Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 523, 2023 г.

В. М. Поляков

РАССЛОЕНИЯ НА $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ РАНГА 3 И НЕВЫРОЖДЕННЫЕ СЕЧЕНИЯ РАССЛОЕНИЙ РАНГА 2

§1. Основные обозначения

В работе мы будем придерживаться стандартных обозначений:

$$\mathbb{P}^1_{\mathrm{A}} = \mathrm{Proj}\ A[t_0, t_1], \quad \deg t_0 = \deg t_1 = 1,$$

где A – нетерово кольцо. В обозначениях $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_X(n)$ будем опускать $X = \mathbb{P}^1_{\mathrm{A}}$ и писать просто $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}(n)$. Как обычно, U_i дополнение к нулям t_i, $U_{01} = U_0 \cap U_1$, $x = t_1/t_0,\ y = t_0/t_1$, кроме того $\mathcal{O}(U_0) = A[x]$, $\mathcal{O}(U_1) = A[y]$, $\mathcal{O}(U_{01}) = A[x, y]$, при этом $xy = 1$.

§2. Введение

Хорошо известна классификация векторных расслоений на проективной прямой над полем. Теорема Гротендика говорит о том, что все такие расслоения раскладываются в сумму линейных, причем единственным образом. В случае проективной прямой над кольцом известно гораздо меньше, однако в самом простейшем случае классификация известна, а именно, в случае расслоений на $\mathbb{P}^1_{\mathrm{A}}$ ранга 2 с тривиальным общим слоем и простыми подскоками (то есть высоты 1) в работе [1] была дана их классификация. Классификация расслоений с подскоками высоты 2 еще не известна, однако известно, что существует лишь конечное число классов изоморфизма расслоений с фиксированными инвариантами (дискриминантами) [2].

В первой части работы будет получена классификация расслоения ранга 3 на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с тривиальным общим слоем и простыми подскоками. Оказывается, что они классифицируются всего одним инвариантом, а

Ключевые слова: векторное расслоение, арифметическая поверхность, проективная прямая, подскоки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (грант на создание и развитие МЦМУ им. Леонарда Эйлера, соглашение No. 075-15-2022-289).

именно дискриминантом $\nu \in \mathbb{Z}$. Из этого факта будет получено интересное следствие для расслоений ранга 2 о том, что два таких расслоения стабильно изоморфны тогда и только тогда, когда их дискриминанты совпадают.

Во второй части работы рассматриваются невырожденные сечения расслоений ранга 2 с тривиальным общим слоем, будет показано, что у таких расслоений существуют невырожденные сечения всех степеней выше минимальной, тем самым будет дан ответ на вопрос, поставленный в [3].

§3. Расслоения ранга 3 с тривиальным общим слоем и простыми подскоками

Пусть E векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ ранга 3 с тривиальным общим слоем и простыми подскоками, то есть такое, что $E|_{\mathbb{Q}} \simeq \mathcal{O}^3$ и слои над замкнутыми точками $E|_p$ изоморфны либо $\mathcal{O}^3$, либо $\mathcal{O}+\mathcal{O}(-1)+\mathcal{O}(1)$. Если реализовался последний случай, то мы будем говорить, что E имеет простой подскок в точке p, в другом случае, будем говорить, что у E нет подскока в данной точке.

Этот раздел будет посвящен получению классификации таких расслоений. Подход ничем не будет отличаться от решения аналогичной задачи в случае расслоений ранга 2 (см. [1]), так что подробности будут опускаться.

Первым делом применим теорему Бейлинсона (см. [1]) к расслоению $F = E(1)$, для которого из теоремы о замене базы для когомологий мы имеем $H^0(F) = \mathbb{Z}^6$, $H^0(F(-1)) = \mathbb{Z}^3$, $H^1(F) = 0$, $H^1(F(-1)) = 0$. Таким образом F задается в виде коядра некоторой стрелки:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^3 \longrightarrow \mathcal{O}^6 \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

После подкрутки на $\mathcal{O}(-1)$ получим задание E в виде коядра:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^3 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}(-1)^6 \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Стрелку φ мы будем называть невырожденной, если ее коядро является расслоением ранга 3.

Зафиксируем стандартные $\mathcal{O}$-базисы e_1, e_2, e_3 и $f_1, \dots, f_6$ расслоений $\mathcal{O}^3$ и $\mathcal{O}^6$ соответственно. Это задает нам изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-2)^3, \mathcal{O}(-1)^6) \simeq M_{6,3}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1))).$$

Следовательно стрелка φ задается некоторой матрицей $\varphi = t_0\varphi_0 + t_1\varphi_1$, где $\varphi_i \in M_{6,3}(\mathbb{Z})$. Воспользовавшись теорией приведения (аналогично случаю расслоений ранга 2) можем считать, что

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\nu_2 \mid \nu_1$ и $\nu_3 \mid \nu_2$. Заметим, что $\nu_3 = 1$, поскольку иначе наибольший общий делитель (ν_1, ν_2, ν_3) делится на некоторое простое число π и на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/\pi$ найдется точка, в которой единственный тождественно ненулевой минор 3×3 (первые 3 строчки φ) обратится в 0, это будет противоречить невырожденности. Таким образом матрица φ_0 упрощается, и мы можем считать, что

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \\ \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предложение 1. *Если E расслоение ранга 3 с простыми подскоками задается матрицей $\varphi = t_0\varphi_0 + t_1\varphi_1$, где φ_i как выше, то $\nu_2 = 1$, $H^0(E(-1)) = 0$, $H^1(E(-1)) \simeq \mathbb{Z}/\nu$, где $\nu = \nu_1$. Точки подскока E совпадают с простыми делителями ν.*

Доказательство. Фиксируем базисы когомологий Чеха $H^1(\mathcal{O}^3(-3))$:

$$\frac{e_1}{t_0^2t_1},\ \frac{e_2}{t_0^2t_1},\ \frac{e_3}{t_0^2t_1},\ \frac{e_1}{t_0t_1^2},\ \frac{e_2}{t_0t_1^2},\ \frac{e_3}{t_0t_1^2},$$

и $H^1(\mathcal{O}^6(-2))$:

$$\frac{f_1}{t_0t_1}, \dots, \frac{f_6}{t_0t_1}.$$

Рассмотрим длинную когомологическую последовательность

$$0 \to H^0(E(-1)) \to H^1(\mathcal{O}^3(-3)) \xrightarrow{\varphi(-1)^*} H^1(\mathcal{O}^6(-2)) \to H^1(E(-1)) \to 0. \tag{1}$$

В данных базисах стрелка $\varphi(-1)^*$ будет задаваться следующей матрицей

$$\varphi(-1)^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \nu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Пусть некоторое простое число π делит ν_2 (и, соответственно, делит ν_1), тогда, вычисляя коядро $\varphi(-1)^*$, получаем $H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/\pi, E(-1)) \simeq (\mathbb{Z}/\pi)^2$, чего, при наших предположениях о подскоках, быть не может. Таким образом $\nu_2 = \pm 1$ и очевидным преобразованием можно сделать $\nu_2 = 1$.

Предположим теперь, что некоторое простое число π делит $\nu = \nu_1$. Тогда $H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/\pi, E(-1)) \simeq (\mathbb{Z}/\pi)$, тогда по теореме Гротендика у расслоения E имеется подскок в данной точке. Аналогичные рассуждения показывают, что в точках, не являющихся делителями ν подскока нет.

Остальные утверждения получаются несложными вычислениями ядра и коядра $\varphi(-1)^*$, но уже как матрицы с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. $\square$

Таким образом, поскольку $\nu_2 = 1$, мы можем еще сильнее упростить матрицу φ:

$$\varphi = t_0 \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Определение 1. *Поскольку ν мы можем заменять на $-\nu$ (получая при этом изоморфное расслоение), то не умаляя общности будем считать ν целым положительным числом и будем его называть дискриминантом расслоения E.*

Предложение 2. *Пусть стрелка φ соответствует матрице (3), тогда необходимым условием ее невырожденности является $(\nu, a_{31}, a_{21}) = 1$.*

Доказательство. Пусть φ невырождена, тогда невырождено и ее ограничение на U_0:

$$\varphi|_{U_0} = t_0 \begin{pmatrix} a_{11}+x & 0 & 0 \\ a_{21} & x & 0 \\ a_{31} & 0 & x \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ограничимся в точку $x = -a_{11}$. Тогда, если найдется простое число π, делящее наибольший общий делитель (ν, a_{31}, a_{21}), то коядро на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/\pi$ будет иметь ранг 4. □

Таким образом, поскольку необходимое условие $(\nu, a_{31}, a_{21}) = 1$ верно, мы можем упростить матрицу φ, избавившись от a_{11}. Пусть $a_{21}\overline{a_{21}} + a_{31}\overline{a_{31}} + \nu\overline{\nu} = 1$. Прибавим к первой строке матрицы φ вторую, умноженную на $-a_{11}\overline{a_{21}}$, третью, умноженную на $-a_{11}\overline{a_{31}}$ и четвертую, умноженную на $-a_{11}\overline{\nu}$. После чего подправим второй и третий столбцы матрицы φ_1 первым, после сделаем то же самое со вторым и третьим столбцами матрицы φ_0, но уже с помощью 5 и 6 строчек.

Таким образом считаем, что матрица φ выглядит так:

$$\varphi = t_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Замечание 1. Элементы a_{21}, a_{31} определены с точностью до ν.

Предложение 3. *Условие из предыдущего предложения является также достаточным.*

Доказательство. Невырожденность сужения φ на U_1 очевидна, поскольку

$$\varphi|_{U_1} = t_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}y & 1 & 0 \\ a_{31}y & 0 & 1 \\ \nu y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

Невырожденность сужения на U_0 равносильна инъективности стрелки

$$\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]^4\colon 1 \mapsto (x, a_{21}, a_{31}, \nu)$$

и проективности ее коядра. Все это легко вытекает из необходимого условия. □

3.1. Морфизмы. Изучим морфизмы между нашими векторными расслоениям. Они будут соответствовать матрицам, удовлетворяющим некоторым условиям целочисленности. Итак, пусть имеется два расслоения ранга 3 с тривиальным общим слоем и простыми подскоками E и F, и первому соответствует матрица

$$\varphi = t_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а второму — матрица

$$\psi = t_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из функториальности спектральной последовательности Бейлинсона следует, что задание морфизма $E \to F$ равносильно заданию следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^3(-2) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"] & \mathcal{O}^6(-1) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \mathcal{O}^3(-2) \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{O}^6(-1) \arrow[r] & F \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{6}$$

Таким образом получаем условие $\psi\theta = \lambda\varphi$. Разобьем матрицу λ на блоки размера 3×3:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Также введем следующие обозначения

$$N(\nu) = \begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 4. *Приведенная выше конструкция отождествляет* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(E, F)$ *со множеством матриц* $\theta \in M_{3,3}(\mathbb{Z})$*, удовлетворяющих следующим двум условиям*

(i) $N(\mu)\theta = \lambda_4 N(\nu)$*, для некоторой* $\lambda_4 \in M_{2,2}(\mathbb{Z})$;
(ii) $\lambda_2 = (M_2\theta - \theta M_1)\, N(\nu)^{-1} \in M_{2,2}(\mathbb{Z})$.

Доказательство. Доказательство является техническим и аналогично доказательству для случая векторных расслоений ранга 2 (см. [1]), достаточно расписать равенство $\psi\theta = \lambda\varphi$ поэлементно, откуда будут следовать все утверждения. □

Замечание 2. Из доказательства следует, что $\lambda_1 = \theta$, $\lambda_3 = 0$.

Лемма 1. *Пусть* ε *и* ζ *элементы* $\mathbb{Z}/\nu$ *и* $(\nu, \varepsilon, \zeta) = 1$*, тогда можно выбрать представителей* ε *и* ζ *так, чтобы* $(\varepsilon, \zeta) = 1$.

Доказательство. Допуская вольность речи, будем обозначать класс в $\mathbb{Z}/\nu$ и конкретного его представителя в $\mathbb{Z}$ одним символом. Сначала предположим, что оба ε и ζ не $0 \pmod{\nu}$. Пусть $\nu = abc$, $\varepsilon = ade$, $\zeta = bfe$, причем $(\varepsilon, \zeta) = e$, $(\varepsilon, \nu) = a$, $(\nu, \zeta) = b$. Тогда, поскольку ε/a и ν/a взаимно просты, по теореме Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии найдется простое число p такое, что $\varepsilon/a + k\nu/a = p$. Аналогично находим другое простое число q такое, что $\zeta/b + n\nu/b = q$. Тогда $\varepsilon + k\nu = pa$ и $\zeta + n\nu = bq$ искомые.

Если же один из ε, $\zeta \equiv 0 \pmod{\nu}$, и пусть не умаляя общности это ε, тогда рассмотрим $\varepsilon = \nu$, а в качестве ζ возьмем любого его представителя. □

3.2. Классификация.

Теорема 1. (i) *Любое расслоение на* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ *ранга* 3 *с простыми подскоками является коядром некоторой стрелки вида* (5)*, а также верно обратное. Точки подскока таких расслоений совпадают с делителями дискриминанта* ν.

(ii) *Для данного положительного целого числа* ν *существует единственное расслоение ранга* 3 *с простыми подскоками, имеющее в качестве дискриминанта* ν.

(iii) *Расслоения с разными дискриминантами ν и μ не изоморфны.*

Доказательство. Пункт (i) можно считать доказанным выше. Докажем (ii). Пусть имеется два расслоения E и F, которые задаются матрицами φ и ψ из начала пункта 3.1, причем $\mu = \nu$, $\epsilon = 0$, $\xi = 1$. Распишем условие (i) предложения 4:

$$\begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \theta \begin{pmatrix} 1/\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 & \nu\theta_2 & \nu\theta_3 \\ \theta_4/\nu & \theta_5 & \theta_6 \\ \theta_7/\nu & \theta_8 & \theta_9 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Z})$$

для матрицы

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ \theta_7 & \theta_8 & \theta_9 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Z}).$$

Таким образом, оно равносильно паре условий $\nu\,|\,\theta_4$ и $\nu\,|\,\theta_7$. Распишем условие (ii):

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \theta - \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1/\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(\theta_2\varepsilon + \theta_3\zeta)/\nu & * & * \\ -(\varepsilon\theta_5 + \zeta\theta_6)/\nu & * & * \\ (\theta_1 - \varepsilon\theta_8 - \zeta\theta_9)/\nu & * & * \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Z}).$$

Оно равносильно следующей системе сравнений

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_2 + \zeta\theta_3 \equiv 0 \pmod{\nu} \\ \varepsilon\theta_5 + \zeta\theta_6 \equiv 0 \pmod{\nu} \\ \theta_1 - \varepsilon\theta_8 - \zeta\theta_9 \equiv 0 \pmod{\nu} \end{cases} \tag{7}$$

Из условия обратимости θ получаем следующее:

$$\det(\theta) = \theta_1(\theta_5\theta_9 - \theta_6\theta_8) \equiv \lambda \pmod{\nu},$$

где $\lambda = \pm 1 \pmod{\nu}$. По лемме 1 можем считать ε и ζ взаимно простыми. Пусть $\varepsilon\overline{\varepsilon} + \zeta\overline{\zeta} = 1$. Пусть

$$\theta' = \begin{pmatrix} 1 & \zeta & -\varepsilon \\ 0 & \zeta & -\varepsilon \\ 0 & \overline{\varepsilon} & \overline{\zeta} \end{pmatrix}$$

— матрица с элементами из $\mathbb{Z}/\nu$. Тогда $\det(\theta') = \lambda = 1$. Поскольку $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}/\nu)$ является сюръекцией, то найдется матрица $\theta \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, сравнимая с θ' по модулю ν. Такая матрица задает нам изоморфизм расслоений E и F. Таким образом каждое расслоение с дискриминантом ν изоморфно расслоению, которое задается матрицей

$$\psi = t_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пункт (iii) теоремы мы также можем считать доказанным ранее, поскольку ν является инвариантом расслоения, так как

$$H^1(E(-1)) \simeq \mathbb{Z}/\nu. \qquad \square$$

Таким образом наши расслоения обладают очень простой классификацией: каждое расслоение однозначно определяется своим дискриминантом ν.

Из полученной классификации расслоений ранга 3 вытекает следующий интересный результат про расслоения ранга 2.

Теорема 2. *Расслоения на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ ранга 2 с тривиальным общим слоем и простыми подскоками одного дискриминанта ν являются стабильно изоморфными.*

Доказательство. Пусть E и F два расслоения ранга 2 с простыми подскоками и дискриминантом ν, где $\nu \in \mathbb{Z}$ такое, что $H^1(E(-1)) \simeq H^1(F(-1)) \simeq \mathbb{Z}/\nu$. Рассмотрим следующие расслоения ранга 3 с простыми подскоками: $E' = \mathcal{O} \oplus E$ и $F' = \mathcal{O} \oplus F$. Тогда $H^1(E'(-1)) \simeq H^1(F'(-1)) \simeq \mathbb{Z}/\nu$, но отсюда следует, что $E' \simeq F'$. $\square$

§4. Невырожденные сечения

Перейдем теперь к вопросу о невырожденных сечениях расслоений ранга 2. Пусть векторное расслоение E на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ ранга 2 с тривиальным общим слоем задано матрицей склейки

$$\sigma = \begin{pmatrix} y^n & m(x,y) \\ 0 & x^n \end{pmatrix} \tag{8}$$

с $m(x,y) = a_{-n+1}y^{n-1} + ... + a_0 + ... + a_{n-1}x^{n-1}$, связывающей $[e_1, e_2]$ — базис на U_0 и $[f_1, f_2]$ — базис на U_1 следующим образом: $[e_1, e_2]\sigma =$

$[f_1, f_2]$. Это равносильно тому, что у расслоения имеется невырожденное сечение (не имеющее нулей на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$) степени n:

$$s : \mathcal{O} \to E(n)$$

заданное на U_0 как $1 \mapsto t_0^n e_1$ и на U_1 как $1 \mapsto t_1^n f_1$.

В работе Ханны [5] было доказано, что у каждого расслоения на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ существует сечение некоторой степени d. В работе [4] был построен алгоритм, который по данному расслоению строит для него некоторую линейную фильтрацию. Основная задача состоит в отыскании невырожденных сечений наименьшей степени. В работе [3] показано, что у таких расслоений существуют невырожденные сечения почти всех степеней выше минимальной. Там же ставится вопрос: верно ли, что у данного расслоения существуют невырожденные сечения *всех* степеней выше минимальной. Следующая теорема дает ответ на этот вопрос.

Теорема 3. *Если у расслоения ранга* 2 *с тривиальным общим слоем на* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ *имеется невырожденное сечение степени* n, *то у него существуют невырожденные сечения всех высших степеней.*

Доказательство. Поскольку у расслоения существует невырожденное сечение степени n, то расслоение можно задать с помощью матрицы склейки (8). Предъявим явно для данного n сечение на единицу большей степени. Зададим его на U_0 следующим образом

$$r|_{U_0} : 1 \mapsto t_0^{n+1} x e_1 + t_0^{n+1} e_2.$$

Тогда на U_1 это сечение будет выглядеть так:

$$r|_{U_1} : 1 \mapsto t_1^{n+1}(1 - y^{n+1} m(x, y)) f_1 + t_1^{n+1}(y^{2n+1}) f_2.$$

Расписав m получим

$$r|_{U_1} : 1 \mapsto t_1^{n+1}(1 + y^2 m'(y)) f_1 + t_1^{n+1}(y^{2n+1}) f_2,$$

где $m'(y)$ некоторый многочлен от y. Легко заметить, что на U_0 у данного сечения нет нулей, поскольку множитель у e_2 не обращается в 0 на U_0. Также легко заметить, что у сечения r нет нулей и на U_1, поскольку множитель у f_2 обращается в 0 только при $y = 0$, однако в этом случае множитель при f_1 будет t_1^{n+1}, а он не обращается в 0 на U_1. Таким образом построенное сечение не имеет нулей на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$. $\square$

4.1. Пример. Покажем, как с помощью данного сечения по 2-фильтрации расслоения построить 3-фильтрацию. То есть по матрице склейки, у которой на диагонали стоят вторые степени построить матрицу склейки с третьими степенями на диагонали. Пусть векторное расслоение E на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ задано матрицей склейки

$$\sigma = \begin{pmatrix} y^2 & ay + b + cx \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}.$$

В данном случае указанное выше сечение будет выглядеть так:

$$r|_{U_0} : 1 \mapsto t_0^3 x e_1 + t_0^3 e_2,$$
$$r|_{U_1} : 1 \mapsto t_1^3 (1 - y^2 c - y^3 b - y^4 a) f_1 + t_1^3 y^5 f_2.$$

Зададим на U_0 новый базис так, чтобы его первый вектор был $e_1' = xe_1 + e_2$. Тогда в качестве второго вектора мы можем взять $e_2' = (-1-x)e_1 - e_2$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} x & -(1+x) \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

будет матрицей перехода и $[e_1, e_2]A = [e_1', e_2']$. Аналогично поступим с U_1: в качестве нового первого базисного элемента возьмем

$$f_1' = (1 - y^2 c - y^3 b - y^4 a) f_1 + y^5 f_2.$$

Второй элемент нового базиса $f_2' = \alpha(y) f_1 + \beta(y) f_2$ так просто угадать, как это было в случае на U_0, не удастся, но его несложно построить, последовательно находя коэффициенты полиномов $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ из равенства $\det(B) = 1$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 - y^2 c - y^3 b - y^4 a & \alpha(y) \\ y^5 & \beta(y) \end{pmatrix}$$

– матрица перехода от $[f_1, f_2]$ к $[f_1', f_2']$. То есть задача свелась к задаче о дополнении столбца

$$\begin{pmatrix} 1 - y^2 c - y^3 b - y^4 a \\ y^5 \end{pmatrix}$$

до матрицы из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[y])$. Разрешимость задачи гарантирована нам невырожденностью сечения r. Тогда, последовательно вычисляя коэффициенты можем прийти к

$$\alpha(y) = -2bc - (c^3 + 2ac + b^2)y - (bc^2 + 2ab)y^2 - (a^2 + c^2 a)y^3,$$
$$\beta(y) = 1 + cy^2 + by^3 + (a + c^2)y^4.$$

Тогда матрица склейки, соответствующая базисам $[e_1', e_2']$ и $[f_1', f_2']$ будет

$$\sigma' = A^{-1}\sigma B = \begin{pmatrix} y^3 & (c^2+a)y^2 + by + c + x^2 + x^3 \\ 0 & x^3 \end{pmatrix}.$$

Список литературы

1. A. L. Smirnov, *On filtrations of vector bundles over* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$. — Arithmetic and Geometry, London Math. Soc. Lect. Note Series **420** (2015), Cambridge Univ. Press, 436–457.
2. В. М. Поляков, *Конечность числа классов векторных расслоений на* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ *с подскоками высоты* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **511** (2022), 137–160.
3. А. Л. Смирнов, *О степенях невырожденных сечений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **511** (2022), 171–180.
4. А. Л. Смирнов, С. С. Яковенко, *Построение линейной фильтрации для расслоений ранга* 2 *на* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$. — Матем. сб. **208**, No. 4 (2017), 111–128.
5. Ch. C. Hanna, *Subbundles of vector bundles on the projective line.* — J. Algebra **52**, No. 2 (1978), 322–327.

Polyakov V. M. Bundles on $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ of rank 3 and non-degenerate sections of bundles of rank 2.

A classification of rank 3 bundles with a trivial generic fiber and simple jumps is obtained. Using the resulting classification, it is proved that two bundles E and F of rank 2 with a trivial generic fiber and simple jumps with equal discriminants are stably isomorphic, that is, $E \oplus \mathcal{O} \simeq F \oplus \mathcal{O}$. In the second part of the work it is shown that for a rank 2 bundle with a trivial generic fiber there are non-degenerate sections of all degrees higher than minimal one.

С.-Петербургское
отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: polyakov@pdmi.ras.ru

Поступило 27 октября 2023 г.