

В. Г. Журавлев

САМОПОДОБИЯ И ПОДСТАНОВКИ ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

ВВЕДЕНИЕ

В [1] развита теория многомерных цепных дробей, построенная на геометрии ядерных разбиений. Универсальные ядерные разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ d -мерного пространства \mathbb{R}^d были построены в [2]. Их параметры, весовой вектор \mathbf{m} и звезда v , принадлежат дуальному пространству модулей $\Delta^d \times \Delta^d$ – прямому произведению двух d -мерных симплексов. Звезда определяет геометрию параллелепипедов T_0, T_1, \dots, T_d , из которых состоит разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, а весовой вектор задает локальные правила, периодичность и частотное распределение данных параллелепипедов в разбиении. Зная параметры \mathbf{m}, v , по локальному алгоритму (2.28) можно построить все разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$. Разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ содержат в себе ядро

$$\text{Kr} = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d$$

– центрально-симметричный многогранник, представляющим собою параллелоэдр. Отсюда происходит название *ядерные* для разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$.

Понятие ядра, по-видимому, появилось впервые в [3] при изучении одномерных разбиений Фибоначчи. Однако роль ядер была осознана после открытия и исследования фрактального разбиения Розы [4, 5].

Аппроксимациям цепными дробями на геометрическом языке соответствуют дифференцирования разбиений [6]

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) \longrightarrow \mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) \quad (0.1)$$

Дифференцирование (0.1) – это деление или дробление разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ с наследованием вершин исходного разбиения [7, 8], т.е. все вершины исходного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ содержатся в производном разбиении $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v)$. При этом периодическим цепным дробям отвечают самоподобные ядерные разбиения. В теореме 6.1 доказано следующее утверждение.

Ключевые слова: многомерные цепные дроби, полиэдральные ядерные разбиения, дефляция.

Если ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ имеет внутренние параметры \mathbf{m}, v , удовлетворяющие условиям (6.19), то

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = A\mathcal{T}(\mathbf{m}, v), \quad (0.2)$$

где A – некоторое невырожденное аффинное отображение пространства \mathbb{R}^d .

В [9] доказано равенство двух типов разбиений

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}^\Delta(\mathbf{m}, v)$$

Здесь справа стоит разбиение, полученное дефляцией разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$. Дефляция заменяет базисные многогранники, образующие разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, меньшими многогранниками – в этом основная идея многомерных приближений цепными дробями.

Основной результат для самоподобных ядерных разбиений (0.1) содержится в теореме 9.1.

В условиях теоремы 6.1 существует такая дефляция $\Delta = \Delta(\sigma_*)$, для которой выполняется формула самоподобия разбиений

$$\mathcal{T}^\Delta(\mathbf{m}, v) = A\mathcal{T}(\mathbf{m}, v),$$

где A – то же аффинное отображение, что и в равенстве (0.2).

К построению ядерных разбиений произвольной размерности d ведут два пути: 1) метод дифференцирования индуцированных торических разбиений [6] и 2) метод локальных правил [2, 10]. Другой подход, не связанный с ядерными разбиениями и использующий ступенчатые поверхности (stepped surfaces), предложен в [11, 12]. В теории чисел интерес к разбиениям обусловлен их связями с многомерными цепными дробями [1, 6, 13–15].

§1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Общая конструкция. Будут рассматриваться разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi, \Upsilon)$ пространства \mathbb{R}^{d+1} с параметрами:

$$\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots, n_d) \quad (1.1)$$

– нормаль с условием

$$|\mathbf{n}|_1 = |n_0| + |n_1| + \dots + |n_d| = 1;$$

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\} \quad (1.2)$$

– базис пространства \mathbb{R}^{d+1} , состоящий из векторов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$;

$$\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi \quad (1.3)$$

– центрирующий луч, порождаемый некоторым нормированным

$$|\pi|_1 = 1 \quad (1.4)$$

направляющим вектором $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ из \mathbb{R}^{d+1} , где \mathbb{R}_+ – множество положительных вещественных чисел;

$$\Upsilon \subset \mathbb{R}$$

– непустое подмножество.

1.2. Условия согласования параметров разбиения.

Условие 1. Весовой вектор

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = (m_0, m_1, \dots, m_d) \quad (1.5)$$

с координатами

$$m_k = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_k, \quad (1.6)$$

где $k = 0, 1, \dots, d$, содержится

$$\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+^{d+1} \quad (1.7)$$

в положительном конусе $\mathbb{R}_+^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ векторов с положительными координатами. Число

$$m = |\mathbf{m}|_1 = m_0 + m_1 + \dots + m_d \quad (1.8)$$

назовем *порядком* весового вектора (1.5). Из условия (1.7) вытекает неравенство

$$m > 0. \quad (1.9)$$

Условие 2. Центрирующий луч (1.3) содержится

$$\Pi \subset \angle^{\text{int}} \mathbf{u} \quad (1.10)$$

во внутренней $\angle^{\text{int}} \mathbf{u}$ конуса

$$\angle \mathbf{u} = \{\lambda_0 \mathbf{u}_0 + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_d \mathbf{u}_d; \lambda_k \geq 0\},$$

порождаемого векторами базиса (1.2).

1.3. Ограничение на параметры разбиения. В [7] были рассмотрены разбиения вида

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi, \Upsilon),$$

где в качестве параметра \mathbf{u} выбирался *унимодулярный базис*, т.е. базис из целочисленных векторов

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \in \mathbb{Z}^{d+1} \quad (1.11)$$

с определителем

$$\det U = \pm 1 \quad (1.12)$$

матрицы

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_d \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

строки которой – координаты векторов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$. Условия (1.11), (1.12) эквивалентны *унимодулярности*

$$U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$$

матрицы (1.13). Параметром Υ был выбран *полуинтервал*

$$\Upsilon = \Upsilon_{\mathbf{m}} = [0, m) \quad (1.14)$$

с правым концом (1.8). Из (1.9) вытекает, что полуинтервал (1.14) имеет длину

$$|\Upsilon_{\mathbf{m}}| = |\mathbf{m}|_1 = m > 0,$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$.

Замечание 1.1. В разбиении $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ параметр \mathbf{n} определяет периодичность разбиения, параметры \mathbf{u} и Π – тип многогранников, образующих разбиение.

§2. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЯДЕРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ

2.1. Ориентированный граф $\vec{\mathcal{G}}$. В пространстве \mathbb{R}^{d+1} выделим $(d+1)$ -мерный *слой*

$$\mathbb{R}_{\mathbf{n}}^{d+1} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^{d+1}; \mathbf{n} \cdot \hat{x} \in \Upsilon\},$$

где $\mathbf{n} \cdot \hat{x}$ – скалярное произведение нормали \mathbf{n} из (1.1) и \hat{x} ; Υ – полуинтервал (1.14). В свою очередь, в слое $\mathbb{R}_{\mathbf{n}}^{d+1}$ выделим *решетку*

$$\mathbb{Z}_{\mathbf{n}}^{d+1} = \mathbb{R}_{\mathbf{n}}^{d+1} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \{a \in \mathbb{Z}^{d+1}; \mathbf{n} \cdot a \in \Upsilon\} \quad (2.1)$$

точек $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ с целыми координатами a_k . Число

$$\mu_{\hat{x}} = \mathbf{n} \cdot \hat{x}$$

будем называть *весом* произвольной вещественной точки $\hat{x} \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Используя решетку (2.1), можем определить *ориентированный граф* $\vec{\mathcal{G}}$ с вершинами

$$\vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} = \mathbb{Z}_{\mathbf{n}}^{d+1}. \quad (2.2)$$

Две его вершины $a, a' \in \vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}}$ соединим *дугой* \mathbf{u}_k^{\pm} , если выполнено условие

$$a' - a = \mathbf{u}_k^{\pm}, \quad (2.3)$$

где \mathbf{u}_k^{\pm} принадлежит *симметризованной \mathbf{u} -звезде*

$$\mathbf{u}^{\pm} = \{\mathbf{u}_0^{\pm}, \mathbf{u}_1^{\pm}, \dots, \mathbf{u}_d^{\pm}\}, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{u}_k^{\pm} = \pm \mathbf{u}$, получающейся симметризацией базиса (1.2). Определенный в (2.2) и (2.3) граф $\vec{\mathcal{G}}$ назовем *\mathbf{u} -графом*.

2.2. Проекция. Зададим *проекцию*

$$\text{pr}_{\Pi}: \mathbb{R}_{\mathbf{n}}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathbf{n},0}^{d+1} \quad (2.5)$$

вдоль луча Π из (1.3), отображающую слой (2.6) на его нижнюю граничную *гиперплоскость*

$$\mathbb{R}_{\mathbf{n},0}^{d+1} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^{d+1}; \mathbf{n} \cdot \hat{x} = 0\}. \quad (2.6)$$

Теорема 2.1. *Если выполнены условия (1.7) и (1.10), то проекция (2.5) задает изоморфизм*

$$\text{pr}_{\Pi}: \vec{\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} \vec{\mathcal{G}}$$

\mathbf{u} -графа $\vec{\mathcal{G}}$, определенного в (2.2), (2.3), и его проекции

$$\vec{\mathcal{G}} = \text{pr}_{\Pi} \vec{\mathcal{G}} \quad (2.7)$$

– графа из d -мерного пространства \mathbb{R}^d , отождествляемого

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_{\mathbf{n},0}^{d+1} \quad (2.8)$$

с гиперплоскостью (2.6).

Доказательство. См. [2], теорема 2.1. □

Аналогично [15] можно доказать, что проекция

$$v = \text{pr}_{\Pi} \mathbf{u} \quad (2.9)$$

базиса \mathbf{u} на гиперплоскость $\mathbb{R}_{\mathbf{n},0}^{d+1} = \mathbb{R}^d$ образует *звезду*

$$v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}, \quad (2.10)$$

где $v_k = \text{pr}_{\Pi} \mathbf{u}_k$ для $k = 0, 1, \dots, d$.

Определение 2.1. Пусть любые $d - 1$ вектора из множества (2.10) линейно независимы, и пусть любые его два вектора v_{k_1}, v_{k_2} не принадлежат гиперплоскости, порождаемой остальными векторами из v , и лежат по отношению к ней в разных полупространствах. Тогда множество векторов v назовем *звездой*.

2.3. Звездный граф. Дополнительно к (2.10) введем *симметризованную звезду*

$$w = \{w_0, w_1, \dots, w_d\}, \quad (2.11)$$

состоящую из лучей $w_k = \pm v_k$, где v_k принадлежат звезде v , и имеющих соответственно *веса*

$$\mu w_k = \text{sign}(w_k) m_k,$$

где *знаки* $\text{sign}(w_k)$ звезд w_k определены условиями $\text{sign}(w_k) = +1$ или -1 для $w_k = +v_k$ или $w_k = -v_k$,

$$m_k = \mu \mathbf{u}_k = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_k$$

– *веса* (1.6) базисных векторов \mathbf{u}_k . По определению числа m_k также считаются *весами*

$$m_k = \mu v_k, \quad (2.12)$$

где $k = 0, 1, \dots, d$, *лучей* $v_k \in v$ звезды (2.10).

Определенный в (2.7) ориентированный граф \vec{G} имеет *вершины*

$$\vec{G}^{\text{ver}} = \{x = x(a); a \in \mathbb{Z}^{d+1}, \mu x \in \Upsilon\}. \quad (2.13)$$

При этом,

$$x = x(a) = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_d v_d \quad (2.14)$$

– точка из пространства \mathbb{R}^d с *индексом* $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ из решетки \mathbb{Z}^{d+1} ; *вес* μx точки $x = x(a)$ определен равенством

$$\mu x = a_0 \mu v_0 + a_1 \mu v_1 + \dots + a_d \mu v_d = \mu a, \quad (2.15)$$

где справа

$$\mu a = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \dots + a_d m_d \quad (2.16)$$

– вес индекса a , определяемый через веса (2.12) лучей v_k звезды v ; Υ – полуинтервал (1.14).

Вершины $x, x' \in \vec{G}^{\text{ver}}$ соединены дугой w_k – ориентированным ребром с номером $k = 0, 1, \dots, d$, если

$$x' - x = w_k \in w. \quad (2.17)$$

Здесь справа указана симметризованная звезда (2.11). Если же вершины $x = x(a)$, $x' = x'(a')$ записать в терминах индексов (2.14), то (2.17) будет эквивалентно условию

$$a' - a = \varepsilon_k^\pm \in \varepsilon^\pm,$$

при этом

$$\varepsilon^\pm = \{\varepsilon_0^\pm, \varepsilon_1^\pm, \dots, \varepsilon_d^\pm\},$$

где $\varepsilon_k^\pm = \pm \varepsilon_k$, – симметризованная единичная звезда, получающаяся симметризацией единичного базиса

$$\varepsilon_0 = (0, \dots, 0, 1), \quad \varepsilon_1 = (1, \dots, 0, 0), \quad \dots, \quad \varepsilon_d = (0, \dots, 1, 0) \quad (2.18)$$

пространства \mathbb{R}^{d+1} . Если единичным векторам ε_k придать веса

$$\mu \varepsilon_k = m_k$$

для $k = 0, 1, \dots, d$, то вес (2.16) индекса a запишется

$$\mu a = a_0 \mu \varepsilon_0 + a_1 \mu \varepsilon_1 + \dots + a_d \mu \varepsilon_d,$$

аналогично весу (2.15) вершины $x = x(a)$.

Ориентированный граф \vec{G} называется *звездным графом*. В (2.7) было приведено его глобальное определение. Локально же граф \vec{G} задается условиями (2.13) и (2.17).

2.4. Перекладывающиеся параллелоэдры. Определим для $m = 0, 1, \dots, d$ замкнутые d -мерные *параллелепипеды*

$$T_k = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \dots + \lambda_{k_d} v_{k_d}; 0 \leq \lambda_{k_i} \leq 1\}, \quad (2.19)$$

где k_1, \dots, k_d – дополнительные к k индексы в $\{0, 1, \dots, d\}$. Множество лучей v_{k_1}, \dots, v_{k_d} назовем *скелетом* параллелепипеда T_k из (2.19). Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ является звездой (2.10), то объединение

$$T = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d \quad (2.20)$$

параллелепипедов (2.19) образует *параллелоэдр* [16, 17] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} T[l] \quad (2.21)$$

с помощью параллельных переносов $T[l] = T + l$ на векторы решетки L . Причем различные многогранники $T[l]$ из (2.21) не имеют общих внутренних точек. Здесь

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d]$$

– *полная решетка* в \mathbb{R}^d с базисом l_1, \dots, l_d , т.е. векторы l_1, \dots, l_d линейно независимы на поле вещественных чисел \mathbb{R} , при этом векторы l_k определяются через лучи звезды v равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для } k = 1, \dots, d.$$

2.5. Вершины базисных параллелепипедов. Напомним, что параллелепипед T_k в (2.19) порождается векторами $v_i \in v$ с номерами i из множества

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}, \quad (2.22)$$

где $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, d\}$. Множество векторов

$$\text{Sk}_k = \{v_i; i \in \mathcal{D}_k\}$$

назовем *остовом* (skeleton) параллелепипеда T_k . Остов Sk_k порождает параллелепипед T_k и содержит наименьшее число векторов с указанным свойством.

Согласно определению (2.19) параллелепипед T_k имеет *вершины*

$$T_k^{\text{ver}} = \{v_{\mathbf{i}}; \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k\}. \quad (2.23)$$

Здесь $v_{\mathbf{i}} = v_{i_1} + \dots + v_{i_\iota}$ и $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_\iota\}$ – *мультииндекс*, являющийся произвольным подмножеством индексов из множества (2.22). При этом в (2.23) допускается пустое подмножество $\mathbf{i} = \emptyset$, когда $\iota = 0$. В данном случае полагаем $v_{\emptyset} = 0$.

Далее нам потребуется понятие *отмеченного параллелепипеда* $T_{k,\mathbf{i}}$ – это параллелепипед T_k с некоторой выделенной фиксированной его вершиной $v_{\mathbf{i}} \in T_k^{\text{ver}}$.

2.6. Графы базисных параллелепипедов. Граф $\vec{G}(T_k)$ параллелепипеда T_k – это ориентированный граф, имеющий вершины

$$\vec{G}^{\text{ver}}(T_k) = T_k^{\text{ver}}.$$

По аналогии с (2.17) вершины $v_i, v_{i'} \in T_k^{\text{ver}}$ считаются соединенными дугой w_k , если $v_{i'} - v_i = w_k \in w$. Отмеченному параллелепипеду $T_{k,i}$ отвечает граф $\vec{G}(T_{k,i})$, в котором выделена та же самая вершина $v_i \in \vec{G}^{\text{ver}}(T_k)$, что и у параллелепипеда $T_{k,i}$.

2.7. Вложения графов. Заметим, согласно (2.19), (2.13), (2.17) имеют место включения

$$T_{k,i} \subset \mathbb{R}^d, \quad \vec{G} \subset \mathbb{R}^d. \quad (2.24)$$

Учитывая (2.24), будем говорить, что граф $\vec{G}(T_{k,i})$ отмеченного параллелепипеда $T_{k,i}$ *вкладывается*

$$x : \vec{G}(T_{k,i}) \hookrightarrow \vec{G} \quad (2.25)$$

в граф \vec{G} в его вершине $x \in \vec{G}^{\text{ver}}$, если выполняется включение графов

$$\vec{G}(T_{k,i}) + (x - v_i) \subset \vec{G}.$$

Последнее означает, что $\vec{G}(T_{k,i})$ является подграфом графа \vec{G} при условии, если выделенную вершину v_i графа $\vec{G}(T_{k,i})$ параллельным сдвигом совместить с вершиной x графа \vec{G} .

2.8. Универсальные ядерные разбиения пространства \mathbb{R}^d . Обозначим через

$$X_{k,i} = \{x \in \vec{G}^{\text{ver}}; \vec{G}(T_{k,i}) \xrightarrow{x} \vec{G}\} \quad (2.26)$$

подмножество тех вершин x графа \vec{G} , в которых имеет место вложение (2.25). Пусть

$$xT_{k,i} = T_{k,i} + (x - v_i) \subset \mathbb{R}^d$$

обозначает параллелепипед, получающийся сдвигом $T_{k,i}$ на вектор $x - v_i$, где x принадлежит множеству вершин $X_{k,i} \subset \vec{G}^{\text{ver}}$ и $v_i \in T_k^{\text{ver}}$ – вершина базисного параллелепипеда T_k с мультииндексом $\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k$.

Теорема 2.2. При выполнении условий (1.7) и (1.10) имеет место разбиение

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) = \bigcup_{0 \leq k \leq d} \bigcup_{i \in \mathcal{D}_k} \bigcup_{x \in X_{k,i}} xT_{k,i} \quad (2.27)$$

пространства \mathbb{R}^d любой размерности d . Здесь \mathcal{D}_k – множество индексов (2.22) и $X_{k,i}$ – подмножество (2.26) вершин x графа \vec{G} , определенного в (2.13), (2.17). В (2.27), любые два параллелепипеда $xT_{k,i}$ и $x'T_{k',i'}$ либо совпадают либо не имеют общих внутренних точек.

Доказательство. См. [7]. \square

Замечание 2.1. Звездный граф \vec{G} строится локально по двум параметрам \mathbf{m}, v . По теореме 2.2 данный граф определяет все ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$. Тем самым, мы получаем локальный алгоритм

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbf{m},v} \quad (2.28)$$

построения разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ по его внутренним параметрам \mathbf{m}, v .

Замечание 2.2. Далее будем пространство \mathbb{R}^d называть *внутренним*, а пространство \mathbb{R}^{d+1} – *внешним*. При этом внутреннее пространство \mathbb{R}^d отождествляется (2.8) с гиперплоскостью (2.6):

$$\mathbb{R}_{\mathbf{n},0}^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

2.9. Пример двумерного ядерного разбиения. На рис. 2.1 показано двумерное ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$, параметры которого $\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi$ в данный момент не имеют значения и будут приведены в п. 9.2.

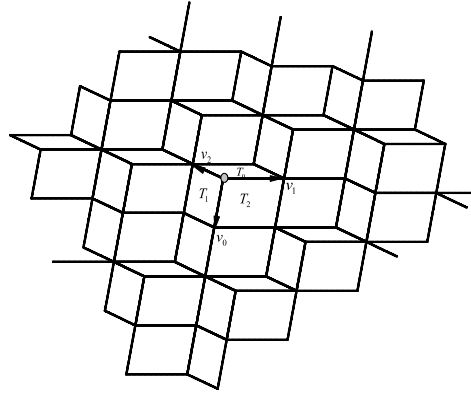


Рис. 2.1. Двумерное ядерное разбиение \mathcal{T} .

На рисунке выделены звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ и базисные параллелограммы T_0, T_1, T_2 , нумеруемые лучами звезды v и образующие ядро $\text{Ker} = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2$ разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$.

§3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЗВЕЗД И ЦЕНТРИРОВАННЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ БАЗИСОВ

3.1. Производные звезды. Обозначим Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \dots, d\}$. Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежит

$$v_\sigma \notin H_{\sigma'} \quad (3.1)$$

гиперплоскости $H_{\sigma'}$, проходящей через оставшиеся $d-1$ векторы звезды v с индексами из дополнения $\sigma' = \{k'_1, \dots, k'_{d-1}\} = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \sigma$ к сочетению σ . Тогда только одно из множеств

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \quad (3.2)$$

будет звездой (2.10). Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \quad (3.3)$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ принадлежат разным полупространствам $H_{\sigma'}^\pm$, и $v(\sigma')$ – дополнительное для $v(\sigma)$ множество векторов из звезды v .

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (3.3) гарантирована ограничением (3.1) на сумму векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$.

Определение 3.1. Обозначим через

$$v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma'),$$

то множество векторов из (3.2), которое является звездой. Если существуют звезды v^σ для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$, то будем говорить, что звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ невырождена.

Таким образом, согласно определению 3.1 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}, \quad (3.4)$$

где $v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}$, $v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$ или $v_{k_1}^\sigma = v_\sigma$, $v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$, в зависимости от выполнения условия из (3.3), и $v_{k'}^\sigma = v_{k'}$ для всех $k' \in \sigma'$.

Звезду v^σ из (3.4) назовем σ -производной невырожденной звезды v . Если нужно выделить индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ -производной использовать еще и другое развернутое обозначение

$$v^\sigma = v^{\sigma^{k_1, k_2}}.$$

3.2. Центрированный унимодулярный базис. Введем новое обозначение

$$\mathbf{u}_\Pi = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}_\Pi \quad (3.5)$$

для унимодулярного базиса \mathbf{u} (1.11), (1.12), внутри конуса которого содержится $\Pi \subset \angle^{\text{int}} \mathbf{u}$ направляющий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ (1.3). Базис \mathbf{u}_Π назовем *центрированным унимодулярным базисом* или кратко – *CU-базисом*, а луч Π – *центрирующим лучом*.

3.3. Дифференцирование центрированных базисов. Используя проекцию pr_Π из (2.5), с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u}_\Pi & \xrightarrow{\text{pr}_\Pi} & v \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ \mathbf{u}_\Pi^\sigma & \xrightarrow{\text{pr}_\Pi} & v^\sigma \end{array} \quad (3.6)$$

можно перенести операции $\sigma \in \Sigma$ дифференцирования звезд $v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma$ (3.4) на дифференцирования CU-базисов \mathbf{u}_Π .

Выясним *геометрический смысл* дифференцирований CU-базисов \mathbf{u}_Π . Пусть σ' – дополнительное сочетание к $\sigma \in \Sigma$. Обозначим через $\hat{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в \mathbb{R}^{d+1} , содержащую векторы $\mathbf{u}_{k'_j} \in \mathbf{u}_\Pi$ с индексами k'_j из σ' и луч Π . Если, допустим, для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вектор \hat{v}_{k_1} и сумма векторов $\hat{v}_{k_1} + \hat{v}_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\hat{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования

$$\mathbf{u}_\Pi \xrightarrow{\sigma} \mathbf{u}_\Pi^\sigma \quad (3.7)$$

сводится к замене вектора \mathbf{u}_{k_2} на сумму $\mathbf{u}_{k_1} + \mathbf{u}_{k_2}$.

Центрирующий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ (1.3), направленный вдоль нормированного вектора $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ из \mathbb{R}^{d+1} , назовем *иррациональным*, если выполняется условие:

$$\text{координаты } \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d \text{ линейно независимы над } \mathbb{Z}. \quad (3.8)$$

В этом определении \mathbb{Z} можно заменить полем рациональных чисел \mathbb{Q} .

В [15] доказаны следующие утверждения.

Предложение 3.1. 1. Если центрирующий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ иррациональный (3.8), то любой центрированный унимодулярный базис \mathbf{u}_Π (3.5), центрированный лучом Π , является бесконечно дифференцируемым (3.7).

2. При том же условии на луч Π , звезда $v = v_\Pi = \text{rg}_\Pi \mathbf{u}_\Pi$, где rg_Π – проекция (2.5), также будет бесконечно дифференцируемой (3.4).

Предложение 3.2. Если Π – иррациональный луч, то для любого $\sigma \in \Sigma$ производное множество векторов \mathbf{u}_Π^σ , определенное в (3.6) и (3.7), снова образует CU -базис, т.е. унимодулярный базис, центрированный лучом Π .

§4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

4.1. Первое определение производного разбиения. Для ядерного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi, \Upsilon)$ из (2.27) и любого сочетания $\sigma \in \Sigma$ полагаем

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}_\Pi^\sigma, \Pi), \quad (4.1)$$

где в правой части записано разбиение

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}_\Pi^\sigma, \Pi) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}_\Pi^\sigma, \Pi, \Upsilon_{\mathbf{m}}^\sigma).$$

При этом \mathbf{u}_Π^σ – CU -базис (3.6), (3.7);

$$\Upsilon_{\mathbf{m}}^\sigma = \Upsilon_{\mathbf{m}^\sigma} = [0, m^\sigma), \quad \text{где } m^\sigma = |\mathbf{m}^\sigma|_1,$$

– полуинтервал (1.14) для весового вектора

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_\Pi^\sigma = (m_0^\sigma, m_1^\sigma, \dots, m_d^\sigma), \quad (4.2)$$

содержащегося $\mathbf{m}^\sigma \in \mathbb{R}_+^{d+1}$ в положительном конусе \mathbb{R}_+^{d+1} , если, согласно определению производной (3.7), свойством $\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+^{d+1}$ обладал (1.7) начальный базис \mathbf{u} .

Теорема 4.1. Если центрирующий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ является иррациональным (3.8), то определенное в (4.1) множество $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ снова образует ядерное разбиение вида (2.27).

Доказательство. См. [7]. □

Множество $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ из (4.1) называется *производным ядерным разбиением*.

4.2. Внешние и внутренние параметры разбиений. Параметры $\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi$ ядерных разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ являются *внешними*. Они возникают из пространства \mathbb{R}^{d+1} , хотя сами разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ содержатся в пространстве \mathbb{R}^d .

Введем *внутренние параметры* \mathbf{m}, v , полагая

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi), \quad (4.3)$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$, $v = \text{rg}_{\Pi} \mathbf{u}$ – весовой вектор (1.5) и звезда (2.9) соответственно. Согласно *локальному алгоритму* из (2.28), для построения ядерного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ достаточно знать его внутренние параметры \mathbf{m}, v , т.е. параметры \mathbf{m}, v полностью задают разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$.

Обратный переход от внутренних параметров к внешним удобно проводить посредством *канонического подвема*:

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) \uparrow \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{e}, \Pi).$$

Здесь \mathbf{n} – нормаль, $\mathbf{m} = m\mathbf{n}$, $\mathbf{e} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ – единичный базис (2.18) пространства \mathbb{R}^{d+1} , $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi_{\mathbf{e}}$ – центрирующий луч с направляющим вектором $\pi_{\mathbf{e}} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$, определяемым типом $\mathbf{0}_v = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ (4.10) звезды v .

4.3. Второе определение производного разбиения. Используя определение производного разбиения, обозначим $\mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ или, согласно (4.1), – $\mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}_{\Pi}^{\sigma}, \Pi)$.

Теорема 4.2. В предположениях теоремы 4.1 и с обозначением (4.3) имеем равенство

$$\mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^{\sigma}, v^{\sigma}).$$

Здесь \mathbf{m}^{σ} – весовой вектор (4.2).

Доказательство. Это следует из равенства (4.1), определения (4.2) весового вектора \mathbf{m}^{σ} и формулы связи $v^{\sigma} = \text{rg}_{\Pi} \mathbf{u}_{\Pi}^{\sigma}$ между производным базисом $\mathbf{u}_{\Pi}^{\sigma}$, определенным в (3.6), (3.7), и соответствующей ему звездой. \square

4.4. Производные внутренних параметров. Зная только весовой вектор \mathbf{m} и сочетание $\sigma \in \Sigma$, нельзя определить производный вектор \mathbf{m}^{σ} . Ранее, в (4.2), было приведено внешнее определение вектора \mathbf{m}^{σ} через нормаль \mathbf{n} и центрированный базис \mathbf{u}_{Π} из *внешнего пространства* \mathbb{R}^{d+1} . Однако можно определить производные

$$(\mathbf{m}, v) \xrightarrow{\sigma} (\mathbf{m}, v)^{\sigma} = (\mathbf{m}^{\sigma}, v^{\sigma})$$

сразу для пар (\mathbf{m}, v) , где производный весовой вектор

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m}_v^\sigma = (m_0^\sigma, m_1^\sigma, \dots, m_d^\sigma)$$

определяется через производную звезду v^σ (3.4): $m_{k_1}^\sigma = m_{k_1}$, $m_{k_2}^\sigma = m_\sigma$ или $m_{k_1}^\sigma = m_\sigma$, $m_{k_2}^\sigma = m_{k_2}$, в зависимости от выполнения условия из (3.3), и $m_{k'}^\sigma = m_{k'}$ для всех $k' \in \sigma'$.

4.5. Барицентрические координаты. Согласно условию (1.10), $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi \subset \angle^{\text{int}} \mathbf{u}$. Поэтому его можно записать в виде

$$\pi = \pi'_0 \mathbf{u}_0 + \pi'_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \pi'_d \mathbf{u}_d$$

с коэффициентами $\pi'_k > 0$ для $k = 0, 1, \dots, d$. Удобно в качестве π выбрать вектор

$$\pi = \pi_0 \mathbf{u}_0 + \pi_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \pi_d \mathbf{u}_d \quad (4.4)$$

с коэффициентами

$$\pi_k = \frac{1}{\pi'_0 + \pi'_1 + \dots + \pi'_d} \pi'_k \quad (4.5)$$

и вектор отождествлять с его конечной точкой.

Пусть

$$\Delta_{\mathbf{u}} = \Delta\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\} \quad (4.6)$$

– замкнутый d -мерный симплекс, вершины которого есть концы векторов унимодулярного базиса $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ из (1.11), (1.12). Из (4.4), (4.5) следует, что точка π принадлежит симплексу (4.6) и

$$\pi_{\mathbf{u}} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d) \quad (4.7)$$

– ее *барицентрические координаты* относительно вершин симплекса, удовлетворяющие условию нормирования

$$|\pi_{\mathbf{u}}|_1 = \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_d = 1, \quad \text{где все } \pi_k > 0. \quad (4.8)$$

Как мы увидим далее, представление направляющего вектора π луча $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ через барицентрические координаты (4.7) более инвариантно, чем его представление через координаты в единичном базисе пространства \mathbb{R}^{d+1} , использованного ранее в (1.4).

4.6. Типы звезд и их эквивалентность. Действуя проекцией rg_Π из (2.5) на представление (4.4), получаем представление

$$\mathbf{0} = \pi_0 v_0 + \pi_1 v_1 + \dots + \pi_d v_d \quad (4.9)$$

для точки $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ – центра звезды v и, значит, она имеет те же барицентрические координаты

$$\mathbf{0}_v = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d), \quad (4.10)$$

что и точка π , но уже относительно звезды v или, точнее, – относительно замкнутого d -мерного симплекса $\Delta_v = \Delta\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$. Барицентрические координаты (4.10) центра звезды v назовем *типом* звезды,

$$\text{type } v = \mathbf{0}_v = \pi. \quad (4.11)$$

Будем говорить, что две звезды v и v' *аффинно эквивалентны* или, просто, *эквивалентны*

$$v \sim v', \quad (4.12)$$

если $v' = Av$ для некоторого преобразования A из группы $\text{GL}_d(\mathbb{R})$. Следующая лемма доказана в [2].

Лемма 4.1. *Имеет место равносильность $v \sim v' \Leftrightarrow \mathbf{0}_v = \mathbf{0}_{v'}$.*

4.7. Иррациональность луча и звезды. Скажем, что звезда v имеет *иррациональный* тип, если барицентрические координаты $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d$ ее центра (4.10) удовлетворяют условию:

$$\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d \text{ линейно независимы над } \mathbb{Z}. \quad (4.13)$$

Лемма 4.2. *Пусть звезда v и луч Π связаны соотношением $v = \text{rg}_\Pi \mathbf{u}$ из (2.9). Тогда свойства иррациональности звезды v и луча Π равносильны.*

Доказательство. Это следует из определений иррациональности звезды (4.13) и луча (3.8) и равенства их барицентрических координат, вытекающего из представлений (4.4), (4.9). \square

Теорема 4.3. *Если звезда v иррациональна, то ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ бесконечно дифференцируемо и*

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma). \quad (4.14)$$

Доказательство. Это следует из теоремы 4.2 и леммы 4.2. \square

Замечание 4.1. Формула (4.14) интересна тем, что дифференцирование ядерных разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, определяемых своими внутренними параметрами – весовым вектором \mathbf{m} и звездой v , – полностью осуществляется на языке тех же внутренних параметров.

4.8. Пример дифференцирования двумерного разбиения. Вернемся к разбиению $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$, изображенному на рис. 2.1 и записанному через внутренние параметры \mathbf{m}, v . Подействуем на это разбиение $\mathcal{T}^{\sigma^{2,0}}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^{\sigma^{2,0}}, v^{\sigma^{2,0}})$ дифференцированием $\sigma^{2,0}$. На рис. 4.1 изображено дифференцирование $\sigma^{2,0} : v \rightarrow v' = v^{\sigma^{2,0}}$ звезды, а на рис. 4.2 – производное разбиение $\mathcal{T}^{\sigma^{2,0}}(\mathbf{m}, v)$.

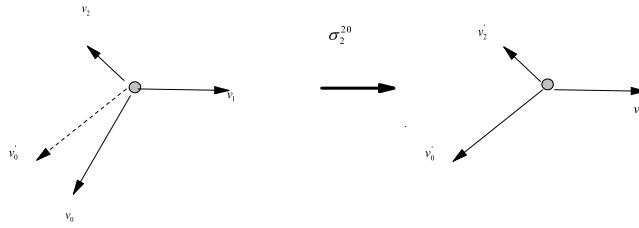


Рис. 4.1. Производная звезда $v' = v^{\sigma^{2,0}}$.

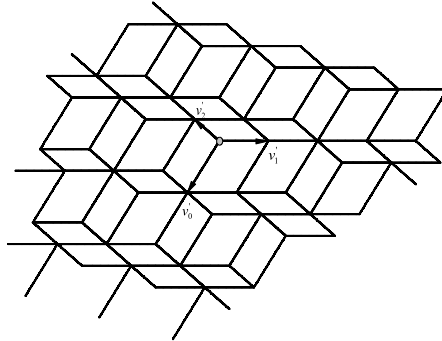


Рис. 4.2. Производное разбиение $\mathcal{T}^{\sigma^{2,0}}(\mathbf{m}, v)$.

§5. ПОЛУГРУППЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ И СПЕЦИАЛИЗАЦИЙ И ИХ МАТРИЧНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

5.1. Специализации. Заметим, что дифференцирование

$$\sigma : \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}^\sigma \tag{5.1}$$

не определено на множестве обычных базисов \mathbf{u} , а только на множестве центрированных базисов \mathbf{u}_Π из (3.5). Чтобы определить дифференцирования базисов (5.1), нужно рассмотреть *специализации*

$$\sigma_* = \sigma_{k_1}^{k_1, k_2} \quad \text{и} \quad \sigma_* = \sigma_{k_2}^{k_1, k_2} \quad (5.2)$$

дифференцирований σ , действующие

$$\sigma_* : \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u}^{\sigma_*} \quad (5.3)$$

по формуле

$$\sigma_* : \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u}^{\sigma_*} = \{\mathbf{u}_0^{\sigma_*}, \mathbf{u}_1^{\sigma_*}, \dots, \mathbf{u}_d^{\sigma_*}\} \quad (5.4)$$

где $\mathbf{u}_{k_1}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_{k_1}$ и $\mathbf{u}_{k_2}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_{k_1} + \mathbf{u}_{k_2}$ для первого случая (5.2), $\mathbf{u}_{k_1}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_{k_1} + \mathbf{u}_{k_2}$ и $\mathbf{u}_{k_2}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_{k_2}$ для второго случая (5.2), $\mathbf{u}_{k'}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_{k'}$ для всех $k' \neq k_1, k_2$. Используя (5.4) перенесем действие

$$\sigma_* : \mathbf{m} \longrightarrow \mathbf{m}^{\sigma_*} \quad (5.5)$$

также на множество весовых векторов \mathbf{m} из (1.5).

Уточним связь дифференцирования с его специализациями.

Замечание 5.1. 1. В определении (4.2) производного весового вектора \mathbf{m}^σ неявно присутствует центрирующий вектор Π в базисе \mathbf{u}_Π . Безотносительно же к базису \mathbf{u}_Π операция дифференцирования весовых векторов \mathbf{m}^σ не определена, также как и операция \mathbf{u}^σ в (5.1).

2. С другой стороны, пара $\{\sigma, \mathbf{u}_\Pi\}$ задает специализацию (5.3)

$$\{\sigma, \mathbf{u}_\Pi\} \xrightarrow{*} \sigma_* = \sigma|_{\mathbf{u}_\Pi}$$

дифференцирования σ таким образом, что $\mathbf{u}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_\Pi^\sigma$.

3. Аналогично, пара $\{\sigma, v\}$ задает специализацию

$$\{\sigma, v\} \xrightarrow{*} \sigma_* = \sigma|_v. \quad (5.6)$$

При этом, производная звезда $v^{\sigma_{**}}$ не определена для $\sigma_{**} \neq \sigma_*$. Здесь σ_* и σ_{**} – *двойственные* специализации (5.2) одного и того же дифференцирования σ .

5.2. Матрицы специализаций. Запишем базисы \mathbf{u} и весовые векторы \mathbf{m} в виде столбцов

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_d \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Тогда действия (5.3) и (5.5) специализации $\sigma_{k_1}^{k_1, k_2}$ с номерами $k_1 < k_2$ можно записать в матричном виде

$$\mathbf{u}^{\sigma_{k_1}^{k_1, k_2}} = M(\sigma_{k_1}^{k_1, k_2}) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{m}^{\sigma_{k_1}^{k_1, k_2}} = M(\sigma_{k_1}^{k_1, k_2}) \cdot \mathbf{m}, \quad (5.8)$$

где

$$M(\sigma_{k_1}^{k_1, k_2}) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_1, k_1} & 0 & 1_{k_1, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0_{k_2, k_1} & 0 & 1_{k_2, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

и

$$M(\sigma_{k_2}^{k_1, k_2}) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_1, k_1} & 0 & 0_{k_1, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 1_{k_2, k_1} & 0 & 1_{k_2, k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

– квадратные матрицы размера $d + 1$ с единичными блоками E соответствующих размеров.

5.3. Представления группы перестановок. Пусть $S = S_{d+1}$ – группа перестановок индексов $\{0, 1, \dots, d\}$. На множествах базисов $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ (1.2) и весовых векторов $\mathbf{m} = (m_0, m_1, \dots, m_d)$ (1.5) зададим действие

$$s : \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u}^s, \quad s : \mathbf{m} \longrightarrow \mathbf{m}^s \quad (5.11)$$

группы S , полагая

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^s &= (\mathbf{u}_0^s, \mathbf{u}_1^s, \dots, \mathbf{u}_d^s) = (\mathbf{u}_{s(0)}, \mathbf{u}_{s(1)}, \dots, \mathbf{u}_{s(d)}), \\ \mathbf{m}^s &= (\mathbf{m}_0^s, \mathbf{m}_1^s, \dots, \mathbf{m}_d^s) = (\mathbf{m}_{s(0)}, \mathbf{m}_{s(1)}, \dots, \mathbf{m}_{s(d)}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

для $s \in S$. Из определения $\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ следует, что действия (5.11) связаны формулой $\mathbf{m}^s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^s$, так как $\mathbf{m}_{s(k)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{s(k)}$ для $k = 0, 1, \dots, d$.

Согласно (5.11) и (5.12), действие перестановок $s \in S$ на столбцы (5.7) в матричной форме запишется как

$$\mathbf{u}^s = M(s) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{m}^s = M(s) \cdot \mathbf{m}, \quad (5.13)$$

где

$$M(s) = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & \dots & 1_{i,s(i)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

– перестановочная матрица для перестановки s .

5.4. Полугруппы дифференцирований и специализаций. Определим полугруппу

$$S\Sigma = \langle S, \Sigma \rangle \quad (5.15)$$

порожденную всеми перестановками $s \in S$ и дифференцированиями

$$\sigma : \mathbf{u}_{\Pi} \longrightarrow \mathbf{u}_{\Pi}^{\sigma}$$

(см. (3.7)) для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ . Аналогично определим полугруппу

$$S\Sigma_* = \langle S, \Sigma_* \rangle, \quad (5.16)$$

заменяя дифференцирования в (5.15) специализациями σ_* из (5.2). Назовем $S\Sigma$ полугруппой дифференцирований, а $S\Sigma_*$ – полугруппой специализаций.

Пусть $\sigma_* = \sigma_{*k} \cdot \dots \cdot \sigma_{*1}$ принадлежит полугруппе $S\Sigma_*$, где σ_{*i} – некоторая перестановка или специализация. Тогда, используя представления (5.3) и (5.11), по определению полагаем

$$\mathbf{u}^{\sigma_*} = ((\mathbf{u}^{\sigma_{*1}}) \dots)^{\sigma_{*k}}. \quad (5.17)$$

Предложение 5.1. Для $\sigma_* = \sigma_{*k} \cdot \dots \cdot \sigma_{*1}$ из полугруппы $S\Sigma_*$ определим матрицу

$$M(\sigma_*) = M(\sigma_{*k}) \cdot \dots \cdot M(\sigma_{*1}), \quad (5.18)$$

где $M(\sigma_{*i})$ – матрица (5.14), если σ_{*i} – перестановка, и $M(\sigma_{*i})$ – матрица (5.9) или (5.10), если σ_{*i} – специализация. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Действия (5.11) в матричной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\sigma_*} &= M(\sigma_*)\mathbf{u} = M(\sigma_{*k}) \cdot (\dots \cdot (M(\sigma_{*1})\mathbf{u})), \\ \mathbf{m}^{\sigma_*} &= M(\sigma_*)\mathbf{m} = M(\sigma_{*k}) \cdot (\dots \cdot (M(\sigma_{*1})\mathbf{m})), \end{aligned} \quad (5.19)$$

где \mathbf{u} – унимодулярный базис (1.11), \mathbf{m} – весовой вектор (1.5).

2. Определенная в (5.16) полугруппа специализаций $S\Sigma_*$ в матричном представлении (5.18) состоит из неотрицательных унимодулярных матриц, т.е. матриц с целыми неотрицательными коэффициентами и определителем ± 1 .

Доказательство. Равенства (5.19) вытекают из определения (5.17) и формул (5.8), (5.13). Второе утверждение следует из представлений (5.9), (5.10) и (5.14) матриц, входящих в произведение (5.18). \square

§6. САМОПОДОБИЕ ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

6.1. Собственные весовой и направляющий векторы. Для весового вектора

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}, \quad (6.1)$$

где весовой вектор \mathbf{m} и базис \mathbf{u} записаны в виде столбцов (5.7), и для специализации $\sigma_* = \sigma_{*k} \cdot \dots \cdot \sigma_{*1}$ из полугруппы $S\Sigma_*$ имеем $\mathbf{m}^{\sigma_*} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{\sigma_*}$. На матрицах $M = M(\sigma_*)$ из (5.18) данное равенство примет вид $M\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot M\mathbf{u}$.

Начиная с этого места, будем рассматривать только (правые) собственные весовые векторы

$$M\mathbf{m} = \lambda_{\mathbf{m}}\mathbf{m}. \quad (6.2)$$

Пусть будет дан такой вектор \mathbf{m} . Вычислим нормаль \mathbf{n} с условием (6.1). Если воспользуемся унимодулярной матрицей U из (1.13), то равенство $\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ будет эквивалентно системе линейных уравнений

$$U \cdot \begin{pmatrix} n_0 \\ \vdots \\ n_d \end{pmatrix} = \mathbf{m}$$

или, в обозначениях (1.1), – системе $U \cdot \mathbf{n}^t = \mathbf{m}$. Отсюда находим нормаль $\mathbf{n} = \mathbf{m}^t \cdot U^*$, где использовали сокращение $U^* = (U^{-1})^*$. В частности, имеем $\mathbf{n} = \mathbf{m}^t$ в случае единичного базиса $\mathbf{u} = \mathbf{e}$, так как в этом случае $U = E$ – единичная матрица.

Разложим по базису \mathbf{u} направляющий вектор

$$\pi = \pi \cdot \mathbf{u}. \quad (6.3)$$

Здесь справа вектор π записан в виде строки $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$. Найдем его координаты $\pi = \pi^{\sigma_*} \cdot \mathbf{u}^{\sigma_*}$ в базисе \mathbf{u}^{σ_*} . Подставляя $\mathbf{u}^{\sigma_*} = M\mathbf{u}$, записываем

$$\pi = \pi^{\sigma_*} \cdot M\mathbf{u} = (\pi^{\sigma_*} M) \cdot \mathbf{u}.$$

Отсюда и из (6.3) следует $\pi^{\sigma_*} M = \pi$. Таким образом приходим к нужной формуле

$$\pi^{\sigma_*} = \pi M^{-1}.$$

Кроме весовых векторов (6.2) потребуем, чтобы одновременно и направляющий вектор π был (левым) собственным вектором

$$\pi M = \lambda_\pi \pi. \quad (6.4)$$

Предложение 6.1. *Если $\sigma_* \in \Sigma_* \setminus S$ и $M = M(\sigma_*)$ матрица (5.18), то*

$$\lambda \geq 1, \quad (6.5)$$

где λ – собственное значение из (6.4) или (6.2).

Доказательство. Координаты вектора $M\mathbf{m}$ положительны, а их сумма строго больше суммы координат вектора \mathbf{m} , что следует из условия $\sigma_* \in \Sigma_* \setminus S$ и предложения 5.1. Аналогично, сумма координат вектора $M(\sigma_*)\pi$ больше суммы координат вектора π . Отсюда и из (6.4), (6.2) вытекает неравенство (6.5). \square

6.2. Собственные звезды.

Предложение 6.2. *Пусть*

$$v = v_\pi = \text{pr}_{\Pi} \mathbf{u} \quad (6.6)$$

– звезда (2.9) для унимодулярного базиса \mathbf{u} ; σ – дифференцирование из полугруппы $S\Sigma$ (5.15); $\sigma_* = \sigma|_v$ – специализация (5.6) дифференцирования σ звездой v ; и пусть, кроме того, направляющий вектор π луча Π (1.3) является собственным $\pi^{\sigma_*} = \lambda\pi$ относительно специализации σ_* . Тогда

$$v_\pi^\sigma = Av_\pi \quad (6.7)$$

или, кратко,

$$v^\sigma = Av, \quad (6.8)$$

где

$$A = A(\sigma_*, \lambda, \pi) \quad (6.9)$$

– невырожденное аффинное отображение пространства \mathbb{R}^d .

Доказательство. Из (4.11) следует, что звезда $v = v_\pi$ имеет тип

$$\text{type } v_\pi = \pi. \quad (6.10)$$

Используя (5.6) и (6.10), записываем

$$v^\sigma = v_\pi^\sigma = v_\pi^{\sigma_*} \sim v_{\pi_1^{\sigma_*}}. \quad (6.11)$$

Здесь направляющий вектор π^{σ_*} заменен вектором, нормированным

$$\pi_1^{\sigma_*} = \frac{1}{|\pi^{\sigma_*}|_1} \pi^{\sigma_*}$$

относительно 1-нормы $|\ast|_1$ (1.4).

Поскольку $|\pi^{\sigma\ast}|_1 = \lambda$, так как по условию $\pi^{\sigma\ast} = \lambda\pi$ и собственное значение $\lambda \geq 1$ согласно предложению 6.1,

$$\pi_1^{\sigma\ast} = \pi.$$

Из этого равенства, (6.10) и (6.11) вытекает эквивалентность

$$v^\sigma = v_\pi^\sigma \sim v_\pi = v \quad (6.12)$$

дифференцированной звезды v^σ и исходной v . Применяя к (6.12) лемму 4.1, выводим формулы (6.7) и (6.8). \square

6.3. Вычисление матрицы $A(\sigma_\ast, \lambda, \pi)$. Используя (6.6) и (5.19), записываем

$$v_\pi^\sigma = \text{pr}_\Pi \mathbf{u}^{\sigma\ast} \quad (6.13)$$

и

$$\mathbf{u}^{\sigma\ast} = M(\sigma_\ast)\mathbf{u}. \quad (6.14)$$

Из (6.13) и (6.14) следует

$$v_\pi^\sigma = \text{pr}_\Pi M(\sigma_\ast)\mathbf{u} = M(\sigma_\ast) \text{pr}_\Pi \mathbf{u}.$$

Отсюда и (6.6) вытекает

$$v_\pi^\sigma = M(\sigma_\ast) v_\pi, \quad (6.15)$$

где звезды v_π^σ и v_π записаны в виде столбцов

$$v_\pi^\sigma = \begin{pmatrix} v_0^\sigma \\ v_1^\sigma \\ \vdots \\ v_d^\sigma \end{pmatrix}, \quad v_\pi = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$$

и

$$M(\sigma_\ast) = \begin{pmatrix} m_{00}^{\sigma\ast} & m_{01}^{\sigma\ast} & \dots & m_{0d}^{\sigma\ast} \\ m_{10}^{\sigma\ast} & m_{11}^{\sigma\ast} & \dots & m_{1d}^{\sigma\ast} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{d0}^{\sigma\ast} & m_{d1}^{\sigma\ast} & \dots & m_{dd}^{\sigma\ast} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

– унимодулярная матрица размера $(d+1) \times (d+1)$.

Матрицу $A(\sigma_\ast, \lambda, \pi)$ аффинного отображения в формуле (6.9) будем искать в базисе $\{v_1, \dots, v_d\}$.

Предложение 6.3. Пусть звезда v имеет иррациональный тип, т.е. определенный равенством (4.4) направляющий вектор

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$$

иррационален (4.13), и пусть выполнены условия предложения 6.2.

Тогда аффинное отображение $A(\sigma_*, \lambda, \pi)$ из (6.9) имеет следующее матричное представление в базисе $\{v_1, \dots, v_d\}$:

$$A(\sigma_*, \lambda, \pi) = M(\sigma_*)_{\square} - D(\sigma_*) \cdot \mathbf{1}_{d \times d} \cdot D(\pi), \quad (6.17)$$

где

$$M(\sigma_*)_{\square} = \begin{pmatrix} m_{11}^{\sigma_*} & \dots & m_{1d}^{\sigma_*} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{d1}^{\sigma_*} & \dots & m_{dd}^{\sigma_*} \end{pmatrix}$$

– нижний $(d \times d)$ -блок матрицы (6.16);

$$D(\sigma_*) = \begin{pmatrix} m_{10}^{\sigma_*} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{20}^{\sigma_*} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{d0}^{\sigma_*} \end{pmatrix}$$

и

$$D(\pi) = \begin{pmatrix} \pi_1/\pi_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi_2/\pi_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \pi_d/\pi_0 \end{pmatrix}$$

– диагональные матрицы;

$$\mathbf{1}_{d \times d} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

– $(d \times d)$ -матрица, состоящая из одних единиц.

Доказательство. Из условия иррациональности (4.13) направляющего вектора $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ следует $\pi_0 \neq 0$. Из (4.9) следует

$$v_0 = -\frac{\pi_1}{\pi_0} v_1 - \dots - \frac{\pi_d}{\pi_0} v_d. \quad (6.18)$$

Подставляя в формулу (6.15) вместо луча v_0 его представление (6.18) и, затем, используя явный вид (6.16) матрицы $M(\sigma_*)$, выводим формулу (6.17). \square

Замечание 6.1. Множество характеристических корней матрицы $A(\sigma_*, \lambda, \pi)$ совпадает с множеством корней унимодулярной матрицы $M(\sigma_*)$ (6.16), исключая вещественный корень λ , поскольку аффинные преобразования с такими матрицами связаны проекцией (6.13).

6.4. Теорема о самоподобии разбиений.

Теорема 6.1. Пусть $v = v_\pi$ – звезда (2.9), $\sigma_* = \sigma|_v$ – специализация (5.6) дифференцирования $\sigma \in S\Sigma$ звездой v ; и пусть

$$\pi^{\sigma_*} = \lambda_\pi \pi, \quad \mathbf{m}^{\sigma_*} = \lambda_{\mathbf{m}} \mathbf{m}, \quad (6.19)$$

где \mathbf{m} – собственный весовой вектор (1.5). Если ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ имеет внутренние параметры \mathbf{m}, v , удовлетворяющие условиям (6.19), то справедлива формула

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = A(\sigma_*, \lambda, \pi) \mathcal{T}(\mathbf{m}, v), \quad (6.20)$$

где $A(\sigma_*, \lambda, \pi)$ – аффинное отображение из (6.9).

Доказательство. Используя теорему 4.2, записываем

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma), \quad (6.21)$$

где $\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m}^{\sigma_*} = \lambda_{\mathbf{m}} \mathbf{m}$, по (6.19), и

$$v^\sigma = v_\pi^\sigma = A(\sigma_*, \lambda, \pi) v_\pi = A(\sigma_*, \lambda, \pi) v \quad (6.22)$$

по (6.7). Так как, согласно предложению 6.1, $\lambda_{\mathbf{m}} \geq 1$, имеет место равенство

$$\mathbf{m}_1^\sigma = \frac{1}{|\mathbf{m}^\sigma|_1} \mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m} \quad (6.23)$$

нормированных векторов \mathbf{m}_1^σ и \mathbf{m} . Подставляя (6.22) и (6.23) в равенство (6.21), получаем

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma) = \mathcal{T}(\mathbf{m}, A(\sigma_*, \lambda, \pi) v) = A(\sigma_*, \lambda, \pi) \mathcal{T}(\mathbf{m}, v),$$

что доказывает формулу (6.20). \square

§7. ДЕФЛЯЦИЯ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

7.1. Лучи. Пусть $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, d\}$ – множество индексов из $d + 1$ элемента; $\sigma = \{0, 1\}$ – сочетание из двух фиксированных элементов $0, 1$; $\sigma' = \mathcal{D} \setminus \sigma$ – дополнение σ в \mathcal{D} из $d' = d - 1$ элемента и $\sigma'' \subset \sigma'$ – любое множество из $d'' = d - 2$ элементов.

Определим следующие лучи:

v_0, v_1 – связанные лучи, т.е. лучи звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, отвечающие сочетанию σ ;

v_0 – исчезающий луч;

v_1 – остающийся луч (доминантный луч);

v_k для $k \in \sigma'$ – свободные лучи;

$v_0 = v_0 + v_1$ – новый луч производной звезды $v^\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$.

7.2. Параллелепипеды. Определим для $k = 0, 1, \dots, d$ замкнутые d -мерные параллелепипеды

$$T_k = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \dots + \lambda_{k_d} v_{k_d}; 0 \leq \lambda_{k_i} \leq 1\}, \quad (7.1)$$

где k_1, \dots, k_d – индексы из дополнения $\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}$. Множество лучей v_{k_1}, \dots, v_{k_d} назовем *остовом* параллелепипеда T_k .

7.3. Ядро. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ является звездой (2.10), то объединение

$$T = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d \quad (7.2)$$

параллелепипедов (7.1) образует *ядро*.

7.4. Производное ядро. Пусть

$$v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\} \quad (7.3)$$

– производная звезда (3.4) для произвольного $\sigma \subset \mathcal{D}$. Определим *производное ядро*

$$T^\sigma = T_0^\sigma \cup T_1^\sigma \cup \dots \cup T_d^\sigma, \quad (7.4)$$

составленное из производных параллелепипедов

$$T_k^\sigma = \{\lambda_{k_1} v_{k_1}^\sigma + \dots + \lambda_{k_d} v_{k_d}^\sigma; 0 \leq \lambda_{k_i} \leq 1\},$$

аналогичных параллелепипедам (7.1). По условию, луч v_0 исчезающий, а луч v_1 остающийся, т.е. является доминантным лучом. Поэтому, согласно определению (3.4), производная звезда (7.3) примет вид

$$v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\} = \{v_0 + v_1, v_1, \dots, v_d\} \quad (7.5)$$

для $\sigma = \{0, 1\}$.

7.5. Производные параллелепипеды. Опишем параллелепипеды из производного ядра T^σ (7.4) для сочетания $\sigma = \{0, 1\}$. Всего параллелепипедов $d + 1$.

$T_{\sigma',1}^\sigma$ – параллелепипед с остовом $v_{\sigma',1} = \{v_{\sigma'}, v_1\}$;

$T_{\sigma',0}^\sigma$ – параллелепипед с остовом $v_{\sigma',0} = \{v_{\sigma'}, v_0\}$, где $v_{\sigma'}$ – множество лучей v_k с индексами $k \in \sigma'$;

$T_{\sigma'',0,1}^\sigma$ – параллелепипеды с остовами $v_{\sigma'',0,1} = \{v_{\sigma''}, v_0, v_1\}$, где $v_{\sigma''}$ – множество лучей v_k с индексами $k \in \sigma''$, при этом σ'' пробегает все $(d - 2)$ -подмножества из σ' . Последних параллелепипедов $d - 1$.

Характеристики производных параллелепипедов:

$T_0^\sigma = T_{\sigma',1}^\sigma$ – неменяющийся параллелепипед;

$T_1^\sigma = T_{\sigma',0}^\sigma$ – *компенсирующий* параллелепипед с уменьшенным объемом;

$T_k^\sigma = T_{\sigma'',0,1}^\sigma$ – *деформирующиеся* параллелепипеды, сохраняющие объем.

7.6. Исходные параллелепипеды. Новые обозначения. Теперь опишем параллелепипеды исходного ядра T (7.2). Всего параллелепипедов $d + 1$. Они делятся на *три типа*:

$T_0 = T_{\sigma',1}$ – параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma'}, v_1\}$;

$T_1 = T_{\sigma',0}$ – параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma'}, v_0\}$;

$T_k = T_{\sigma'',0,1}$, где k из дополнения $\sigma' = \mathcal{D} \setminus \sigma$, т.е. $k \neq 0, 1$, – параллелепипеды с остовами $\{v_{\sigma''}, v_0, v_1\}$.

7.7. Подстановки. Зададим Δ – подстановку (substitution), действующую на параллелепипеды T_0 , T_1 и T_k с $k \neq 0, 1$, соответственно, специализациями Δ_0 , Δ_1 и Δ_k :

$$T_0 = T_{\sigma',1} \xrightarrow{\Delta_0} T_{\sigma',1}; \quad (7.6)$$

$$T_1 = T_{\sigma',0} \xrightarrow{\Delta_1} T_{\sigma',0} \cup (T_0 + v_0); \quad (7.7)$$

$$T_k = T_{\sigma'',0,1} \xrightarrow{\Delta_k} T_{\sigma'',0,1}. \quad (7.8)$$

7.8. Орбиты производного разбиения. Если звезда v невырожденная, то по теореме 2.3 из [9] любая производная развертка

$$T^\sigma = T(v^\sigma) = T_0^\sigma \cup T_1^\sigma \cup \dots \cup T_d^\sigma$$

снова вкладывается $T^\sigma = T(v^\sigma) \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_L^d$ в тот же тор \mathbb{T}_L^d , но уже с производным весовым вектором

$$\mathbf{m}^\sigma = (m_0^\sigma, m_1^\sigma, \dots, m_d^\sigma) = (m_0 + m_1, m_1, \dots, m_d)$$

для подстановки $\sigma = \{0, 1\}$ в согласии с формулой (7.5).

7.9. Подстановки в исходных обозначениях. Перечислим эти подстановки:

$$T_0 = T_{\sigma',1} \xrightarrow{\Delta_0} T_{\sigma',1} = T_0^\sigma, \quad (7.9)$$

$$T_1 = T_{\sigma',0} \xrightarrow{\Delta_1} T_{\sigma',0} \cup (T_0 + v_0) = T_1^\sigma \cup (T_0^\sigma + v_0), \quad (7.10)$$

$$T_k = T_{\sigma'',0,1} \xrightarrow{\Delta_k} T_{\sigma'',0,1} = T_k^\sigma \quad \text{для } k \neq 0, 1. \quad (7.11)$$

7.10. Подстановки орбит.

Теорема 7.1. Для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$ существует отображение

$$\sigma \rightarrow \Delta = \Delta(\sigma) \quad (7.12)$$

в множество подстановок Δ вида (7.6)–(7.8) такое, что определенное в (4.3) ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ тора \mathbb{T}_L^d для невырожденной звезды v переводится

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma) \quad (7.13)$$

подстановкой Δ в производное ядерное разбиение $\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma)$, порождаемое производной звездой v^σ (3.4).

Доказательство. См. [9]. □

§8. ГЕОМЕТРИЯ ПОДСТАНОВОК ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

8.1. Косые сдвиги. Выясним геометрический смысл подстановок параллелепипедов (7.9)–(7.11). Подстановка (7.9) тождественная:

$$T_0 \xrightarrow{\Delta_0} T_0^\sigma = T_0.$$

Рассмотрим подстановки (7.11). По определению, $T_k = T_{\sigma'',0,1}$ — d -мерные параллелепипеды с остовами $\{v_{\sigma''}, v_0, v_1\}$. За основание (*base*) $T_k(v_{\sigma''}, v_1)$ параллелепипеда T_k выберем $(d-1)$ -мерный параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma''}, v_1\}$. Представим параллелепипед T_k через сумму Минковского

$$T_k = T_{\sigma'',0,1} = T_k(v_{\sigma''}, v_1) \dot{+} v_0.$$

Также запишем и производный параллелепипед,

$$T_k^\sigma = T_{\sigma'', \mathbf{0}, 1} = T_k(v_{\sigma''}, v_1) \dot{+} v_0,$$

где нулевой луч v_0 производной звезды v^σ имеет вид $v_0 = v_0 + v_1$. Следовательно, преобразование Δ_k с $k \neq 0, 1$ есть не что иное, как *косой сдвиг* верхнего основания $T_k(v_{\sigma''}, v_1) + v_0$ вдоль вектора v_1 , принадлежащего нижнему основанию $T_k(v_{\sigma''}, v_1)$. Поэтому преобразования косого сдвига Δ_k для $k \neq 0, 1$ сохраняют объем параллелепипедов

$$\text{vol } T_k^\sigma = \text{vol } T_k. \quad (8.1)$$

Более сложной оказалась подстановка (7.10):

$$T_1 = T_{\sigma', 0} \xrightarrow{\Delta_1} T_{\sigma', \mathbf{0}} \cup (T_0 + v_0) = T_1^\sigma \cup (T_0 + v_0). \quad (8.2)$$

Рассмотрим *сужение* Δ_1^- отображения Δ_1 :

$$T_1 = T_{\sigma', 0} \xrightarrow{\Delta_1^-} T_1^\sigma = T_{\sigma', \mathbf{0}}. \quad (8.3)$$

Вернемся к гиперплоскости $H_{\sigma'}$, проходящей через $d-1$ вектор звезды v с индексами из дополнения $\sigma' = \mathcal{D} \setminus \sigma$ к сочетению $\sigma = \{0, 1\}$. Пусть, для определенности, луч v_0 принадлежит полупространству $H_{\sigma'}^+$, другой луч v_1 – полупространству $H_{\sigma'}^-$. По соглашению, v_0 – исчезающий луч, а v_1 – остающийся (доминантный) луч. Поэтому новый луч $v_0 = v_0 + v_1$ производной звезды v^σ будет принадлежать тому же полупространству, что и исчезающий луч v_0 . Итак, имеем

$$v_0 \in H_{\sigma'}^+, \quad v_0 \in H_{\sigma'}^+, \quad v_1 \in H_{\sigma'}^-. \quad (8.4)$$

В качестве *основания* $T_1(v_{\sigma'})$ параллелепипеда T_1 выберем $(d-1)$ -мерный параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma'}\}$. Имеем

$$T_1 = T_{\sigma', 0} = T_1(v_{\sigma'}) \dot{+} v_0; \quad (8.5)$$

$$T_1^\sigma = T_{\sigma', \mathbf{0}} = T_1(v_{\sigma'}) \dot{+} v_0 = T_1(v_{\sigma'}) \dot{+} (v_0 + v_1). \quad (8.6)$$

Из представлений (8.5), (8.6) и включений (8.4) следует неравенство

$$\text{vol } T_1^\sigma = \text{vol } \Delta_1^- T_1 < \text{vol } T_1.$$

Таким образом, сужение (8.3) отображения Δ_1 представляет собою *сжимающий* косой сдвиг $T_1 \xrightarrow{\Delta_1^-} T_1^\sigma$.

8.2. Складки. Сдвинутый параллелепипед из (8.2) представим суммой Минковского

$$T_0 + v_0 = (T_1(v_{\sigma'}) + v_1) + v_0 = (T_1(v_{\sigma'}) + v_0) + v_1, \quad (8.7)$$

где $T_1(v_{\sigma'}) + v_0$ – второе основание параллелепипеда $T_1 = T_{\sigma',0}$ (8.5). Рассмотрим сдвоенный невыпуклый многогранник

$$\Delta T_1 = T_1^\sigma \cup (T_0 + v_0) = T_{\sigma',0} \cup (T_0 + v_0), \quad (8.8)$$

который из-за его формы назовем \vee -*складкой* (\vee -fold). Введем для нее обозначение

$$T_1^\sigma \vee (T_0 + v_0) = T_1^\sigma \cup (T_0 + v_0). \quad (8.9)$$

Многогранник (8.8) составлен из двух параллелепипедов T_1^σ и $T_0 + v_0$ с общей $(d-1)$ -мерной гранью $T_1^\sigma \cap (T_0 + v_0) = T_1(v_{\sigma'}) + v_0$. Поскольку $T_1(v_{\sigma'})$ и $T_1(v_{\sigma'}) + v_0$ – противоположные грани параллелепипеда T_1 , из (8.5), (8.6) и (8.7), (8.8) следует формула

$$\text{vol } \Delta T_1 = \text{vol } T_1^\sigma + \text{vol } T_0 \quad (8.10)$$

для объема складки ΔT_1 (8.8) – образа параллелепипеда T_1 при подстановке $\Delta = \Delta_1$ (8.2). Из (8.8) и (8.10) получаем инвариантность

$$\text{vol } \Delta T_1 = \text{vol } T_1$$

объема параллелепипеда T_1 при том же преобразовании $\Delta = \Delta_1$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Предложение 8.1. 1. *Определенная в (7.9)–(7.11) подстановка параллелепипедов*

$$T_k \xrightarrow{\Delta} T_k^\sigma$$

имеет следующий геометрический смысл: $\Delta = \Delta_0$ – тождественное отображение; $\Delta = \Delta_1^-$ – сжимающий косой сдвиг; $\Delta = \Delta_k$ – простой косой сдвиг для всех $k \neq 0, 1$.

2. *Отображение \vee -складки*

$$T_1 \xrightarrow{\Delta} \Delta T_1 = T_1^\sigma \vee (T_0 + v_0) \quad (8.11)$$

сохраняет объем (8.10).

3. *Ядро $\text{K}\Gamma = T = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d$ разбиения \mathcal{T} (2.20) при подстановке $\text{K}\Gamma \xrightarrow{\Delta} \Delta \text{K}\Gamma$ сохраняет объем $\text{vol } \Delta \text{K}\Gamma = \text{vol } \text{K}\Gamma$.*

8.3. Дефляция ядерных разбиений. Пусть Δ – подстановка (7.6)–(7.8) на множестве параллелепипедов T_0, T_1, \dots, T_d и

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{T}^\Delta(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) \tag{8.12}$$

– отображение (7.13) на множестве ядерных разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ из теоремы 7.1. По предложению 8.1 отображения $T_k \xrightarrow{\Delta} T_k^\sigma$ ($k = 0, 1, \dots, d$) или сохраняют объемы параллелепипедов, или уменьшают. При этом недостающий объем всего исходного разбиения \mathcal{T} восполняется (8.11) через образование \vee -складок $T_1^\sigma \vee (T_0 + v_0)$ в преобразованном разбиении \mathcal{T}^Δ или, иначе, – через добавление в \mathcal{T}^Δ новых параллелепипедов вида T_0 .

Таким образом, в результате преобразования $\mathcal{T} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{T}^\Delta$ разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ в нем в среднем происходит уменьшение объемов образующих его параллелепипедов T_k . По этой причине преобразование (8.12) называется *дефляцией* разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$.

8.4. Дефляция двумерного ядерного разбиения. Покажем, как выглядит дефляция на примере разбиений, изображенных на рис. 8.1–8.5. Начинать нужно с подстановки базисных параллелограммов

$$\sigma^{2,0} : \begin{array}{ccc} T_0 & T_1 & T_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ T'_0 & T'_1 & T'_2 \end{array} \tag{8.13}$$

показанной на рис. 8.1.

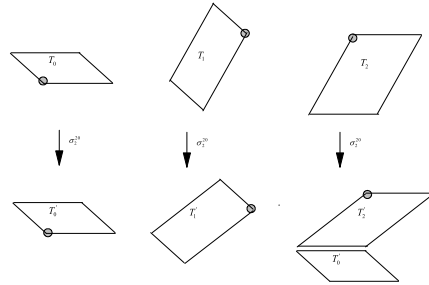


Рис. 8.1. Подстановка базисных параллелограммов $T_k \rightarrow T'_k$ для $k = 0, 1, 2$.

Затем подстановки базисных параллелограммов (8.13), учитывая выделенные вершины, осуществляем на всех параллелограммах разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$. Получаем дефляцию, изображенную на рис. 8.2.

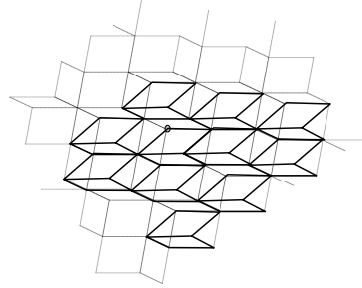


Рис. 8.2. Подстановка параллелограммов и дефляция разбиения $\mathcal{T}^\Delta(\mathbf{m}, v)$.

8.5. Композиция подстановок и дефляция двумерных разбиений. Для иллюстрации основной теоремы 9.1 нам потребуется композиция дифференцирований $\sigma^{2,1} * \sigma^{2,0}$. На рис. 8.3 показано действие этой композиции на базисные параллелограммы. Как выглядит действие композиции на все параллелограммы разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, изображенного на рис. 2.1, показано на рис. 8.4.

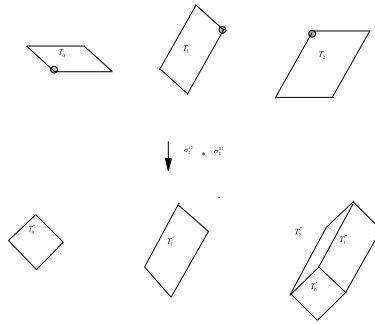


Рис. 8.3. Композиция подстановок базисных параллелограммов $T_k \rightarrow T'_k$ для $k = 0, 1, 2$.

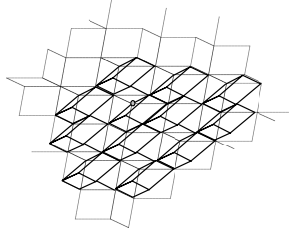


Рис. 8.4. Двукратная дефляция $\mathcal{T}^\Delta(\mathbf{m}, v)$ разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$.

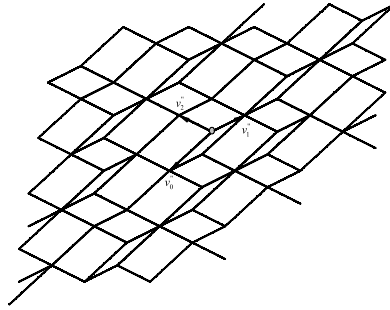


Рис. 8.5. Двойное дифференцирование ядерного разбиения $\mathcal{T}^{\sigma^{2,1} * \sigma^{2,0}}(\mathbf{m}, v)$.

Если применить двойное дифференцирование

$$(\mathcal{T}^{\sigma^{2,0}}(\mathbf{m}, v))^{\sigma^{2,1}} = \mathcal{T}^{\sigma^{2,0} * \sigma^{2,1}}(\mathbf{m}, v) \quad (8.14)$$

начального разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ и сравнить разбиения на рис. 8.4 и рис. 8.5, то получим формулу

$$\mathcal{T}^\Delta(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}^{\sigma^{2,0} * \sigma^{2,1}}(\mathbf{m}, v).$$

§9. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

9.1. Формулировка основной теоремы. Определим действия произвольного произведения дифференцирований $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$ из полугруппы $S\Sigma$, полагая

$$\mathcal{T}^\sigma = ((\mathcal{T}^{\sigma_1}) \dots)^{\sigma_k}$$

для разбиений $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ и соответственно

$$\mathcal{T}^{\Delta(\sigma)} = ((\mathcal{T}^{\Delta(\sigma_1)}) \dots)^{\Delta(\sigma_k)} \quad (9.1)$$

для подстановок (7.12). Чтобы перенести данные действия

$$\mathbf{u}^{\sigma_*} = ((\mathbf{u}^{\sigma_{*1}}) \dots)^{\sigma_{*k}}, \quad \mathbf{m}^{\sigma_*} = ((\mathbf{m}^{\sigma_{*1}}) \dots)^{\sigma_{*k}} \quad (9.2)$$

на базисы \mathbf{u} и весовые векторы \mathbf{m} , нужно использовать звезду v разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ и затем перейти по правилу (5.6) от дифференцирования σ к его специализации $\sigma_* = \sigma_{*1} \cdot \dots \cdot \sigma_{*k}$ из полугруппы $S\Sigma_*$. Действие (9.2) на матрицах (5.9), (5.10) и (5.14) осуществляется по формулам (5.19).

Теорема 9.1. *В условиях теоремы 6.1 выполняется формула самоподобия разбиений*

$$\mathcal{T}^{\Delta(\sigma_*)}(\mathbf{m}, v) = A(\sigma_*, \lambda, \pi) \mathcal{T}(\mathbf{m}, v), \quad (9.3)$$

где $\mathcal{T}^{\Delta(\sigma_*)}(\mathbf{m}, v)$ – разбиение, получаемое подстановкой (9.1) из $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, и $A(\sigma_*, \lambda, \pi)$ – аффинное отображение из (6.9) и (6.20).

Доказательство. Это следует из равенств

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = A(\sigma) \mathcal{T}(\mathbf{m}, v), \quad \mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}^{\Delta(\sigma_*)}(\mathbf{m}, v),$$

доказанных в теоремах 6.1 и 7.1. \square

9.2. Самоподобие двумерных разбиений. Покажем, как формула (9.3) выполняется на примере двумерного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, изображенного на рис. 2.1. Для этого к дифференцированиям (8.14) добавим еще

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) \xrightarrow{\sigma^{2,0}} \mathcal{T}^{\sigma^{2,0}}(\mathbf{m}, v) \xrightarrow{\sigma^{2,1}} \mathcal{T}^{\sigma^{2,0} * \sigma^{2,1}}(\mathbf{m}, v) \xrightarrow{s} \mathcal{T}^{\sigma^{2,0} * \sigma^{2,1} * s}(\mathbf{m}, v)$$

подстановку $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ из группа $S = S_3$. Действие подстановки s сводится к перенумеровке вершин звезды $v'' = \{v_0'', v_1'', v_2''\}$ (см. рис. 8.5).

Сравнивая разбиения на рис. 2.1 и рис. 9.1, видим, что они имеют одинаковые локальные структуры. Для выполнения формулы (9.3) требуется еще проверить подобие ядер указанных разбиений.

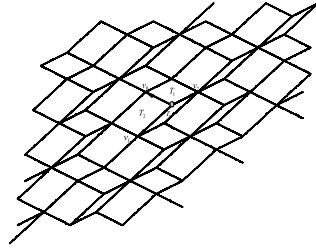
Вернемся к параметрам \mathbf{m}, v и $\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi$ начального разбиения

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) \quad (9.4)$$

и объясним такой выбор.

Выбор специализаций дифференцирований:

$$\sigma_*^{2,0} = \sigma_2^{2,0}, \quad \sigma_*^{2,1} = \sigma_2^{2,1}.$$

Рис. 9.1. Самоподобие разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$.

Согласно (5.9) и (5.10), подстановочными матрицами для них будут

$$M(\sigma_*^{2,0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\sigma_*^{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а для подстановки s , ввиду (5.14), –

$$M(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По формуле (5.19) для композиции $\sigma_* = \sigma_*^{2,0} * \sigma_*^{2,1} * s$, подстановочная матрица будет иметь вид

$$M(\sigma_*) = M(s) \cdot M(\sigma_*^{2,1}) \cdot M(\sigma_*^{2,0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Характеристический многочлен $x^3 - x^2 - x - 1$ матрицы $M(\sigma_*)$ имеет два комплексно сопряженных корня и один вещественный корень

$$\lambda \approx 1.82 > 1. \quad (9.6)$$

В качестве направляющего вектора $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (1, \lambda, \lambda^2)$ выбираем левый собственный вектор

$$\pi^{\sigma_*} = \pi \cdot M(\sigma_*) = \lambda \pi,$$

и затем, по данному вектору, задаем звезду $v = v_\pi = \{v_0, v_1, v_2\}$ (см. (2.9), (4.10)) с барицентрическими координатами $\mathbf{0}_v = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$.

В качестве нормали

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 + \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

выбираем правый собственный вектор

$$\mathbf{n}^{\sigma_*} = M(\sigma_*) \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$$

с тем же собственным значением (9.6). Унимодулярный базис (1.2) выбираем единичный $\mathbf{u} = \mathbf{e}$; поэтому весовой вектор \mathbf{m} равен \mathbf{n} , т.е.

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 + \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Итак, выбраны все параметры начального разбиения

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$$

(9.4), удовлетворяющие условиям

$$v = v_\pi, \quad \pi^{\sigma_*} = \lambda\pi, \quad \mathbf{m}^{\sigma_*} = \lambda\mathbf{m}.$$

Из первых двух свойств следует совпадение типов

$$\text{type } v = \text{type } v^{\Delta(\sigma_*)} = \pi$$

начальной звезды v и конечной звезды $v^{\Delta(\sigma_*)}$, означающее, в силу (4.12), подобие звезд $v \sim v^{\Delta(\sigma_*)}$ и подобие $\text{Ker}(v) \sim \text{Ker}(v^{\Delta(\sigma_*)})$ ядер

$$\text{Ker}(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2, \quad \text{Ker}(v^{\Delta(\sigma_*)}) = T_0^{\Delta(\sigma_*)} \sqcup T_1^{\Delta(\sigma_*)} \sqcup T_2^{\Delta(\sigma_*)}$$

начального $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ и конечного $\mathcal{T}^{\Delta(\sigma_*)}(\mathbf{m}, v)$ ядерных разбиений. Поэтому условия теоремы 6.1 выполнены и по основной теореме 9.1 получаем – с точностью до аффинного отображения $A(\sigma_*) = A(\sigma_*, \lambda, \pi)$ из (6.9) – совпадение

$$\mathcal{T}^{\Delta(\sigma_*)}(\mathbf{m}, v) = A(\sigma_*, \lambda, \pi)\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$$

исходного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ и разбиения $\mathcal{T}^{\Delta(\sigma_*)}(\mathbf{m}, v)$, получающегося из него подстановкой параллелограммов $T_k \longrightarrow T_k^{\Delta(\sigma_*)}$ для $k = 0, 1, 2$, см. рис. 8.3. Чтобы вычислить матрицу аффинного отображения $A(\sigma_*, \lambda, \pi)$, воспользуемся формулой (6.9) и матрицей $M(\sigma_*)$ из (9.5). Получим матрицу

$$A(\sigma_*, \lambda, \pi) = \begin{pmatrix} -\pi_1/\pi_0 & 1 - \pi_2/\pi_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.7)$$

записанную относительно базиса $\{v_1, v_2\}$, составленную из векторов звезды $v = \{v_0, v_1, v_2\}$. Относительно характеристических корней матрицы (9.7) см. замечание 6.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби*. Владимир, ВлГУ, 2019.
2. В. Г. Журавлев, *Универсальные ядерные разбиения*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **490** (2020), 49–93.
3. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи*. — Изв. РАН, сер. матем. **71** (2007), No. 2, 89–122.
4. G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*. — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
5. В. Г. Журавлев, *Разбиения Розы и множества ограниченного остатка на торе*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.
6. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
7. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование ядерных разбиений*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **511** (2022), 28–53.
8. В. Г. Журавлев, *Ядерные разбиения и многомерные цепные дроби*. — Вторая конференция математических центров, 07.11–11.11, Москва 2022, 90–92.
9. В. Г. Журавлев, *Инфляция и дефляция ядерных разбиений*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **523** (2023), 53–82.
10. В. Г. Журавлев, *Локальный алгоритм построения производных разбиений двумерного тора*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **479** (2019), 85–120.
11. P. Arnoux, V. Berthé, S. Ito, *Discrete planes, \mathbb{Z}^2 -actions, Jacobi-Perron algorithm and substitutions*. — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52**, No 2 (2002), 305–349.
12. V. Berthé, L. Vuillon, *Tilings and rotations on the torus: a two-dimensional generalization of Sturmian sequences*. — Discrete Math. **223** (2000), 27–53.
13. P. Arnoux, S. Ito, *Pisot Substitutions and Rauzy fractals*. — Bulletin of the Belgian Mathematical Society **8:2** (2001), 1–27.
14. S. Ito, *Diophantine approximations, substitutions, and fractals*. In: N.P. Fogg, *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1794. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.
15. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби*. — Современные проблемы математики, МИАН **299** (2017), 283–303.
16. В. Г. Журавлев, *Переключивающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
17. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка*. — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, Москва, 2012, 82–102.

Zhuravlev V. G. Self-similarity and substitutions of the karyon tilings.

Self-similar karyon partitions $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ with parameters the weight vector \mathbf{m} and the star v are considered. The star v defines the geometry of the parallelepipeds of which the tiling consists of and the weight vector \mathbf{m} sets local rules and periodicity of $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$. A deflation $\Delta : \mathcal{T}(\mathbf{m}, v) \rightarrow \mathcal{T}^\Delta(\mathbf{m}, v)$ is being built, where $\mathcal{T}^\Delta(\mathbf{m}, v) = A\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, and A is an affine mapping of the space \mathbb{R}^d . Deflation replaces the basic polyhedra forming the tiling $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ by smaller polyhedra. This is the main idea of multidimensional approximations by continued fractions.

Владимирский государственный университет
пр. Строителей, 11, 600024 Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 30 мая 2023 г.