Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 524, 2023 г.

Ю. А. Альпин, В. С. Альпина

ИНДЕКС ЭРГОДИЧНОСТИ МНОЖЕСТВА СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

§1. Введение

Пусть A – стохастическая матрица, т.е. прямоугольная неотрицательная матрица, в которой сумма элементов каждой строки равна единице. Говорят, что две строки матрицы A *пересекаются*, если они имеют положительные элементы в некотором общем столбце. Символом $\mathcal{A}$ будем обозначать конечное множество стохастических $n \times n$ матриц. Кроме того, в статье используются следующие обозначения:

$\mathcal{A}^l$ – множество произведений длины l матриц из $\mathcal{A}$;

$\mathcal{A}^+$ – мультипликативная полугруппа, порождённая множеством $\mathcal{A}$.

Определение 1. *Индексом эргодичности матричного множества $\mathcal{A}$ называется наименьшее число $k = k(\mathcal{A}) \geqslant 2$ со следующим свойством: существует такое натуральное l, что множество любых k строк любой матрицы $A \in \mathcal{A}^l$ содержит пересекающиеся строки. Наименьшее такое число l будем называть экспонентом эргодичности множества $\mathcal{A}$ и обозначать его через $e(\mathcal{A})$.*

В случае $k = 2$ семейство $\mathcal{A}$ называется слабо эргодическим. Свойство слабой эргодичности хорошо известно в теории цепей Маркова [8] и теории вероятностных автоматов [5].

В этой статье, в §1 и §2, доказывается точная верхняя оценка экспонента эргодичности для произвольного индекса эргодичности. Известная оценка А. Паза, относящаяся к слабо эргодическим множествам, получается из неё как частный случай. В §3 устанавливается связь индекса эргодичности с индексом импримитивности множества неотрицательных матриц – понятием, введённым в работе В. Ю. Протасова и А. С. Войнова [7], см. также [2], и оказавшимся весьма полезным при изучении комбинаторной структуры полугрупп неотрицательных матриц.

Ключевые слова: стохастическая матрица, индекс импримитивности, индекс эргодичности, экспонент эргодичности.

Все свойства стохастических матриц, изучаемые в данной работе, зависят только от расположения в них положительных элементов, т.е. от их комбинаторных свойств. Поэтому вместо стохастических матриц мы будем оперировать их булевыми образами – матрицами над двухэлементной булевой алгеброй. Булева (0,1)-матрица без нулевых строк является образом любой стохастической матрицы, имеющей положительные элементы на тех местах, на которых в булевой матрице стоят единицы.

Обозначения, введённые выше, в дальнейшем тексте будут относиться к булевым матрицам. Вообще, под матрицей подразумевается булева матрица с ненулевыми строками.

§2. Оценка экспонента эргодичности

При оценке экспонента эргодичности мы будем иметь дело с неупорядоченными множествами, состоящими из k дизъюнктных, т.е. не имеющих общих элементов, подмножеств множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим множество всех таких множеств символом $\Phi(n, k)$. Как выяснится, число $|\Phi(n, k)|$ и есть точная верхняя граница экспонента эргодичности для произвольного значения k. Элементы множества $\Phi(n, k)$ для краткости будем называть (n, k)-наборами.

Замечательно то, что число $|\Phi(n, k)|$, т.е количество (n, k)-наборов, равно некоторому числу Стирлинга. Напомним, что числом Стирлинга 2-го рода называется количество неупорядоченных разбиений n-элементного множества на k непустых подмножеств. Обычное обозначение – $S(n, k)$. Существует рекуррентная формула ([3])

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

Начальные условия: $S(0, 0) = 1, S(n, 0) = 0, S(j, k) = 0$ при $j < k$.

Лемма 1. $|\Phi(n, k)| = S(n+1, k+1)$.

Доказательство. Множество $\Phi(n, k)$ состоит из (n, k)-наборов двух типов:

1) (n, k)-набор представляет собой разбиение множества N, число таких наборов равно $S(n, k)$;

2) мощность объединения подмножеств (n, k)-набора меньше n. В этом случае выбор k подмножеств определяет $(k+1)$-ое подмножество, в которое входят все оставшиеся элементы. Набору этого типа однозначно соответствует разбиение n-множества на $k + 1$ подмножеств.

Из описанных двух случаев вытекает, что число $|\Phi(n,k)|$ складывается из числа разбиений n-множества на k частей и числа разбиений этого множества на $k+1$ частей, умноженного на $k+1$, так как при фиксированном разбиении n-множества на $k+1$ частей выбрать из него k подмножеств можно $k+1$ способами. Следовательно,

$$|\Phi(n,k)| = S(n,k) + (k+1)S(n,k+1). \tag{1}$$

Правая часть равенства (1) есть рекуррентная формула для числа Стирлинга 2-го рода $S(n+1,k+1)$, что и доказывает лемму. $\square$

Определение 2. *Матрица называется дизъюнктной, если никакие две её строки не пересекаются. Две дизъюнктные матрицы называются существенно различными, если ни одна из них не получается из другой перестановкой строк.*

Дизъюнктная $k \times n$ матрица $G = (g_{ip})$ естественным образом определяет (n,k)-набор $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ по следующему правилу:

$$p \in \gamma_i \ \Leftrightarrow g_{ip} = 1 \ (i = 1, \dots, k). \tag{2}$$

Поскольку (n,k)-набор есть неупорядоченное множество, то две матрицы определяют различные наборы, если они существенно различны. Обозначим множество всевозможных дизъюнктных существенно различных $k \times n$ матриц через $\mathcal{D}(k,n)$. Мы установили взаимно однозначное соответствие между множествами $\Phi(n,k)$ и $\mathcal{D}(k,n)$.

Обозначим через $\tau(A)$ максимальное число строк матрицы A, любые две из которых не пересекаются. Если любые две строки матрицы A пересекаются, то положим $\tau(A) = 1$. В этом случае, матрица называется стягивающей (scrambling).

Вместе с определением 1 полезно иметь определение, использующее параметр τ.

Определение 3. *Индексом эргодичности матричного множества $\mathcal{A}$ называется минимальное число k со следующим свойством: существует натуральное l, при котором $\tau(A) < k$ для любой матрицы $A \in \mathcal{A}^l$.*

Лемма 2 ([1])**.** *Если для матриц A, B произведение AB существует, то*

$$\tau(AB) \leqslant \min(\tau(A), \tau(B)).$$

Теорема 1. *Пусть множество $n \times n$ матриц $\mathcal{A}$ имеет индекс эргодичности k. Тогда*

$$e(\mathcal{A}) \leqslant S(n+1, k+1).$$

Доказательство. Пусть

$$A = A_1 A_2 \cdots A_m \tag{3}$$

– самое длинное произведение матриц семейства $\mathcal{A}$ такое, что $\tau(A) = k$. Пусть дизъюнктная $k \times n$ подматрица расположена в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Обозначим через D_0 дизъюнктную $k \times n$ матрицу, в которой $d_{1i_1} = d_{2i_2} = \cdots = d_{ki_k} = 1$, а остальные элементы равны 0. Далее введём матрицы $D_s = D_0 A_1 A_2 \cdots A_s$, где $s = 1, \ldots, m$. Тогда

$$D_0, D_1, D_2, \ldots, D_m \tag{4}$$

– дизъюнктные $k \times n$ матрицы. Действительно, допустим, что $\tau(D_s) < k$ для некоторого $s < m$. Тогда, в силу леммы 2, мы имели бы $\tau(D_s(A_{s+1} \cdots A_m)) = \tau(D_m) < k$, что противоречит выбору произведения (3).

Кроме того, все матрицы ряда (4) существенно различны. Предположим противное. В этом случае, существуют такие s и t, что

$$D_s A_{s+1} \cdots A_t = P D_s, \tag{5}$$

где P – некоторая $k \times k$ матрица перестановки. Из (5) легко вывести, что

$$D_s (A_{s+1} \cdots A_t)^u = D_s,$$

где u – показатель, при котором $P^u = E$. Значит,

$$D_s (A_{s+1} \cdots A_t)^{ur} = D_s, \quad r = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Поскольку $\tau(D_s) = k$, то, по лемме 2,

$$\tau(A_{s+1} \cdots A_t)^{ur} = k, \quad r = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, существуют сколь угодно длинные произведения матриц из $\mathcal{A}$, содержащие дизъюнктные $k \times n$ подматрицы. Но это противоречит условию теоремы.

Итак, все матрицы последовательности (4) принадлежат множеству $\mathcal{D}(k, n)$, а их число удовлетворяет условию

$$m + 1 = e(\mathcal{A}) \leqslant S(n+1, k+1). \qquad \square$$

§3. Доказательство точности оценки теоремы 1

В этом параграфе мы построим пример семейства матриц порядка n с индексом эргодичности k, экспонент эргодичности которого в точности равен $S(n+1, k+1)$.

Определение 4. *Для произвольной пары (n, k)-наборов $\Gamma=\{\gamma_1, ..., \gamma_k\}$, $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ определим матрицу A порядка n следующим образом. Для каждого $i = 1, \dots, k$ положим, что на пересечении строк с номерами из γ_i и столбцов с номерами из δ_i стоит подматрица A_i, все элементы которой равны единице. Остальные элементы указанных строк и столбцов равны нулю. Ясно, что подматрицы A_i, отвечающие различным i, стоят в разных строках и столбцах. Если существует номер s, не принадлежащий никакому γ_i, то положим, что s-ая строка A состоит из единиц.*

Из приведённого описания матрицы A видно, что $\tau(A) = k$.

Следствие 1. *Пусть дизъюнктные $k \times n$ матрицы G и H соответствуют (n, k)-наборам $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$, $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ по правилу* (2). *Пусть A – матрица, отвечающая этим наборам по определению* 4. *Тогда $GA = H$.*

Действительно, из правила (2) и определения 4 непосредственно следует, что произведение i-ой строки G на матрицу A равно i-ой строке H.

Пусть B – матрица, построенная как A по определению 4, но для некоторых других (n, k)-наборов

$$\Gamma' = \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_k\}, \quad \Delta' = \{\delta'_1, \dots, \delta'_k\}.$$

Пусть G' и H' – соответствующие этим наборам дизъюнктные $k \times n$ матрицы. По следствию 1 имеем равенство $G'B = H'$.

Лемма 3. *Равенство $\tau(AB) = k$ имеет место тогда и только тогда, когда каждое множество γ'_j содержит единственное множество δ_i.*

Доказательство. Предположим, что условие выполнено и дано, что $\delta_i \subseteq \gamma'_j$, $u \in \delta_i$. Согласно определению 4,

1) $a_{su} = 1$ для всех $s \in \gamma_i$,

2) $b_{ut} = 1$ для всех $t \in \delta'_j$, $b_{ut} = 0$ при $t \notin \delta'_j$.

Пусть $s \in \gamma_i$, тогда из 1) и 2) следует:

$$(AB)_{st} = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in \delta'_j; \\ 0, \text{ если } t \notin \delta'_j. \end{cases} \tag{7}$$

Как видно из (7), в матрице AB каждому γ_i отвечает подматрица, составленная из единиц и стоящая на пересечении строк с номерами из γ_i и столбцов с номерами из δ'_j $(i = 1, \dots, k)$. В остальных позициях указанных строк и столбцов стоят нули. Подматрицы, состоящие из единиц и отвечающие различным γ_i, дизъюнктны в том смысле, что их элементы не могут занимать одну и ту же позицию.

Если существует $s \in N$, не принадлежащий никакому γ_i, то s-ая строка AB состоит из единиц.

Из строения матрицы AB легко видеть, что $\tau(AB) = k$.

Пусть условие леммы не выполнено. Это значит, что выполнено одно из следующих условий.

1. Некоторое подмножество δ_i содержит индекс t, не входящий ни в одно из подмножеств γ'_j. На матричном языке это значит, что $h_{it} = 1$, столбец с номером t в Γ' нулевой. Поскольку $h_{it} = g_{is}a_{st}$ для некоторого s, то, согласно определению матриц A и B,

а) для данного s имеем $a_{st} = 1$;

б) строка с номером t матрицы B состоит из единиц.

Следовательно, s-ая строка AB состоит из единиц, и, очевидно, пересекается с остальными строками AB. Значит, $\tau(AB) < k$.

2. Объединение подмножеств δ_i содержится в объединении подмножеств γ'_j.

В этом случае, существуют два элемента, лежащие в разных подмножествах набора Δ, но в одном из подмножеств набора Γ'. Действительно, предположим противное: любые два элемента, лежащие в разных подмножествах набора Δ, лежат в разных подмножествах набора Γ'. Это значит, что каждое γ'_j содержится в некотором δ_i. Получаем, вместе с условием 2, что каждое из подмножеств набора Δ совпадает с одним из подмножеств набора Γ'. Это, однако, противоречит предположению, что условие леммы не выполнено.

Итак, имеются элементы u и v, лежащие в разных подмножествах набора Δ, но в одном подмножестве набора Γ'. Пусть, далее, p, q – номера строк матрицы A, содержащих элементы $a_{pu} = 1, a_{qv} = 1$. Заметим, что p и q лежат в разных подмножествах набора Γ. Умножая p-ую строку A на матрицу B, получим p-ую строку матрицы AB. В эту строку в качестве слагаемого входит u-ая строка B. Соответственно, в q-ую строку матрицы AB в качестве слагаемого входит v-ая строка матрицы B. Но u-ая и v-ая строки равны по построению B, поэтому p-ая и q-ая строки AB пересекаются. Следовательно, $\tau(AB) < k$. Лемма доказана. □

Для матриц $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ одинаковых размеров выражение $B \leqslant C$ в дальнейшем понимается в том смысле, что $b_{ij} = 1 \Rightarrow c_{ij} = 1$ для всех i, j. Если $B \leqslant C$, то легко доказывается, что $BD \leqslant CD$, когда размеры матриц допускают умножение. Запись $B < C$ означает, что $B \leqslant C$, причём $B \neq C$.

Переведём лемму 3 на матричный язык.

Лемма 4. *Равенство $\tau(AB) = k$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такая матрица перестановки P, что*

$$H \leqslant PG'. \tag{8}$$

Теорема 2. *Оценка теоремы 1 точна.*

Доказательство. Пронумеруем матрицы множества $\mathcal{D}(k, n)$ в порядке, при котором если существует матрица перестановки P, такая, что $G_s < PG_t$, то $s < t$. Для матриц G_t, G_{t+1} построим матрицу $A(t)$ согласно определению 4, следовательно,

$$G_t A(t) = G_{t+1}, \quad t = 1, \ldots, \varkappa - 1. \tag{9}$$

Здесь $\varkappa = |\mathcal{D}(k, n)| = S(n + 1, k + 1)$. Рассмотрим множество матриц

$$\mathcal{A} = \{A(1), \ldots, A(\varkappa - 1)\}. \tag{10}$$

Согласно определению 4 каждая из матриц множества $\mathcal{A}$ содержит дизъюнктную $k \times n$ подматрицу. Докажем, что любая матрица $A \in \mathcal{A}^{\varkappa}$ не содержит дизъюнктных $k \times n$ подматриц, следовательно, индекс эргодичности множества $\mathcal{A}$ равен k.

1. Пусть для матриц $A(s), A(t) \in \mathcal{A}$ имеем $\tau(A(s)A(t)) = k$. Докажем, что $s < t$. Рассмотрим матрицы

$$G_s A(s) = G_{s+1}, \quad G_t A(t) = G_{t+1}.$$

Согласно лемме 4, существует матрица перестановки P, такая что $G_{s+1} \leqslant PG_t$, т.е. либо $G_{s+1} < PG_t$ и тогда $s + 1 < t$, либо $G_{s+1} = PG_t$. Так как в множестве $\mathcal{D}(k, n)$ любые две матрицы существенно различны, то второй случай сводится к равенству $G_{s+1} = G_t$, отсюда $s+1 = t$. В любом случае, $s + 1 \leqslant t$, следовательно, $s < t$.

2. Допустим, что матрица $A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_{l-1})A(s_l)$ содержит дизъюнктную $k \times n$ подматрицу, т.е.

$$\tau(A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_{l-1})A(s_l)) = k.$$

Из леммы 2 следует, что для соседних сомножителей должно быть $\tau(A(s_j)A(s_{j+1})) = k$. Тогда, согласно п. 1, $s_j < s_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, l)$. Отсюда:

$$s_1 < s_2 < s_3 < \cdots < s_{l-1} < s_l < s_l + 1.$$

Итак, если матрица $A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_{l-1})A(s_l)$ содержит дизъюнктную $k \times n$ подматрицу, то $l + 1 \leqslant \varkappa \;\Rightarrow\; l \leqslant \varkappa - 1$. Следовательно, любое произведение матриц множества $\mathcal{A}$ длины $\varkappa$ не содержит дизъюнктных $k \times n$ подматриц. Это значит, что индекс эргодичности $\mathcal{A}$ равен k.

Для завершения доказательства заметим, что матрица $A(1) \cdots A(\varkappa - 1)$ содержит дизъюнктную $k \times n$ подматрицу, поскольку из (9) следует, что $G_1 A(1) \cdots A(\varkappa - 1) = G_\varkappa$. Следовательно, $e(\mathcal{A}) = S(n+1, k+1)$. □

Вывод оценки Паза. Конечное множество стохастических матриц обладает свойством слабой эргодичности, если все достаточно длинные произведения матриц из этого множества являются стягивающими. О свойстве слабой эргодичности и его роли в теории цепей Маркова см. в книгах [8, 5]. Слабая эргодичность означает, что множество матриц имеет индекс эргодичности равный двум. Впервые в [6], а более подробно в [5] было доказано (в терминах данной статьи) следующее утверждение.

Теорема 3. *Если индекс эргодичности множества $n \times n$ матриц $\mathcal{A}$ равен двум, то*

$$e(\mathcal{A}) \leqslant \frac{1}{2}(3^n - 2^{n+1} + 1), \tag{11}$$

и оценка (11) является точной.

Доказательство. Оба утверждения теоремы 3 вытекают из теорем 1 и 2 как частные случаи. Действительно, для числа Стирлинга имеется явная формула (см. [3])

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n. \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что $S(n+1, 3) = \frac{1}{2}(3^n - 2^{n+1} + 1)$. □

§4. Индекс импримитивности и индекс эргодичности

Определение 5 ([7]). *Индексом импримитивности множества $\mathcal{A}$ называется наибольшее число $r = r(\mathcal{A})$ со следующим свойством: существует такое r-элементное множество строк, что никакие две из них не пересекаются ни в какой матрице полугруппы $\mathcal{A}^+$. Если полугруппа $\mathcal{A}^+$ содержит матрицу, в которой пересекаются любые две строки, то по определению $r(\mathcal{A}) = 1$.*

Согласно определению 5, индекс эргодичности множества $\mathcal{A}$ есть наименьшее число $k = k(\mathcal{A})$ со следующим свойством: при некотором l в любом k-элементном подмножестве строк любой матрицы $A \in \mathcal{A}^l$ существуют пересекающиеся строки.

К определению индекса эргодичности можно подойти иначе. Введём в рассмотрение «мягкий» вариант определения 5.

Определение 6. *Индексом слабой импримитивности множества $\mathcal{A}$ называется наибольшее число $\nu = \nu(\mathcal{A})$ со следующим свойством: существует такое ν-элементное множество строк, что при любом l найдётся матрица $A \in \mathcal{A}^l$, в которой строки A с номерами из этого подмножества не пересекаются.*

Нетрудно видеть, что

1) $k(\mathcal{A}) = \nu(\mathcal{A}) + 1$,
2) $r(\mathcal{A}) \leqslant \nu(\mathcal{A})$.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ I_A & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E_{k-1} & 0 \\ I_B & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant r \leqslant k-1 < n-1, \tag{13}$$

матрицы I_A, I_B состоят из единиц. В силу равенств $AB = BA = A$, матрицы (13) составляют полугруппу. Индекс импримитивности семейства (13) равен r, а индекс эргодичности равен k, причём r может принимать любое значение между 1 и $k-1$.

Если множество $\mathcal{A}$ состоит из одной матрицы A, то вместо $r(\mathcal{A})$, $\nu(\mathcal{A})$ будем писать $r(A), \nu(A)$. Очевидно, что $r(A) = \nu(A)$.

В заключение охарактеризуем индекс импримитивности и индекс слабой импримитивности множества матриц $\mathcal{A}$ через индексы импримитивности моногенных подполугрупп полугруппы $\mathcal{A}^+$.

Следующее утверждение (в несколько иных терминах) доказано в [7], а его комбинаторное доказательство представлено в [1].

Предложение 1 ([7, 1]). *Индекс импримитивности семейства $\mathcal{A}$ равен наименьшему из индексов импримитивности моногенных подполугрупп полугруппы $\mathcal{A}^+$, т.е.*

$$r(\mathcal{A}) = \min_{A \in \mathcal{A}^+} r(A).$$

Ниже нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5 ([4]). *Для любой конечной полугруппы существует такое натуральное число η, что при $k \geqslant \eta$ в любом произведении элементов полугруппы $x_1 x_2 \cdots x_k$ существует подпроизведение $x_s x_{s+1} \cdots x_t$, являющееся идемпотентом $(1 \leqslant s \leqslant t \leqslant \eta)$.*

Предложение 2. *Индекс слабой импримитивности семейства $\mathcal{A}$ равен наибольшему из индексов импримитивности моногенных подполугрупп полугруппы $\mathcal{A}^+$, т.е.*

$$\nu(\mathcal{A}) = \max_{A \in \mathcal{A}^+} r(A).$$

Доказательство. Очевидно, что всегда $\nu(\mathcal{A}) \geqslant \max\limits_{A \in \mathcal{A}^+} r(A)$. Докажем, что на самом деле здесь имеет место равенство. Применим лемму 5 к конечной полугруппе $\mathcal{A}^+$. Пусть l так велико, что любое произведение l матриц из $\mathcal{A}$ содержит идемпотентное подпроизведение. Среди этих произведений, согласно определению 6, существует произведение $A_1 A_2 \cdots A_l = A$, для которого $\tau(A) = \nu$. Пусть $A_s A_{s+1} \cdots A_t = I$ – идемпотентный сомножитель этого произведения. Из леммы 2 следует, что $\tau(I) = \nu$. Кроме того, как для всякой идемпотентной матрицы, $r(I) = \tau(I)$. Итак, в $\mathcal{A}^+$ всегда существует матрица с индексом импримитивности равным $\nu(\mathcal{A})$, что и требовалось доказать. □

Список литературы

1. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Комбинаторные и спектральные свойства полугрупп стохастических матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 13–25.
2. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Новое доказательство теоремы Протасова–Войнова о полугруппах неотрицательных матриц.* — Мат. заметки **105**, No. 6 (2019), 807–815.
3. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика.* М., Мир, 1990.
4. T. E. Hall, M. V. Sapir, *Idempotents, regular elements and sequences from finite semigroups.* — Discrete Math. **161** (1996), 151–160.
5. A. Paz, *Introduction to Probabilistic Automata.* Academic Press, New York–London, 1971.

6. A. Paz, *Definite and quasidefinite sets of stochasic matrices.* — Proc. Amer. Math. Soc. **16**, No. 4 (1965), 634–641.
7. V. Yu. Protasov, A. S. Voynov, *Sets of nonnegative matrices without positive products.* — Linear Algebra Appl. **437** (2012), 749–765.
8. E. Seneta, *Non-Negative Matrices and Markov Chains.* Springer, New York, 2006.

Al'pin Yu. A., Al'pina V. S. Ergodicity index of the set of stochastic matrices.

The paper introduces and explores the notions of ergodicity index and ergodicity exponent of a set of stochastic matrices. For the ergodicity exponent a sharp upper bound is obtained. A particular case of this bound is the well-known Paz bound. Also a connection between the ergodicity index and the Protasov–Voynov imprimitivity index is established.

ул. Гоголя, 9, кв. 1,
420015 Казань, Россия

Поступило 5 октября 2023 г.

E-mail: yurialpin016@gmail.com

E-mail: alpina.valentina@yandex.ru