \{0\}$, что $n(a) = 0$), то $\mathcal{A}_3$ изоморфна $\mathrm{Zorn}(\mathbb{F})$, см. [9, теорема 1.6] и [11, стр. 160 и 166].

Вещественные октонионы $\mathbb{O}$ можно рассмотреть как вещественную подалгебру комплексных октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{O}$. Норма на $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ изотропна, поэтому существует изоморфизм $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{Zorn}(\mathbb{C})$, который в явном виде можно задать формулой

$$\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \ni (a + c) + (b + d)e_4 \mapsto \begin{pmatrix} a - ib & \mathbf{c} + i\mathbf{d} \\ -\mathbf{c} + i\mathbf{d} & a + ib \end{pmatrix},$$

где $a, b \in \mathbb{C}$ и $c, d \in \mathrm{span}(e_1, e_2, e_3)$, причём $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{C}^3$ – векторы их координат. Справедливость данной формулы нетрудно проверить вручную, поскольку таблица умножения 1 базисных октонионов при таком отображении сохраняется. Кроме того, указанный изоморфизм сохраняет инволюцию и, как следствие, норму. Его ограничение на случай, когда $a, b \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$, позволяет представить вещественные октонионы $\mathbb{O}$ как вещественную подалгебру $\mathrm{Zorn}(\mathbb{C})$. Отметим, что указанное отображение имеет явное сходство с представлением кватернионов в виде комплексных матриц порядка 2.

## §4. Граф коммутативности алгебры седенионов

Перейдём к изучению графа коммутативности алгебры седенионов. Сперва нам понадобятся некоторые утверждения о центре и централизаторах, справедливые для произвольных алгебр Кэли–Диксона. Отметим, что предложение 8.19 работы [1] доказывает существенность дополнительного условия $n \leqslant 3$ в пункте (1) леммы 4.2.

**Лемма 4.1** ([16, стр. 438])**.**

(1) *Если $n \leqslant 1$, то $C_{\mathcal{A}_n} = \mathcal{A}_n$, поэтому множество вершин $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$ пустое.*

(2) *Если* $n \geqslant 2$, *то* $C_{\mathcal{A}_n} = \mathbb{F}$, *поэтому множество вершин* $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$ *совпадает с* $P(\mathcal{A}_n/\mathbb{F})$.

**Лемма 4.2** ([1, лемма 8.11])**.** *Пусть* $a \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$, $t(a) = 0$. *Тогда*

(1) *если* $n(a) = 0$ *и* $n \leqslant 3$, *то* $C_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathbb{F} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(a)$;
(2) *если* $n(a) \neq 0$, *то* $C_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}a \oplus O_{\mathcal{A}_n}(a)$.

**Замечание 4.3.** Если норма на $\mathcal{A}_n$ анизотропна (в частности, если $\mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n$), то любой элемент $a \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$, $t(a) = 0$, удовлетворяет условию леммы 4.2(2).

**Следствие 4.4.** *Пусть* $n \geqslant 2$, $\mathcal{A}_n$ *– алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой,* $a \in \mathcal{A}_n \setminus \mathbb{F}$, $\mathfrak{Im}(a) \notin Z(\mathcal{A}_n)$. *Тогда компонента связности* $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$, *содержащая* $a$, *состоит из одного элемента.*

**Доказательство.** Из леммы 4.2 следует, что $C_{\mathcal{A}_n}(a) = C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)) = \operatorname{span}(1, \mathfrak{Im}(a)) = \operatorname{span}(1, a) = \mathbb{F}a + C_{\mathcal{A}_n}$. Отсюда мы сразу получаем требуемое утверждение. □

Рассмотрим случай $\mathcal{A}_n = \mathbb{S}$. По лемме 3.2(1), для любого $a \in Z(\mathbb{S})$ выполнено $t(a) = 0$, поэтому $a = \mathfrak{Im}(a)$. Согласно следствию 4.4, естественно дать следующее определение:

**Определение 4.5.** $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ *– подграф* $\Gamma_C(\mathbb{S})$ *на множестве вершин*

$$P(Z(\mathbb{S}) + \mathbb{R}) = \{\mathbb{R}a + \mathbb{R} \mid a \in Z(\mathbb{S})\}.$$

Поскольку существует простое описание всех делителей нуля в алгебре седенионов, множество вершин $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ нетрудно описать конструктивно.

**Предложение 4.6** ([7, предложение 12.1])**.** *Пусть* $a, b \in \mathbb{O}$, $(a, b) \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$. *Тогда* $(a, b) \in Z(\mathbb{S})$, *если и только если выполнены следующие условия:*

(1) $n(a) = n(b)$;
(2) $1, a, b$ *ортогональны относительно скалярного произведения* $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$.

Теперь покажем, что $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ – компонента связности графа $\Gamma_C(\mathbb{S})$, диаметр которой равен трём. Ранее ([2, предложение 6.6]) уже было доказано, что граф $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ связен и его диаметр не превосходит четырёх.

**Предложение 4.7.** *Диаметр* $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ *не меньше* 3.

**Доказательство.** Рассмотрим $(a,b),(c,d) \in Z(\mathbb{S})$, $(a,b)(c,d) = 0$. Тогда $(a,b),(c,d)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.4, поэтому они содержатся в двойном шестиугольнике на рисунке 1(b), и все его вершины линейно независимы. Согласно [12, стр. 25], ортогонализатор произвольного делителя нуля в $\mathbb{S}$ имеет размерность 4. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{S}}((a,b)) &= \operatorname{span}((c,d),(d,-c),(ad,ac),(ac,-ad)), \\ O_{\mathbb{S}}((b,a)) &= \operatorname{span}((d,c),(c,-d),(ac,ad),(ad,-ac)). \end{aligned}$$

По лемме 4.2(2),

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{S}}((a,b)) &= \operatorname{span}(1,(a,b)) \oplus O_{\mathbb{S}}((a,b)) \\ &= \operatorname{span}(1,(a,b),(c,d),(d,-c),(ad,ac),(ac,-ad)), \\ C_{\mathbb{S}}((b,a)) &= \operatorname{span}(1,(b,a)) \oplus O_{\mathbb{S}}((b,a)) \\ &= \operatorname{span}(1,(b,a),(d,c),(c,-d),(ac,ad),(ad,-ac)). \end{aligned}$$

Тогда, по теореме 3.4(4), $C_{\mathbb{S}}((a,b)) \cap C_{\mathbb{S}}((b,a)) = \mathbb{R}$, поэтому

$$d_{\Gamma_C(\mathbb{S})}((a,b),(b,a)) \geqslant 3. \qquad \square$$

Поскольку алгебра $\mathbb{O}$ альтернативна, любая пара делителей нуля $(a,b),(c,d) \in \mathbb{S}$, $(a,b)(c,d) = 0$, удовлетворяет условиям леммы 3.2. В частности, умножив $(a,b)$ и $(c,d)$ на подходящие ненулевые вещественные числа, можно добиться выполнения равенств $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. Тогда, согласно [12, следствие 2.12 и теорема 2.13], существует автоморфизм $\varphi$ алгебры $\mathbb{O}$, отображающий $a,b,c,d$ в $e_1,e_2,e_7,e_4$ соответственно. Его можно продлить до автоморфизма $\mathbb{S}$ по формуле $(x,y) \mapsto (\varphi(x),\varphi(y))$. Тогда $(a,b)$ и $(c,d)$ будут переходить в $(e_1,e_2)$ и $(e_7,e_4)$. Таким образом, всегда можно заменить $(a,b)$ и $(c,d)$ на $(e_1,e_2)$ и $(e_7,e_4)$. Отсюда мы сразу получаем следующее предложение.

**Предложение 4.8.** *Пусть* $(a,b),(c,d) \in Z(\mathbb{S})$, $(a,b)(c,d) = 0$, $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. *Тогда* $1,a,b,c,d,ab,ac,ad$ *образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения* $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Пользуясь этим утверждением и следствием 3.3, нетрудно найти явный вид ортогонализатора произвольного делителя нуля в $\mathbb{S}$. Он уже был получен ранее в работе Бисса, Даггера и Исаксена [7].

**Лемма 4.9** ([7, следствие 11.2])**.** *Пусть* $(a,b) \in Z(\mathbb{S})$*. Тогда*

$$O_{\mathbb{S}}((a,b)) = \left\{ \left( c, -\frac{(ab)c}{n(a)} \right) \;\middle|\; c \perp 1, a, b, ab \right\}.$$

Нам также понадобится следующая лемма, справедливая для произвольных алгебр Кэли–Диксона.

**Лемма 4.10** ([16, лемма 6])**.** *Для любых элементов* $x, y, z \in \mathcal{A}_n$ *выполнено* $\langle x, yz\rangle = \langle x\bar{z}, y\rangle = \langle \bar{y}x, z\rangle$*.*

**Следствие 4.11.** *Пусть* $x, y, z \in \mathcal{A}_n$ *и пусть* $z$ *альтернирует с элементом* $x$*. Тогда* $\langle xz, yz\rangle = \langle zx, zy\rangle = n(z)\langle x, y\rangle$*.*

**Доказательство.** По лемме 4.10,

$$\begin{aligned}
\langle xz, yz\rangle &= \langle (xz)\bar{z}, y\rangle = \langle (xz)(t(z) - z), y\rangle \\
&= \langle x(z(t(z) - z)), y\rangle = \langle x(z\bar{z}), y\rangle \\
&= \langle x \cdot n(z), y\rangle = n(z)\langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично. □

**Лемма 4.12.** *Пусть* $(a,b), (a',b') \in Z(\mathbb{S})$*. Тогда между* $(a,b)$ *и* $(a',b')$ *существует путь длины* 2 *в* $\Gamma_C(\mathbb{S})$*, если и только если имеют место следующие три равенства:*

$$\begin{cases}
\langle a, a'\rangle - \langle b, b'\rangle = 0, \\
\langle a, b'\rangle + \langle b, a'\rangle = 0, \\
\begin{vmatrix} \langle a, a'b'\rangle & \langle a', ab\rangle \\ \langle b, a'b'\rangle & \langle b', ab\rangle \end{vmatrix} = 0.
\end{cases} \tag{4.1}$$

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что $n(a) = n(b) = n(a') = n(b') = 1$. Ясно, что достаточно рассматривать такие промежуточные между $(a,b)$ и $(a',b')$ элементы, след которых равен нулю, но при этом сами они отличны от нуля. По лемме 4.2, элемент $(a,b)$ соединён ребром только с элементами вида $\alpha(a,b) + (c,d)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $(c,d) \in O_{\mathbb{S}}((a,b))$. По лемме 4.9, последнее условие равносильно тому, что $c \in \operatorname{span}(1, a, b, ab)^{\perp}$ и $d = -(ab)c$. Аналогично, $(a',b')$ соединён ребром с элементами вида $\beta(a',b') + (c',d')$, где $\beta \in \mathbb{R}$, $c' \in \operatorname{span}(1, a', b', a'b')^{\perp}$ и $d' = -(a'b')c'$.

Нам необходимо, чтобы было выполнено равенство $\alpha(a,b)+(c,d) = \beta(a',b')+(c',d')$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} c' = c + \alpha a - \beta a', \\ d' = d + \alpha b - \beta b'. \end{cases}$$

Подставляя выражения для $d$ и $d'$, получаем

$$\begin{aligned} -(ab)c + \alpha b - \beta b' = -(a'b')c' &= -(a'b')(c + \alpha a - \beta a') \\ &= -(a'b')c - \alpha(a'b')a + \beta(a'b')a'. \end{aligned}$$

По лемме 2.11 и предложению 4.8, элементы $a'$ и $b'$ антикоммутируют, откуда $(a'b')a' = -(b'a')a' = -b'(a')^2 = n(a')b' = b'$. Перенесём слагаемые с элементом $c$ в левую часть, а остальные – в правую:

$$(a'b' - ab)c = 2\beta b' - \alpha b - \alpha(a'b')a.$$

Теперь рассмотрим два случая. Если $ab = a'b'$, то положим $\alpha = \beta = 0$ и выберем произвольное ненулевое $c = c' \in \operatorname{span}(1,a,b,a',b',ab)^{\perp}$. Тогда $(a,b) \leftrightarrow (c,-(ab)c) = (c,-(a'b')c) \leftrightarrow (a',b')$ – искомый путь длины 2. Согласно предложению 4.8, $\langle a,ab\rangle = \langle b,ab\rangle = \langle a',a'b'\rangle = \langle b',a'b'\rangle = 0$, поэтому определитель в системе (4.1) в этом случае тоже равен нулю. Кроме того, по следствию 4.11,

$$\begin{aligned} \langle a,a'\rangle - \langle b,b'\rangle &= \langle a,a'\rangle - \langle a'b,a'b'\rangle \\ &= \langle a,a'\rangle - \langle a'b,ab\rangle \\ &= \langle a,a'\rangle - n(b)\langle a',a\rangle = 0, \\ \langle a,b'\rangle + \langle b,a'\rangle &= \langle a,b'\rangle + \langle bb',a'b'\rangle \\ &= \langle a,b'\rangle + \langle bb',ab\rangle \\ &= \langle a,b'\rangle - \langle bb',ba\rangle \\ &= \langle a,b'\rangle - n(b)\langle b',a\rangle = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, равенства системы (4.1) в этом случае верны, и утверждение леммы справедливо.

Далее будем считать, что $ab \neq a'b'$. Так как $\mathbb{O}$ – алгебра с делением, элемент $c$ в этом случае однозначно находится по значениям параметров $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Ясно, что если $\alpha = \beta = 0$, то $c = 0$, поэтому $\alpha(a,b) + (c,d) = (0,0)$. Значит, нужно определить условия, при которых существует такой ненулевой набор параметров $(\alpha,\beta)$, что $c \in \operatorname{span}(1,a,b,ab)^{\perp}$ и $c' \in \operatorname{span}(1,a',b',a'b')^{\perp}$.

Заметим, что $n(a'b'-ab)\neq 0$, поэтому $\langle c,x\rangle=0$ тогда и только тогда, когда $n(a'b'-ab)\langle c,x\rangle=0$. По следствию 4.11,

$$\begin{aligned} n(a'b'-ab)\langle c,x\rangle &= \langle (a'b'-ab)c,(a'b'-ab)x\rangle \\ &= \langle 2\beta b'-\alpha b-\alpha(a'b')a,(a'b'-ab)x\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, условие $c\in\operatorname{span}(1,a,b,ab)^{\perp}$ равносильно тому, что равенство $\langle 2\beta b'-\alpha b-\alpha(a'b')a,(a'b'-ab)x\rangle=0$ выполнено для всех $x\in\{1,a,b,ab\}$.

В вычислениях мы будем использовать лемму 4.10 и следствие 4.11. Кроме того, нам понадобится тот факт, что, по предложению 4.8, элементы $1,a,b,ab$ (и, аналогично, $1,a',b',a'b'$) образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Из леммы 2.11 следует, что тогда $a,b,ab$ (и $a',b',a'b'$) попарно антикоммутируют.

- Пусть $x=1$. Заметим, что

  $$\langle (a'b')a,ab\rangle=-\langle (a'b')a,ba\rangle=-n(a)\langle a'b',b\rangle=-\langle b,a'b'\rangle.$$

  Тогда

  $$\begin{aligned} 0 &= \langle 2\beta b'-\alpha b-\alpha(a'b')a,(a'b'-ab)x\rangle \\ &= \langle 2\beta b'-\alpha b-\alpha(a'b')a,a'b'-ab\rangle \\ &= -2\beta\langle b',ab\rangle-2\alpha\langle b,a'b'\rangle-\alpha n(a'b')\langle a,1\rangle \\ &= -2(\alpha\langle b,a'b'\rangle+\beta\langle b',ab\rangle). \end{aligned}$$

- Пусть $x=a$. Тогда

  $$\begin{aligned} 0 &= \langle 2\beta b'-\alpha b-\alpha(a'b')a,(a'b'-ab)x\rangle \\ &= \langle 2\beta b'-\alpha b-\alpha(a'b')a,(a'b')a-b\rangle \\ &= 2\beta\langle b',(a'b')a\rangle-2\beta\langle b',b\rangle-\alpha\langle b,(a'b')a\rangle \\ &\quad +\alpha n(b)-\alpha n(a'b')n(a)+\alpha\langle (a'b')a,b\rangle \\ &= 2\beta\langle b'a,b'a'\rangle-2\beta\langle b',b\rangle+\alpha\langle ba,a'b'\rangle-\alpha\langle a'b',ba\rangle \\ &= 2\beta(\langle a,a'\rangle-\langle b,b'\rangle). \end{aligned}$$

- Пусть $x=b$. Тогда

  $$\begin{aligned} 0 &= \langle 2\beta b'-\alpha b-\alpha(a'b')a,(a'b'-ab)x\rangle \\ &= \langle 2\beta b'-\alpha b-\alpha(a'b')a,(a'b')b+a\rangle \\ &= 2\beta\langle b',(a'b')b\rangle+2\beta\langle b',a\rangle-\alpha n(b)\langle 1,a'b'\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \alpha n(a'b')\langle a, b\rangle - \alpha n(a)\langle a'b', 1\rangle \\
&= 2\beta\langle b'b, b'a'\rangle + 2\beta\langle b', a\rangle \\
&= 2\beta(\langle a', b\rangle + \langle a, b'\rangle).
\end{aligned}$$

- Пусть $x = ab$. Тогда

$$\begin{aligned}
0 &= \langle 2\beta b' - \alpha b - \alpha(a'b')a, (a'b' - ab)x\rangle \\
&= \langle 2\beta b' - \alpha b - \alpha(a'b')a, (a'b')(ab) + 1\rangle \\
&= 2\beta\langle b', (a'b')(ab)\rangle - \alpha\langle b, (a'b')(ab)\rangle \\
&- \alpha n(a'b')\langle a, ab\rangle - \alpha\langle (a'b')a, 1\rangle \\
&= 2\beta\langle b'(ab), b'a'\rangle + \alpha\langle (a'b')b, ab\rangle + \alpha\langle a'b', a\rangle \\
&= 2(\alpha\langle a, a'b'\rangle + \beta\langle a', ab\rangle).
\end{aligned}$$

Поскольку $(a, b), (c, d)$ и $(a', b'), (c', d')$ равноправны, условие $c' \in \mathrm{span}(1, a', b', a'b')^{\perp}$ получается из выписанных соотношений с помощью замен $\alpha \leftrightarrow \beta$, $a \leftrightarrow a'$ и $b \leftrightarrow b'$. Итого, должны иметь место следующие шесть равенств:

$$\begin{cases}
\alpha(\langle a, a'\rangle - \langle b, b'\rangle) & = 0, \\
\beta(\langle a, a'\rangle - \langle b, b'\rangle) & = 0, \\
\alpha(\langle a', b\rangle + \langle a, b'\rangle) & = 0, \\
\beta(\langle a', b\rangle + \langle a, b'\rangle) & = 0, \\
\alpha\langle b, a'b'\rangle + \beta\langle b', ab\rangle & = 0, \\
\alpha\langle a, a'b'\rangle + \beta\langle a', ab\rangle & = 0.
\end{cases}$$

Так как хотя бы одно из чисел $\alpha, \beta$ отлично от нуля, первые четыре соотношения равносильны тому, что $\langle a, a'\rangle - \langle b, b'\rangle = \langle a', b\rangle + \langle a, b'\rangle = 0$. Тогда существование ненулевого набора $(\alpha, \beta)$, удовлетворяющего последним двум равенствам, равносильно равенству нулю определителя матрицы левой части системы. □

**Теорема 4.13.** *Диаметр* $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ *равен* 3.

**Доказательство.** По предложению 4.7, диаметр $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ не меньше трёх. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что между любыми $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$ найдётся путь длины 3 в $\Gamma_C(\mathbb{S})$. Будем искать его следующим образом: найдём такой элемент $(a', b') \in Z(\mathbb{S})$, что

(1) между $(a, b)$ и $(a', b')$ существует путь длины 2;

(2) $(a', b')$ и $(c, d)$ соединены ребром, то есть $(a', b') \in C_{\mathbb{S}}((c, d))$.

Заметим, что определитель в лемме 4.12 заведомо равен нулю, если $\langle a', ab\rangle = \langle b', ab\rangle = 0$. Поэтому уравнения системы (4.1) автоматически выполнены, если справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \langle a, a'\rangle - \langle b, b'\rangle = 0, \\ \langle a, b'\rangle + \langle b, a'\rangle = 0, \\ \langle a', ab\rangle = 0, \\ \langle b', ab\rangle = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

В силу предложения 2.8, $\langle (x, y), (z, w)\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, w\rangle$ для всех $(x, y)$, $(z, w) \in \mathbb{S}$. Поэтому равенства (4.2) выполнены тогда и только тогда, когда

$$(a', b') \in \operatorname{span}((a, -b), (b, a), (ab, 0), (0, ab))^{\perp}.$$

Так как $(a', b') \in Z(\mathbb{S})$, то $t((a', b')) = 0$. Поэтому, по лемме 4.2(2), условие (2) равносильно тому, что $(a', b') \in \mathfrak{Im}(C_{\mathbb{S}}((c, d))) = \mathbb{R}(c, d) \oplus O_{\mathbb{S}}((c, d))$. Поскольку $\dim \mathfrak{Im}(C_{\mathbb{S}}((c, d))) = 5$, существует ненулевой элемент

$$(a', b') \in \mathfrak{Im}(C_{\mathbb{S}}((c, d))) \cap \operatorname{span}((a, -b), (b, a), (ab, 0), (0, ab))^{\perp}.$$

Этот элемент и будет искомым. □

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи, внимание к работе и ценные обсуждения.

## Список литературы

1. А. Э. Гутерман, С. А. Жилина, *Графы отношений вещественных алгебр Кэли–Диксона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 44–75.
2. А. Э. Гутерман, С. А. Жилина, *Графы отношений алгебры седенионов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 61–86.
3. А. Э. Гутерман, С. А. Жилина, *Контр-алгебры Кэли–Диксона: дважды альтернативные делители нуля и графы отношений.* — Фундам. прикл. мат. **23**, No. 3 (2020), 95–129.
4. С. А. Жилина, *Графы отношений алгебры контрседенионов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 87–113.
5. С. А. Жилина, *О дважды альтернативных делителях нуля в алгебрах Кэли–Диксона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 18–54.
6. J. C. Baez, *The octonions.* — Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2001), 145–205.
7. D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen, *Large annihilators in Cayley–Dickson algebras.* — Comm. Algebra **36**, No. 2 (2008), 632–664.

8. D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen, *Large annihilators in Cayley—Dickson algebras* II. — Bol. Soc. Mat. Mex. **13**, No. 2 (2007), 269–292.
9. A. Elduque, *Gradings on symmetric composition algebras.* — J. Algebra **322**, No. 10 (2009), 3542–3579.
10. A. Lopatin, A. Zubkov, *Classification of $G_2$-orbits for pairs of octonions.* — `arXiv:math/2208.08122`, 2022.
11. K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras*, Springer-Verlag, New York, 2004.
12. G. Moreno, *The zero divisors of the Cayley–Dickson algebras over the real numbers.* — Bol. Soc. Mat. Mex. **4**, No. 1 (1998), 13–28.
13. G. Moreno, *Alternative elements in the Cayley–Dickson algebras.* — Topics in Mathematical Physics, General Relativity and Cosmology in Honor of Jerzy Plebañski, World Sci. Publ., Hackensack, New Jersey, 333–346 (2006).
14. G. Moreno, *Constructing zero divisors in the higher dimensional Cayley–Dickson algebras.* — `arXiv:math/0512517`, 2005.
15. A. Pixton, *Alternators in the Cayley–Dickson algebras.* — Forum Math. **21**, No. 5 (2009), 853–869.
16. R. D. Schafer, *On the algebras formed by the Cayley–Dickson process.* — Amer. J. Math. **76**, No. 2 (1954), 435–446.
17. Y. Tian, *Matrix representations of octonions and their applications.* — Adv. Appl. Clifford Algebr. **10** (2000), 61–90.
18. S. Zhilina, *Orthogonality graphs of real Cayley–Dickson algebras. Part I: Doubly alternative zero divisors and their hexagons.* — Int. J. Algebra Comput. **31**, No. 4 (2021), 663–689.

Zhilina S. A. Diameter of the commutativity graph of the real sedenions.

The commutativity graph of the real sedenion algebra is considered. It is shown that those elements whose imaginary part is not a zero divisor correspond to isolated vertices of this graph. All other elements form a connected component whose diameter equals 3.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия
*E-mail*: `s.a.zhilina@gmail.com`

Поступило 11 октября 2023 г.