Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 524, 2023 г.

А. В. Власов, А. Э. Гутерман, Е. М. Крейнес

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ МИНИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНДЕКСА ЦИКЛИЧНОСТИ ТРОПИЧЕСКИХ МАТРИЦ

§1. Введение

Множество $\mathcal{S}$ с двумя бинарными операциями – сложением и умножением – называется *полукольцом*, если

(1) $\mathcal{S}$ является коммутативным моноидом с нейтральным элементом 0 относительно сложения;
(2) $\mathcal{S}$ является полугруппой относительно умножения;
(3) умножение дистрибутивно относительно сложения;
(4) $s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0$ для любого $s \in \mathcal{S}$.

В данной работе мы будем рассматривать тропическое полукольцо, представляющее собой множество $\mathbb{R}_{\max} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями тропического сложения $\oplus$ и тропического умножения $\otimes$, определенными следующим образом: $a \oplus b = \max\{a, b\}, a \otimes b = a + b$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$ и $-\infty \oplus a = a \oplus -\infty = a$, $-\infty \otimes a = a \otimes -\infty = -\infty$ для любого $a \in \mathbb{R}_{\max}$. Элементы 0 и $-\infty$ являются нейтральными относительно тропического сложения и тропического умножения соответственно. Данное полукольцо идемпотентно (т.е. $a \oplus a = a$ для любого $a \in \mathbb{R}_{\max}$) и, следовательно, антинегативно. Действительно, если $a \oplus b = -\infty$, то $-\infty = a \oplus b = a \oplus a \oplus b = a \oplus -\infty = a$ и аналогично $b = -\infty$.

Пусть $\mathcal{S}$ – полукольцо, тогда множество $M_n(\mathcal{S})$ квадратных матриц размера $n \times n$ также является полукольцом. Множество матриц над тропическим полукольцом будем для краткости обозначать через M_n.

При изучении тропических матриц бывает полезно рассматривать взвешенные ориентированные графы. Построим биекцию следующим образом. Пусть $A \in M_n$. Сопоставим этой матрице граф на n вершинах, где вес ребра из i-ой вершины в j-ую равен A_{ij}, если $A_{ij} \neq -\infty$, и это ребро отсутствует, если $A_{ij} = -\infty$. Полученный граф будем обозначать через $G(A)$.

Ключевые слова: тропическая линейная алгебра, индекс цикличности, линейные преобразования.

Основным объектом изучения в данной работе является инвариант, называемый *индексом цикличности*, определяемый сначала на ориентированных графах, а затем на множестве тропических матриц, и активно используемый в теории динамических систем, см. [6, глава 3].

Определение 1.1 ([6, определение 2.3])**.** *Пусть G – ориентированный граф. Его* индекс цикличности σ_G *определяется следующим образом:*

- *если G сильно связен и содержит хотя бы 2 вершины, то σ_G равнен наибольшему общему делителю длин всех его циклов;*
- *если G содержит ровно 1 вершину, то $\sigma_G = 1$;*
- *если G не является сильно связным, то σ_G равен наименьшему общему кратному индексов цикличности всех его максимальных сильно связных компонент.*

Определение 1.2. *Пусть G – взвешенный граф, C – некоторый цикл в нём.* Весом цикла $w(C)$ *называется тропическое произведение весов его рёбер, или, эквивалентно, их обычная сумма.* Средним весом $a(C)$ *этого цикла называется тропическое среднее геометрическое весов его рёбер, или, эквивалентно, их обычное среднее арифметическое. Более точно, если l – длина цикла C, а $a_1, a_2, \ldots, a_l$ – веса его рёбер, то*

$$w(C) = a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_l = a_1 + a_2 + \ldots + a_l,$$

$$a(C) = \sqrt[\otimes l]{a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_l} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_l}{l} = \frac{w(C)}{l}.$$

Определение 1.3. *Пусть G – взвешенный орграф. Цикл C в нём называется* критическим, *если $a(C)$ равно максимальному среднему весу цикла в G.* Критическим подграфом G_c *называется объединение всех критических циклов.*

Определение 1.4. *Пусть $A \in M_n$ – тропическая матрица, $G = G(A)$. Тогда* индекс цикличности $\sigma(A)$ *матрицы A определяется как $\sigma(A) = \sigma_{G_c}$, если G содержит хотя бы один цикл, и $\sigma(A) = 1$ в противном случае.*

Индекс цикличности позволяет описывать блочный вид некоторых степеней матрицы и играет критическую роль в так называемой теореме цикличности.

Теорема 1.5 ([6, теорема 3.9])**.** *Пусть $A \in M_n$ – неразложимая тропическая матрица с собственным значением λ и индексом цикличности σ. Тогда существует такое натуральное число N, что для* *любого натурального $k > N$ выполнено равенство*

$$A^{\otimes(k+\sigma)} = \lambda^{\otimes\sigma} \otimes A^{\otimes k}.$$

Из теоремы 1.5 следует, что если $\lambda = 0$, то последовательность степеней A имеет периодическое поведение с длиной периода, равной цикличности матрицы A. На самом деле, справедливо даже большее, и цикличность матрицы можно рассматривать как минимальную длину ее периодического поведения. Таким образом, цикличность важна как для исследования поведения динамической системы, соответствующей матрице, так и для вычисления больших степеней тропических матриц, см. [2, 3, 7, 11].

После определения нового инварианта естественным образом возникает вопрос: какие преобразования его сохраняют? При помощи таких преобразований, например, можно упрощать вычисление инварианта, или строить примеры объектов с заданным значением инварианта. Одним из первых подобной задачей занимался Фробениус, охарактеризовавший биективные линейные отображения комплексных матриц, сохраняющие определитель.

Теорема 1.6 ([1, Фробениус, 1897]). *Пусть $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел и пусть*

$$T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$$

– биективное линейное преобразование, такое что $\det(T(X)) = \det(X)$ *для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{C})$. Тогда существуют обратимые матрицы $U, V \in M_n(\mathbb{C})$, такие что* $\det(UV) = 1$ *и либо $T(X) = UXV$ для всех $X \in M_n(\mathbb{C})$, либо $X = UX^tV$ для всех $X \in M_n(\mathbb{C})$.*

С тех пор эта теория активно развивается, и описание ее современного состояния можно найти, например, в обзорах [8, 9, 10]. Отдельное внимание уделялось характеризации линейных отображдений матриц над полукольцами, см. [10, глава 9]. В центре внимания данной работы находятся линейные преобразования матриц над тропическим полукольцом, сохраняющие индекс цикличности. Такие преобразования рассматривались ранее в работах [4, 5]. В работе [4] были охарактеризованы биективные линейные отображения тропических матриц, сохраняющие индекс цикличности, а в [5] было получено полное описание таких отображений при отсутствии требования биективности.

Теорема 1.7 ([5, теорема 3.10]). *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное преобразование тропических матриц, $n \geqslant 3$. Отображение T сохраняет индекс цикличности тогда и только тогда, когда существуют*

- *матрица перестановки $P \in M_n$,*
- *матрица $B = (b_{ij}) \in M_n$, такая что $b_{ij} \neq -\infty$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, и все циклы в $G(B)$ имеют вес 0,*
- *диагональные матрицы $C_i = \mathrm{diag}(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}) \in M_n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, такие что $c_{ij} < 0$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$,*
- *число $\lambda \in \mathbb{R}$*

такие, что T представляется в виде композиции преобразований следующего вида:

- $T_1(A) = A^t$ *для всех* $A \in M_n$,
- $T_2(A) = P \otimes A \otimes P^t$ *для всех* $A \in M_n$,
- $T_3(A) = \lambda \otimes A$ *для всех* $A \in M_n$,
- $T_4(A) = A \circ B$ *для всех* $A \in M_n$,
- $T_5(A) = A \oplus \bigoplus\limits_{i=1}^{n} (a_{ii} \otimes C_i)$ *для всех* $A \in M_n$.

Теорема 1.8 ([5, теорема 3.11]). *Пусть $T : M_2 \to M_2$ – линейное преобразование тропических матриц. Отображение T сохраняет индекс цикличности тогда и только тогда, когда оно представляется в виде композиции преобразований следующего вида:*

- $T_1\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \otimes a_{11} \oplus c_{21} \otimes a_{22} & \alpha \otimes a_{12} \\ \beta \otimes a_{21} & c_{12} \otimes a_{11} \oplus c_{22} \otimes a_{22} \end{pmatrix}$, *где* $\alpha, \beta \neq -\infty$ *и* $c_{11} \oplus c_{12} = c_{21} \oplus c_{22} = \sqrt[\otimes 2]{\alpha \otimes \beta} = \frac{\alpha+\beta}{2}$,
- $T_2(A) = A^t$ *для всех* $A \in M_2$.

Пусть $X \subseteq M_n$ – некоторое подмножество. Будем говорить, что $T : X \to X$ сохраняет значение k инварианта R, если для любого $x \in X$ такого, что $R(x) = k$ выполнено $R(T(x)) = k$.

В данной работе мы доказываем, что сохранение всех значений индекса цикличности равносильно сохранению его значений 1 и 2. Получена полная характеризация таких отображений. В §4 приведены примеры, показывающие, что сохранения одного значения недостаточно для получения подобного результата.

Для удобства изложения введём следующие обозначения:
$\mathcal{E}_n = \{\alpha \otimes E_{ij} \in M_n | \, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \, \alpha \in \mathbb{R}\}$ – множество матриц, смежный граф которых содержит ровно 1 ребро;
$\mathcal{N}_n = \{\alpha \otimes E_{ij} \in M_n | \, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \, i \neq j, \, \alpha \in \mathbb{R}\}$ – подмножество

$\mathcal{E}_n$, состоящее из матриц, у которых единственное ребро не является петлёй;
$\mathcal{D}_n = \{\alpha \otimes E_{ii} \in M_n | \, 1 \leqslant i \leqslant n, \, \alpha \in \mathbb{R}\}$ – подмножество $\mathcal{E}_n$, состоящее из матриц, у которых единственное ребро является петлёй.

Если e – ребро из вершины i в вершину j, то $\bar{e}$ – ребро из j в i с тем же весом.

Для матрицы $A \in M_n$ через $\nu(A)$ будем обозначать количество элементов, отличных от $-\infty$. Заметим, что $\nu(A)$ равно количеству рёбер в $G(A)$.

Работа построена следующим образом: в §2 собраны основные вспомогательные утверждения; в §3 приводится формулировка и доказательство основной теоремы; в §4 приводятся примеры, показывающие, что сохранения единственного значения индекса цикличности недостаточно для решения задачи характеризации соответствующих отображений.

§2. Линейные отображения, сохраняющие значения 1 и 2 индекса цикличности

Следующие леммы, доказанные в [5], остаются верными и в случае сохранения значений 1 и 2 индекса цикличности, при этом их доказательства переносятся дословно.

Лемма 2.1 ([5, лемма 2.4]). *Пусть $n \geqslant 3$, $T : M_n \to M_n$ – линейное отображение тропических матриц, сохраняющее индексы цикличности 1 и 2. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любых $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$ из равенства $T(\alpha \otimes E_{ij}) = T(\beta \otimes E_{kl})$ следует, что $i = k, j = l$ и $\alpha = \beta$.*

Лемма 2.2 ([5, лемма 2.5]). *Пусть отображение $T : M_n \to M_n$ линейно и несюръективно. Тогда существуют i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, такие что для любой матрицы $A \in M_n$ выполнено $T(A) \neq E_{ij}$.*

Лемма 2.3 ([5, лемма 2.8]). *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное отображение, сохраняющее индексы цикличности 1 и 2, а матрица $A \in M_n$ такова, что граф $G(A)$ не содержит циклов. Тогда $G(T(A))$ также не содержит циклов.*

Большинство следующих утверждений имеют аналоги в случае сохранения всех значений индекса цикличности в [5], но их доказательства отличаются.

Лемма 2.4. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное отображение, сохраняющее индексы цикличности 1 и 2. Тогда*

(1) *для любой матрицы $A \in \mathcal{N}_n$ верно, что $T(A) \in \mathcal{N}_n$, т.е. корректно определено отображение $T^* = T|_{\mathcal{N}_n}$;*
(2) *отображение $T^* : \mathcal{N}_n \to \mathcal{N}_n$ биективно.*

Доказательство. 1. Для любой матрицы $A \in \mathcal{N}_n$ существуют $E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{N}_n$ такие, что $G(E_1 \oplus \ldots \oplus E_{n-1} \oplus A)$ – цикл длины n. Выберем $E_1, \ldots, E_{n-1}$ таким образом, чтобы все их элементы, отличные от $-\infty$, были одинаковыми и совпадали с элементом матрицы A, отличным от $-\infty$; обозначим этот элемент через α. Обозначим: $E_n = A$, $C = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ и $C_i = E_1 \oplus \ldots \oplus E_{i-1} \oplus E_{i+1} \oplus \ldots \oplus E_n$, $i = 1, \ldots, n$. По построению, граф $G(C_i)$ не содержит циклов для всех $i = 1, \ldots, n$.

2. Докажем, что граф $G(T(C))$ содержит хотя бы один цикл. Предположим противное. Если $G(T(C))$ не содержит циклов, то в нем не более $n-1$ ребер, т.е. $\nu(T(C)) \leqslant n-1$. Проверим, что в этом случае существует такой индекс $1 \leqslant i \leqslant n$, что $G(T(C_i)) = G(T(C))$. Действительно, если $G(T(C_i)) \neq G(T(C))$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то для каждого i найдётся такой индекс $j = j(i)$, что ребро e_j графа $G(T(C))$ удовлетворяет $e_j \notin G(T(C_i))$, а значит $e_j \in G(T(E_i))$. Из $\nu(T(C)) \leqslant n-1$ следует, что существуют такие индексы $1 \leqslant i_1 \neq i_2 \leqslant n$, что $j(i_1) = j(i_2)$ и им соответствует общее ребро e. Тогда $e \in G(T(E_{i_1}))$ и

$$e \notin G(T(C_{i_2})). \tag{2.1}$$

С другой стороны, поскольку $i_1 \neq i_2$, матрица E_{i_1} является слагаемым в матрице C_{i_2}, откуда, в силу аддитивности T, матрица $T(E_{i_1})$ является слагаемым в матрице $T(C_{i_2})$, а значит $e \in G(T(C_{i_2}))$. Полученное противоречие с (2.1) показывает, что существует такой индекс $1 \leqslant i \leqslant n$, что $G(T(C_i)) = G(T(C))$.

Для выбранного i рассмотрим $G_1 = G(T(C_i \oplus 1 \otimes E_i^t))$ и $G_2 = G(T(C \oplus 1 \otimes E_i^t))$. Из равенства графов $G(T(C_i)) = G(T(C))$ следует равенство $\sigma(G_1) = \sigma(G_2)$. Однако $\sigma(C_i \oplus 1 \otimes E_i^t) = 1$, так как в графе $C_i \oplus 1 \otimes E_i^t$ нет ориентированных циклов. В то же время, $\sigma(C \oplus 1 \otimes E_i^t) = 2$, поскольку средний вес цикла $a(1 \otimes E_i^t \oplus E_i) = (1 + 2\alpha)/2 > \alpha = a(C)$, что приводит к противоречию. Таким образом, $G(T(C))$ содержит хотя бы один цикл.

3. Рассмотрим произвольный цикл в $G(T(C))$, обозначим его через γ. По лемме 2.3, $G(T(C_k))$ не содержит циклов для любого $1 \leqslant k \leqslant n$. В частности, $G(T(C_k))$ не содержит цикл γ. То есть, найдётся

такой индекс i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что ребро e_i цикла γ не содержится в графе $G(T(C_k))$. Из того, что e_i – ребро графа $G(T(C))$, следует, что e_i содержится в графе $G(T(E_k))$ и e_i не содержится в $G(T(E_j))$ для любого $j \neq k$ – аналогично пункту 2. Таким образом, длина цикла удовлетворяет неравенству $l(\gamma) \geqslant n$. Тогда $l(\gamma) = n$, так как не существует цикла длины большей чем n на n вершинах.

4. Предположим, что $G(T(C)) \neq \gamma$. Из условия $l(\gamma) = n$ следует, что множества вершин $G(T(C))$ и γ совпадают. Тогда существует ребро e графа $G(T(C))$, которое не содержится в цикле γ. Следовательно, либо e – петля, либо e разделяет γ на два цикла меньшего размера. Это противоречит пункту 3. Следовательно, $G(T(C)) = \gamma$.

5. Из пункта 3 следует, что $\nu(T(E_i)) = 1$ для любого $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $\nu(T(A)) = 1$, т.е. $T(A) \in \mathcal{N}_n$. Это доказывает первую часть леммы.

6. Докажем, что отображение T^* биективно. Поскольку для $n = 2$ возможные значения индекса цикличности – только 1 и 2, то в этом случае утверждение следует из [5, лемма 2.10]. Пусть теперь $n \geqslant 3$. Определим отображение J на множестве пар $\{1, 2, \dots, n\}^2$ так, что если $T^*(E_{ij}) = \alpha \otimes E_{kl}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, то $J(i,j) = (k,l)$. По лемме 2.1, T^* инъективно, а значит и J тоже. Поскольку множество $\{1, 2, \dots, n\}^2$ конечно, то J биективно. Значит, для любой пары (i,j) найдутся индексы $k, l, 1 \leqslant k, l \leqslant n$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что $T^*(E_{kl}) = \alpha \otimes E_{ij}$. Тогда, в силу линейности T, отображение T^* сюръективно, а значит и биективно. □

Лемма 2.5. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное преобразование тропических матриц, сохраняющее индексы цикличности* 1 *и* 2, *и $A \in \mathcal{D}_n$. Тогда все рёбра графа $G(T(A))$ являются петлями.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. допустим, что существуют i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, такие что граф $G(T(A))$ содержит ребро из i в j. По лемме 2.4, существует матрица $E \in \mathcal{N}_n$, для которой $T(E) = E_{ji}$. Тогда $G(T(A \oplus E))$ содержит цикл $i \to\ j \to\ i$ длины 2. Обозначим его через C. Покажем, что существует число $\beta \in \mathbb{R}$, такое что $\sigma(T(A \oplus \beta \otimes E)) = 2$. Пусть λ – максимальный средний вес циклов в графе $G(T(A \oplus E))$ и $\mu = a(C)$. Тогда $\mu \leqslant \lambda$, поскольку C – цикл в $G(T(A \oplus E))$. Далее возможны два случая.

1. Пусть $\lambda > \mu$. Рассмотрим $\beta = 12(\lambda - \mu)$, где все операции понимаются в обычном смысле. Тогда в графе $G(T(A \oplus \beta \otimes E))$ средний

вес цикла C равен $\mu + \beta/2 = 6\lambda - 5\mu$. Остальные циклы, содержащие E_{ji}, состоят хотя бы из 3 рёбер, и их средний вес не больше, чем $\lambda + \beta/3 = 5\lambda - 4\mu$. Из $\lambda > \mu$ следует, что $6\lambda - 5\mu > 5\lambda - 4\mu$. Значит, C – критический подграф графа $G(T(A \oplus \beta \otimes E))$.

2. Пусть $\lambda = \mu$. Тогда можно взять любое $\beta > 0$. Действительно, в этом случае $a(C)$ увеличивается на $\beta/2$, средний вес циклов, содержащих ребро E_{ji}, увеличивается на $\beta/3$, а средний вес остальных циклов не изменяется. Следовательно, C – критический подграф графа $G(T(A \oplus \beta \otimes E))$.

Таким образом, в каждом из случаев существует такое значение $\beta \in \mathbb{R}$, что $G_c(T(A \oplus \beta \otimes E)) = C$. Тогда $\sigma(T(A \oplus \beta \otimes E)) = 2$. Но $\sigma(A \oplus \beta \otimes E) = 1$, противоречие. $\square$

Отображение T^*, определенное в лемме 2.4, индуцирует биекцию $\hat{T}$ на множестве рёбер полного графа на n вершинах без петель.

Лемма 2.6. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное преобразование тропических матриц, сохраняющее индексы цикличности* 1 *и* 2*. Тогда* $\widehat{T}(\bar{e}) = \overline{\widehat{T}(e)}$.

Доказательство. Поскольку T сохраняет индекс цикличности 2 и $\widehat{T}$ – биекция на множестве рёбер, то любой цикл длины 2 отображается в цикл длины 2. Следовательно, противоположные рёбра переходят в противоположные. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное преобразование тропических матриц, сохраняющее индексы цикличности* 1 *и* 2*, и $C \in M_n$ – матрица, такая что $G(C)$ – цикл длины* 3*. Тогда $G(T(C))$ – тоже цикл длины* 3.

Доказательство. 1. Предположим противное. По лемме 2.4, $G(T(C))$ состоит из 3 рёбер. Тогда $G(T(C))$ не содержит циклов. Действительно, в силу леммы 2.6, противоположные рёбра отображаются в противоположные, а, по пункту 2 леммы 2.4, сужение отображения T на множество $\mathcal{N}_n$ биективно, т.е. непротивоположные рёбра не могут отобразиться в противоположные. Следовательно, в $G(T(C))$ нет циклов длины 2. Петель в этом графе также нет по пункту 1 леммы 2.4.

2. Докажем, что T не сохраняет индекс цикличности 1, из чего получим противоречие с условием леммы. Пусть

$$C = \alpha \otimes E_{ij} \oplus \beta \otimes E_{jk} \oplus \gamma \otimes E_{ki},$$

где $i \neq j \neq k \neq i$, и $w = -\frac{\alpha}{3} + \frac{2\beta}{3} + \frac{2\gamma}{3}$. Тогда $a(G(\alpha \otimes E_{ij} \oplus w \otimes E_{ji})) = \frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{2\cdot 3} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = a(G(C))$ и, следовательно, $\sigma(C \oplus w \otimes E_{ji}) = 1$. Рассмотрим $A = T(C \oplus w \otimes E_{ji})$. В графе $G(A)$ точно будет содержаться цикл длины 2. Если других циклов нет, то $\sigma(A) = 2 \neq 1 = \sigma(C \oplus w \otimes E_{ji})$, следовательно, T не сохраняет индекс цикличности 1.

3. Допустим, что $G(A)$ содержит другие циклы. Так как $G(T(C))$ не содержит циклов, то единственный возможный случай – цикл длины 3, состоящий из рёбер $\widehat{T}(e_{jk}), \widehat{T}(e_{ki})$ и $\widehat{T}(e_{ji}) = \overline{\widehat{T}(e_{ij})}$. Тогда

$$\sigma(E_{ji} \oplus E_{jk} \oplus E_{ki}) = 1 \quad \text{и} \quad \sigma(T(E_{ji} \oplus E_{jk} \oplus E_{ki})) = 3,$$

так что T не сохраняет индекс цикличности 1. $\square$

Предложение 2.8. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное преобразование тропических матриц, сохраняющее индексы цикличности* 1 *и* 2. *Тогда $\widehat{T}$ переводит смежные рёбра в смежные.*

Доказательство. Из леммы 2.6 получаем утверждение леммы для взаимно противоположных рёбер. Пусть e_1, e_2 – смежные рёбра и они не образуют цикл длины 2. Без ограничения общности можем считать, что существуют $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$, $k \neq i$, такие что $e_1 = e_{ij}$ и либо $e_2 = e_{jk}$, либо $e_2 = e_{kj}$. В обоих случаях, рассмотрим $G(E_{ij} \oplus E_{jk} \oplus E_{ki})$ – цикл длины 3. По лемме 2.7 получаем, что $G(T(E_{ij} \oplus E_{jk} \oplus E_{ki})) = G(T(E_{ij}) \oplus T(E_{jk}) \oplus T(E_{ki}))$ – тоже цикл длины 3 с рёбрами $\widehat{T}(e_1)$, $\widehat{T}(e_{ki})$ и либо $\widehat{T}(e_2)$, либо $\widehat{T}(\bar{e}_2)$. Таким образом, рёбра $\widehat{T}(e_1)$ и $\widehat{T}(e_2)$ – смежные. $\square$

Следующее утверждение очевидно в случае сохранения всех значений индекса цикличности. В случае сохранения значений 1 и 2 оно требует отдельного доказательства.

Следствие 2.9. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное преобразование тропических матриц, сохраняющее индексы цикличности* 1 *и* 2, *и пусть $C \in M_n$ – матрица, такая что $G(C)$ – цикл длины k, $2 \leqslant k \leqslant n$. Тогда $G(T(C))$ – тоже цикл длины k.*

Доказательство. Без ограничения общности, пусть $C = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} E_i$, где $E_i = c_i \otimes E_{i,i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots, k-1$ и $E_k = c_k \otimes E_{k,1}$. Из предложения 2.8 следует, что $G(T(C))$ – неориентированный цикл длины k. Тогда можно развернуть некоторые рёбра так, чтобы этот цикл стал ориентированным. Иными словами, существует такое подмножество

$\Omega \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, что $G(T(A))$ – цикл длины k, где $A = \bigoplus_{i \notin \Omega} E_i \oplus \bigoplus_{i \in \Omega} E_i^t$. Предположим теперь, что $G(T(C))$ не является циклом длины k. Следовательно, $\Omega \neq \varnothing$ и $\Omega \neq \{1, 2, \ldots, k\}$. Но тогда $\sigma(A) = 1 \neq k = \sigma(T(A))$, противоречие. □

Лемма 2.10. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное преобразование, сохраняющее индексы цикличности 1 и 2. Тогда существует перестановка $\tau \in S_n$ такая, что либо $T(E_{ij}) = b_{ij} \otimes E_{\tau(i)\tau(j)}$ для всех $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, либо $T(E_{ij}) = b_{ij} \otimes E_{\tau(j)\tau(i)}$ для всех $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Другими словами, если $G(A)$ не содержит петель, то $G(T(A))$ получается из $G(A)$ перенумерацией вершин, изменением весов рёбер и, возможно, изменением ориентации сразу всех рёбер.*

Доказательство. С учетом предложения 2.8, достаточно доказать одно из следующих двух утверждений.

(1) Для любых матриц $E_1, E_2 \in \mathcal{N}_n$ выполнено:
a) если конец ребра $G(E_1)$ совпадает с началом ребра $G(E_2)$, то конец ребра $G(T(E_1))$ совпадает с началом ребра $G(T(E_2))$;
b) если $G(E_1)$ и $G(E_2)$ выходят из одной вершины, то рёбра $G(T(E_1))$ и $G(T(E_2))$ тоже выходят из одной вершины;
c) если $G(E_1)$ и $G(E_2)$ ведут в одну вершину, то $G(T(E_1))$ и $G(T(E_2))$ также ведут в одну вершину.

(2) Для любых матриц $E_1, E_2 \in \mathcal{N}_n$ выполнено:
a) если конец ребра $G(E_1)$ совпадает с началом ребра $G(E_2)$, то начало ребра $G(T(E_1))$ совпадает с концом ребра $G(T(E_2))$;
b) если $G(E_1)$ и $G(E_2)$ выходят из одной вершины, то рёбра $G(T(E_1))$ и $G(T(E_2))$ ведут в одну вершину;
c) если $G(E_1)$ и $G(E_2)$ ведут в одну вершину, то рёбра $G(T(E_1))$ и $G(T(E_2))$ выходят из одной вершины.

В силу леммы 2.4 и линейности T, достаточно рассмотреть только матричные единицы. Для каждой пары $E_{ij}, E_{jk} \in \mathcal{N}_n$, по следствию 2.9, выполняется либо 1a), либо 2a), так как цикл, содержащий рёбра e_{ij}, e_{jk}, отображается в цикл. Докажем, что либо для любых двух различных пар рёбер выполняется пункт (1), либо для любых двух различных пар рёбер выполняется пункт (2). Если $n = 2$, то утверждение следует из леммы 2.6. Без ограничения общности предположим, что $n \geqslant 3$ и существуют индексы i, j, k, $i \neq j \neq k \neq i$, такие что для $E_{ij}, E_{jk} \in \mathcal{N}_n$ выполняется условие 1a). Из леммы 2.8 следует, что матрицы E_{jk}, E_{ji} также удовлетворяют 1a). Тогда для любой $E_{ml} \in \mathcal{N}_n$ возможны следующие случаи.

i. Если $\{m,l\} \cap \{i,j,k\} = \varnothing$, то $E_{ij} \oplus E_{jk} \oplus E_{km} \oplus E_{ml} \oplus E_{li}$ – цикл. Следовательно, его образ – цикл такой же длины, и 1a) выполняется для любых пар рёбер в этом цикле.

ii. Если $m = i$, то $E_{kj} \oplus E_{ji} \oplus E_{il} \oplus E_{lk}$ – цикл и, следовательно, E_{ml} и E_{ji} удовлетворяют тому же условию 1a).

iii. Если $m = j$, то рассмотрим цикл $E_{kj} \oplus E_{jl} \oplus E_{lk}$, и E_{ml} и E_{kj} удовлетворяют условию 1a).

iv. Если $m = k$, то аналогично рассмотрим цикл $E_{ij} \oplus E_{jk} \oplus E_{kl} \oplus E_{li}$ и получим нужный результат.

v. Аналогично рассматриваются случаи $l \in \{i,j,k\}$ и $\{l,m\} \subseteq \{i,j,k\}$.

Таким образом, все E_{ml} удовлетворяют условию 1a).

Поскольку любой цикл длины 2 отображается в цикл длины 2, из леммы 2.6 следует, что в обоих случаях пункты b) и c) следуют из пункта a). Лемма доказана. $\square$

Из доказанного немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 2.11. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное отображение, сохраняющее индексы цикличности 1 и 2. Тогда для любого $l > 1$ граф $G(T(A))$ содержит столько же циклов длины l, что и $G(A)$.*

Лемма 2.12. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное преобразование, сохраняющее индексы цикличности 1 и 2. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $C \in M_n$ таких, что $G(C)$ – цикл длины хотя бы 2, выполнено равенство $a(G(T(C))) = \lambda \otimes a(G(C))$.*

Доказательство. 1. Для $n = 2$ утверждение леммы выполнено, поскольку в графе есть только один цикл длины хотя бы 2. Теперь предположим, что $n \geqslant 3$. Докажем лемму индукцией по длине циклов. Сначала докажем ее для случая, когда все циклы имеют средний вес 0, затем рассмотрим общий случай. Для начала покажем, что существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что для всех матриц $C \in M_n$ таких, что $G(C)$ – цикл длины 2, выполнено равенство $a(G(T(C))) = \lambda \otimes a(G(C))$.

2. База индукции. Рассмотрим два цикла длины 2 с общей вершиной. С точностью до перенумерации вершин без ограничения общности можем считать, что это циклы – $1 \to 2 \to 1$ и $1 \to 3 \to 1$. Обозначим их через C_1 и C_2 соответственно. Пусть C_3 – цикл $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Пусть $A_1 = E_{12} \oplus E_{21}, A_2 = E_{13} \oplus E_{31}$ и $A_3 = E_{12} \oplus E_{23} \oplus E_{31}$. Тогда

$C_1 = G(A_1)$, $C_2 = G(A_2)$ и $C_3 = G(A_3)$. Также пусть вес каждого ребра равен 0. Из следствия 2.11 получаем, что $G(T(E_{12} \oplus E_{21} \oplus E_{23} \oplus E_{31}))$ также состоит из двух циклов длин 2 и 3 соответственно. Поскольку T сохраняет индекс цикличности 1, $G(T(E_{12} \oplus E_{21} \oplus E_{23} \oplus E_{31})) = 1$. Тогда оба цикла $G(T(A_1))$ и $G(T(A_3))$ содержатся в критическом подграфе $G_c(T(E_{12} \oplus E_{21} \oplus E_{23} \oplus E_{31}))$, т.е. $a(G(T(A_1))) = a(G(T(A_3)))$. Аналогично для A_2 и A_3. Таким образом, $a(G(T(A_1))) = a(G(T(A_2)))$. Так как $a(C_1) = a(C_2)$, то эти веса увеличились на одинаковое число $\lambda \in \mathbb{R}$. Таким образом, для любых двух циклов длины 2 с общей вершиной существует $\lambda \in \mathbb{R}$, на которое увеличиваются средние веса обоих циклов.

Теперь рассмотрим два произвольных цикла длины 2. Без ограничения общности можно считать, что это циклы $1 \to 2 \to 1$ и $3 \to 4 \to 3$. Их средние веса увеличиваются на то же число, что и средний вес цикла $1 \to 3 \to 1$. Следовательно, утверждение леммы доказано для любых двух циклов длины 2.

3. Шаг индукции. Предположим, что лемма доказана для любых двух циклов длины не более k. Рассмотрим произвольный цикл длины $k+1$, у которого все рёбра веса 0, и обозначим его через C_{k+1}. Без ограничения общности можно считать, что $C_{k+1} = 1 \to 2 \to \ldots \to k \to (k+1) \to 1$. Тогда $C_{k+1} = G(A_{k+1})$, где

$$A_{k+1} = E_{12} \oplus E_{23} \oplus \ldots \oplus E_{k\,k+1} \oplus E_{k+1\,1} \in M_n.$$

Рассмотрим два вспомогательных графа $C_k = 1 \to 2 \to \ldots \to k \to 1 = G(A_k)$ и $C = G(E_{12} \oplus E_{23} \oplus \cdots \oplus E_{k-1\,k} \oplus E_{k\,k+1} \oplus E_{k+1\,1} \oplus E_{k\,1}) = G(A)$, где $A, A_k \in M_n$ – $(0, -\infty)$-матрицы, однозначно задающиеся своими графами. Тогда C – цикл длины $k+1$ с ребром из k в 1. Следовательно, $\sigma(C) = 1$. Так как все рёбра имеют одинаковый вес, C – критический подграф $G_c(A)$, а значит $\sigma(A) = 1$. Тогда $\sigma(T(A)) = 1$. По лемме 2.10, графы $G(T(A_k))$ и $G(T(A_{k+1}))$ – циклы длин k и $k+1$ соответственно.

Будем говорить, что e_{ij} – ребро из i в j. Поскольку T линейно и $e_{12}, e_{23}, \ldots, e_{k-1\,k}$ – общие рёбра циклов C_{k+1} и C_k, то, в силу леммы 2.6, получаем, что $\widehat{T}(e_{12}), \ldots, \widehat{T}(e_{k-1\,k})$ – общие рёбра графов $G(T(A_k))$ и $G(T(A_{k+1}))$. Оба этих графа являются подграфами графа $G(T(A))$, состоящего из $k+2$ рёбер. Согласно предположению индукции, $a(G(T(A_k))) = \lambda \otimes a(C_k) = \lambda$. Из того, что $\sigma(T(A)) = 1$, следует, что критический подграф $G_c(T(A))$ содержит хотя бы два цикла. Следовательно, $a(G(T(A_k))) = a(G(T(A_{k+1})))$, а значит $a(G(T(A_{k+1}))) =$

$\lambda = \lambda \otimes a(C_{k+1})$. Это доказывает шаг индукции. Таким образом, лемма справедлива для всех циклов длины хотя бы 2, средний вес которых равен 0.

4. Рассмотрим произвольный цикл C. Пусть $C = G(A)$ и $C' = G(A')$, где $A = \alpha_1 \otimes E_{12} \oplus \alpha_2 \otimes E_{23} \oplus \cdots \oplus \alpha_{k-1} \otimes E_{k-1\,k} \oplus \alpha_k \otimes E_{k\,1}$ и $A' = E_{12} \oplus E_{23} \oplus \cdots \oplus E_{k-1\,k} \oplus E_{k\,1}$. По лемме 2.10, $G(T(A))$ и $G(T(A'))$ – циклы. Они имеют общие вершины и рёбра, но с разными весами. Пусть $T(E_{i\,i+1}) = b_i \otimes E_{j_i\,j_{i+1}}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k-1$ и $T(E_{k\,1}) = b_k \otimes E_{j_k\,j_1}$. По пункту 3, $a(T(A')) = \frac{1}{k} \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} b_i = \lambda$. Заметим, что

$$\begin{aligned} T(A) &= \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant k-1} (\alpha_i \otimes T(E_{i\,i+1})) \oplus \alpha_k \otimes T(E_{k\,1}) \\ &= \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant k-1} (\alpha_i \otimes b_i \otimes E_{j_i\,j_{i+1}}) \oplus \alpha_k \otimes b_k \otimes E_{j_k\,j_1}. \end{aligned}$$

Тогда $a(T(A)) = \frac{1}{k} \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} (\alpha_i + b_i) = \frac{1}{k} \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \alpha_i + \frac{1}{k} \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} b_i = a(C) + \lambda$. Следовательно, $a(T(A)) = \lambda \otimes a(C)$, и лемма доказана. □

Следствие 2.13. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное отображение тропических матриц, сохраняющее индексы цикличности 1 и 2. Тогда существует $\lambda \in \mathbb{R}$, такое что для всех $A \in M_n$ и всех циклов C длины хотя бы 2 в графе $G(A)$ выполняется $a(C) = \lambda \otimes a(C')$, где C' – соответствующий цикл в $G(T(A))$.*

По лемме 2.5, если отображение $T : M_n \to M_n$ сохраняет индекс цикличности, то образ диагональной матрицы – тоже диагональная матрица. Тогда существуют $d_{ij} \in \mathbb{R}$, такие что $T(E_{ii}) = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} d_{ij} \otimes E_{jj}$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Лемма 2.14. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное преобразование, сохраняющее индексы цикличности 1 и 2, $\lambda = \lambda(T)$ – величина, определённая в лемме 2.12, и $\tau = \tau(T)$ – перестановка, определённая в лемме 2.10. Тогда $d_{i\tau(i)} = \lambda$ и $d_{i\tau(j)} < \lambda$ при всех $1 \leqslant j \neq i \leqslant n$.*

Доказательство. С точностью до перенумерации вершин, мы можем без ограничения общности считать, что перестановка τ тривиальна.

1. Для начала покажем, что $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} d_{ij} \geqslant \lambda$. Пусть $X = E_{12} \oplus E_{23} \oplus \cdots \oplus E_{n-1\;n} \oplus E_{n\;1}$ и $A_i = X \oplus E_{ii}$. По лемме 2.10, $G(T(X))$ – цикл

длины n, и, по лемме 2.12, $a(G(T(X))) = \lambda$. Если $d_{ij} < \lambda$ при всех $1 \leqslant j \leqslant n$, то $\sigma(G(T(A_i))) = n$. Но $\sigma(G(A_i)) = 1$, противоречие. Значит, $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} d_{ij} \geqslant \lambda$.

2. Докажем, что $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} d_{ij} = \lambda$. Предположим, что это не так и $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} d_{ij} = \alpha > \lambda$. Тогда существует β такое, что $\lambda - \alpha < \beta < 0$. Пусть максимум достигается при $j = j_0$. Рассмотрим $B = \beta \otimes E_{ii} \oplus E_{ij_0} \oplus E_{j_0 i}$, если $j_0 \neq i$, и $B = \beta \otimes E_{ii} \oplus E_{i\ i+1} \oplus E_{i+1\ i}$, если $j_0 = i$. В обоих случаях, $\sigma(B) = 2$, а $\sigma(T(B)) = 1$, так как $\alpha \otimes \beta > \lambda$, что приводит к противоречию. Таким образом, $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} = \lambda$.

3. Теперь покажем, что $d_{ij} < \lambda$ при $1 \leqslant j \neq i \leqslant n$. Предположим, что это не так и существует индекс $j \neq i$ такой, что $d_{ij} = \lambda$. Выберем k, отличное от i и j. Рассмотрим $A = E_{ii} \oplus E_{jk} \oplus E_{kj}$. Заметим, что $\sigma(A) = 2$, но $\sigma(T(A)) = 1$, противоречие.

4. Из пунктов 2 и 3 следует, что $d_{ii} = \lambda$. Лемма доказана. □

§3. Основной результат

Теорема 3.1. *Пусть $T : M_n \to M_n$ – линейное преобразование тропических матриц, $n \geqslant 3$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *T сохраняет индекс цикличности;*
(2) *T сохраняет индексы цикличности 1 и 2;*
(3) *существуют такие*
- *матрица перестановки $P \in M_n$,*
- *матрица $R = (r_{ij}) \in M_n$, такая что $r_{ij} \neq -\infty$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, и все циклы в $G(R)$ имеют вес 0,*
- *диагональные матрицы $D_i = \operatorname{diag}(d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{in}) \in M_n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, такие что $d_{ij} < 0$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$,*
- *$\lambda \in \mathbb{R}$,*

что T представляется в виде композиции преобразований из множества $\{T_1, \ldots, T_5\}$, где
- *$T_1(A) = A^t$ для всех $A \in M_n$,*
- *$T_2(A) = P \otimes A \otimes P^t$ для всех $A \in M_n$,*
- *$T_3(A) = \lambda \otimes A$ для всех $A \in M_n$,*
- *$T_4(A) = A \circ R$ для всех $A \in M_n$,*
- *$T_5(A) = A \oplus \bigoplus\limits_{i=1}^{n} (a_{ii} \otimes D_i)$ для всех $A \in M_n$.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) тривиальна, а импликация (3) $\Rightarrow$ (1) следует из теоремы 1.7. Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (3).

По лемме 2.5, $T(\mathcal{D}_n)$ лежит в линейной оболочке $\mathcal{D}_n$ и, по лемме 2.4, $T(\mathcal{N}_n) = \mathcal{N}_n$. Тогда, в силу линейности, можно рассматривать действие T на множествах $\mathcal{D}_n$ и $\mathcal{E}_n$ по отдельности. Пусть отображение T_2 таково, что матрица P из условия теоремы соответствует перестановке τ из леммы 2.10. Из леммы 2.10 следует, что T действует на множестве $\mathcal{N}_n$ как композиция T_2, умножения на определенные константы и, возможно, T_1. Рассмотрим отображение T' такое, что $T = T_2 \circ T'$, если в лемме 2.10 выполняется $T(E_{ij}) = b_{ij} \otimes E_{\tau(i)\tau(j)}$, или $T = T_1 \circ T_2 \circ T'$, если $T(E_{ij}) = b_{ij} \otimes E_{\tau(j)\tau(i)}$. Тогда $T'(\alpha \otimes E_{ij}) = \alpha \otimes b_{\tau(i)\tau(j)} \otimes E_{ij}$ для всех i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Согласно лемме 2.12, средний вес каждого цикла увеличивается на одинаковое число $\lambda \in \mathbb{R}$. Определим $T_4(A) = \lambda \otimes A$. Тогда числа $b_{\tau(i)\tau(j)}$ таковы, что если вес каждого ребра графа умножить на $b_{\tau(i)\tau(j)} \otimes \lambda^{\otimes -1}$, то для любой матрицы $C \in M_n$, такой что $G(C)$ – цикл длины хотя бы 2, выполняется $w(C) = w(T(C))$. Тогда $T_4^{-1} \circ T'$ не меняет весов циклов длины хотя бы 2, т.е. существует матрица R, удовлетворяющая условиям теоремы, такая что $T' = T_3 \circ T_4 \circ T''$, где $T''(E_{ij}) = E_{ij}$ для всех $i \neq j$.

Из леммы 2.14 и линейности T следует, что для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, существуют матрицы $D'_i = \operatorname{diag}(d'_{i1}, d'_{i2}, \ldots, d'_{in})$ с $d_{ij} < \lambda$ при всех $j \neq i$ и $d_{ii} = \lambda$, такие что

$$T(E_{ii}) = \lambda \otimes E_{\tau(i)\tau(i)} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} d'_{ij} \otimes E_{jj}.$$

Заметим, что T_1 и T_4 действуют тождественно на $\mathcal{D}_n$. Тогда для любой $A \in \mathcal{D}_n$ выполняется

$$(T_2 \circ T_3 \circ T'')(A) = \lambda \otimes \bigoplus_{i=1}^{n} (a_{\tau(i)\tau(i)} \otimes E_{ii}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} (a_{\tau(i)\tau(i)} \otimes \bigoplus_{j=1}^{n} d'_{ij} \otimes E_{jj}),$$

$$\begin{aligned} T''(A) &= \bigoplus_{i=1}^{n} (a_{ii} \otimes E_{ii}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} (a_{ii} \otimes \bigoplus_{j=1}^{n} d'_{\tau^{-1}(i)\tau^{-1}(j)} \otimes \lambda^{\otimes -1} \otimes E_{jj}) \\ &= A \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} (a_{ii} \otimes \bigoplus_{j=1}^{n} d_{ij} \otimes E_{jj}), \end{aligned}$$

где $d_{ij} = d'_{\tau^{-1}(i)\tau^{-1}(j)} \otimes \lambda^{\otimes -1} < 0$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда $d_{ii} = 0$. Переопределим $d_{ii} < 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, от этого $T''(A)$ не изменится, поскольку в A есть слагаемое $a_{ii} \otimes E_{ii}$ и $a_{ii} > a_{ii} \otimes d_{ii}$. Пусть $D_i = \mathrm{diag}(d_{ij})$, тогда

$$T''(A) = A \oplus \bigoplus_{i=1}^{n}(a_{ii} \otimes \bigoplus_{j=1}^{n} d_{ij} \otimes E_{jj}) = A \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii} \otimes D_i.$$

Тогда D_i – матрица из условия теоремы и $T'' = T_5$. Таким образом, T действует на $\mathcal{D}_n$ как $T_3 \circ T_2 \circ T_5$. Это завершает доказательство импликации, а значит и всей теоремы. □

Лемма 3.2 ([5, лемма 4.5]). *Пусть $R = (r_{ij}) \in M_n$, $r_{ij} \neq -\infty$ при всех i, j. Тогда средний вес всех циклов в $G(R)$ равен 0 тогда и только тогда, когда существуют $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$ такие, что $R = xy^t$, где $x = (s_1, \ldots, s_n)^t$ и $y = (-s_1, \ldots, -s_n)^t$.*

§4. Примеры

Приведем примеры, показывающие, что существуют линейные отображения, сохраняющие единственное значение индекса цикличности и не имеющие вида, описанного в теореме 3.1.

Пример 4.1. Пусть $T : M_n \to M_n$ – отображение тропических матриц, заданное равенством $T(X) = O$, где O – матрица, все элементы которой равняются $-\infty$. Тогда T линейное и сохраняет индекс цикличности 1.

Можно рассмотреть чуть более содержательный пример.

Пример 4.2. Пусть $B \in M_n$ – фиксированная матрица, индекс цикличности которой равняется k, и пусть $T : M_n \to M_n$ – отображение заданное формулой $T(X) = (\bigoplus_{i,j=1}^{n} X_{ij}) \otimes B$. Тогда T линейное и сохраняет индекс цикличности k.

В этих двух примерах индекс цикличности $T(A)$ постоянен для всех $A \in M_n$, следовательно, эти отображения не удовлетворяют условию теоремы 3.1. Также существуют примеры отображений, сохраняющих индекс цикличности k, не все элементы образа которых имеют индекс цикличности k.

Пример 4.3. Пусть $n \geqslant 3$. Рассмотрим отображение $T(X) = X \oplus (\bigoplus_{i,j=1}^{n} X_{ij}) \otimes E_{11}$. Оно линейно и сохраняет индекс цикличности 1. При этом $\sigma(T(E_{23} \oplus E_{32})) = \sigma(E_{11} \oplus E_{23} \oplus E_{32}) = 2$, т.е. не все элементы образа отображения T имеют индекс цикличности 1. Заметим также, что $\sigma(T(E_{12} \oplus E_{21})) = \sigma(E_{12} \oplus E_{21} \oplus E_{11}) = 1$, тогда как $\sigma(E_{12} \oplus E_{21}) = 2$. Таким образом, T не сохраняет индекс цикличности, следовательно, не удовлетворяет условиям теоремы 3.1.

Список литературы

1. G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen.* — Sitz. Deutsch. Akad. Wiss., Berlin, 1897.
2. M. Gavalec, *Periodicity in Extremal Algebras.* Hradec Králové, Gaudeamus, 2004.
3. M. Gavalec, *Linear matrix period in max-plus algebra.* — Linear Algebra Appl. **307** (2000), 167–182.
4. A. Guterman, E. Kreines, C. Thomassen, *Linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index.* — Special Matrices **9** (2021), 112–118.
5. A. Guterman, E Kreines, A. Vlasov, *Non-surjective linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index.* — Kybernetika **58**, No. 5 (2022), 691–707.
6. B. Heidergott, G. J. Olsder, J. van der Woude, *Max Plus at Work.* Princeton Series in Applied Mathematics, 2006.
7. A. Kennedy-Cochran-Patrick, G. Merlet, T. Nowak, S. Sergeev, *New bounds on the periodicity transient of the powers of a tropical matrix: Using cyclicity and factor rank.* — Linear Algebra Appl. **611** (2021), 279–309.
8. C.-K. Li, N. K. Tsing, *Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques.* — Linear Algebra Appl. **162–164** (1992), 217–235.
9. L. Molnar, *Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces*, Lect. Notes Math., vol. **1895**, 2007.
10. S. Pierce and others, *A survey of linear preserver problems.* — Linear Multilinear Algebra **33** (1992), 1–119.
11. S. Sergeev, *Max algebraic powers of irreducible matrices in the periodic regime: An application of cyclic classes.* — Linear Algebra Appl. **431** (2009), 1325–1339.

Vlasov A. V. Guterman A. E., Kreines E. M., Linear transformations preserving minimal values of the cyclicity index of tropical matrices.

The cyclicity index of a directed graph is defined as the least common multiple of the cyclicity indices of all its strongly connected components, and the cyclicity index of a strongly connected directed graph is equal to the greatest common divisor of the lengths of all its directed cycles. The cyclicity index of a tropical matrix is the cyclicity index of its critical subgraph, i.e., the subgraph of the adjacency graph, consisting of all cycles with the largest average weight. This paper considers linear transformations of tropical matrices that preserve only two values of the cyclicity index, 1 and 2. A complete characterization of such transformations is obtained. To this end, it is proved that the values 1 and 2 of the cyclicity index are preserved if and only if all its values are preserved. It is shown that there are mappings of another type that preserve one fixed value of the cyclicity index.

Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова,
119991, Москва, Россия;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
119991, Москва, Россия
E-mail: aleksandr.vlasov@math.msu.ru

Поступило 6 октября 2023 г.

Университет Бар-Илан,
5290002 Рамат-Ган, Израиль;
Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова,
119991, Москва, Россия;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
119991, Москва, Россия
E-mail: alexander.guterman@biu.ac.il

Университет Тель-Авива,
6997801 Тель-Авив, Израиль;
Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова,
119991, Москва, Россия;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
119991, Москва, Россия
E-mail: kreines@tauex.tau.ac.il