Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 523, 2023 г.

В. Г. Журавлев

ИНФЛЯЦИЯ И ДЕФЛЯЦИЯ ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

Введение

Инфляцией

$$\mathcal{T} \quad \xrightarrow{\triangledown} \quad \triangledown\mathcal{T} \tag{0.1}$$

разбиения $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{R}^d$ называется такая подстановка образующих его фигур-тайлов, в результате которой получается новое, более крупное разбиение $\triangledown\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{R}^d$. Дефляция, обратная к (0.1) операция,

$$\mathcal{T} \quad \xrightarrow{\triangle} \quad \triangle\mathcal{T}, \tag{0.2}$$

наоборот, – измельчает исходное разбиение $\mathcal{T}$. Наиболее изучены подстановки $\triangle/\triangledown$ вида (0.1), (0.2) для разбиений Пенроуза [1–3]. Исследования другого важного класса двумерных фрактальных разбиений Рози представлены в [4–7].

Цель данной статьи – определить подстановочные преобразования $\triangle/\triangledown$ для ядерных разбиений многомерных торов $\mathbb{T}^d$ [8]. Такие разбиения $\mathcal{T}(v)$ порождаются своими ядрами Kr, остовами которых являются звезды v – множества из $d+1$ вектора. Ядерные разбиения $\mathcal{T}(v)$ состоят из $d+1$ вида параллелепипедов T_k $(k = 0, 1, \ldots, d)$. На рис. 2.1 показан пример двумерного ядерного разбиения $\mathcal{T}(v)$ из 14 параллелограммов трех видов.

В частности, указанные выше разбиения Рози представляют собою пример ядерных разбиений из фрактальных многоугольников [9–11].

В теоремах 5.1 и 9.1 для ядерных разбиений $\mathcal{T}(v)$ приведены подстановки $\triangle/\triangledown$ параллелепипедов (см. рис. 6.2 и 9.2)

$$T_k \xrightarrow{\triangle} \triangle T_k, \quad T_k \xrightarrow{\triangledown} \triangledown T_k, \tag{0.3}$$

преобразующие

$$\mathcal{T}(v) \xrightarrow{\triangle} \triangle\mathcal{T} = \mathcal{T}(v^{\sigma}), \quad \mathcal{T}(v) \xrightarrow{\triangledown} \triangledown\mathcal{T} = \mathcal{T}(v^{\iota}) \tag{0.4}$$

Ключевые слова: инфляция, дефляция, полиэдральные ядерные разбиения, многомерные цепные дроби.

разбиения $\mathcal{T}(v)$ в новые ядерные разбиения $\triangle\mathcal{T} = \mathcal{T}(v^\sigma)$ и $\bigtriangledown\mathcal{T} = \mathcal{T}(v^\iota)$, отвечающие производной v^σ и инфляционной v^ι звездам соответственно. Подстановки (0.3) – суть косые сдвиги образующих разбиения параллелепипедов T_k. При дефляции $\triangle$ сдвиги сжимающие, а при инфляции $\bigtriangledown$ растягивающие. Операция дифференцирования звезд v^σ (0.4) впервые появилась в [8], обратная же операция инфляции звезд v^ι введена в настоящей статье.

Название ядро, по-видимому, появилось впервые в [12] при изучении одномерных разбиений Фибоначчи. Однако роль ядер была осознана после открытия и исследования фрактального разбиения Рози [9], [10].

К построению ядерных разбиений произвольной размерности d ведут два пути: 1) метод дифференцирования индуцированных торических разбиений [8] и 2) метод локальных правил [13, 14].

В теории чисел интерес к разбиениям обусловлен их связями с многомерными цепными дробями [4, 5, 8, 15–18]. Исследуемые в статье подстановки (0.4) служат той же цели.

§1. Звезды и их производные

1.1. Звезды. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$. Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_d$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$ и $\sigma' = \{k'_1, \ldots, k'_{d-1}\} = \mathcal{D} \setminus \sigma$ – дополнительное к σ сочетение. Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов

$$v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}. \tag{1.1}$$

Определение 1.1. Пусть любые $d-1$ вектора из множества v линейно независимы, и пусть любые его два вектора v_{k_1}, v_{k_2} не принадлежат гиперплоскости $H_{\sigma'}$, порождаемой остальными векторами из v, и лежат по отношению к ней в разных полупространствах. Такое множество векторов v из (1.1) назовем звездой.

Непосредственно из определения звезды следует, что любые d вектора из (1.1) линейно независимы.

Критерий 1.1. Обозначим через

$$\Delta(v) = \{\lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_d v_d;\ \ \lambda_0 + \ldots + \lambda_d \leqslant 1,\ \ \lambda_0, \ldots, \lambda_d \geqslant 0\}, \tag{1.2}$$

где коэффициенты $\lambda_0, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, натянутый на векторы звезды v симплекс, и пусть $\Delta^{\mathrm{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса (1.2). Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию $\mathbf{0} \in \Delta^{\rm int}(v)$ для точки $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ – центра звезды v.

1.2. Производные звезды. Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \tag{1.3}$$

для *строгого (дизъюнктивного)* и *нестрогого разбиений* множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ и $X_1^{\rm int} \cap X_2^{\rm int} = \emptyset$ соответственно, где $X_k^{\rm int}$ – множество внутренних точек из X_k.

Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежит

$$v_\sigma \notin H_{\sigma'} \tag{1.4}$$

гиперплоскости $H_{\sigma'}$, проходящей через оставшиеся $d-1$ векторы звезды v с индексами из дополнения σ' к сочетению σ. При этом условии, только одно из множеств

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{1.5}$$

будет звездой (1.1). Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \tag{1.6}$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ принадлежат разным полупространствам $H^{\pm}_{\sigma'}$, и $v(\sigma')$ – дополнительное для $v(\sigma)$ множество векторов из звезды v.

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (1.6) гарантирована ограничением (1.4) на сумму векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$.

Определение 1.2. Обозначим через $v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma')$ то множество векторов из (1.5), которое является звездой. Если существуют звезды v^σ для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$, то будем говорить, что звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ невырождена.

Таким образом, согласно определению 1.2 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}, \tag{1.7}$$

где $v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}$, $v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$ или $v_{k_1}^\sigma = v_\sigma$, $v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$ в зависимости от выполнения условия из (1.6) и $v_{k'}^\sigma = v_{k'}$ для всех $k' \in \sigma'$. Звезду v^σ из (1.7) назовем *σ-производной* нерывожденной звезды v.

§2. Индуцированные разбиения тора

2.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть

$$L' = \mathbb{Z}[l'_1, \dots, l'_d] \tag{2.1}$$

– полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом $l'_1, \dots, l'_d$, т.е. векторы $l_1, \dots, l_d$ линейно независимы на полем вещественных чисел $\mathbb{R}$; и пусть T – некоторое подмножество из $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}^d_{L'} = \mathbb{R}^d/L'$, если отображение

$$T \overset{\longrightarrow}{\sim} \mathbb{T}^d_{L'}: \quad x \mapsto x \bmod L'$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d \tag{2.2}$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T: \quad S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{2.3}$$

на векторы $v_0, v_1, \dots, v_d$, связанные с базисом (2.1) решетки L' равенствами

$$l'_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, d. \tag{2.4}$$

В (2.3) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для *цвета* точек x, принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (2.2), $k = 0, 1, \dots, d$.

Заметим, что при переходе (2.4) от векторов переклыдывания $v_0, v_1, \dots, v_d$ к базизу $l'_1, \dots, l'_d$ решетки L' нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0. Удобно дать ему дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \tag{2.5}$$

В частности, из (2.4) и (2.5) вытекают сравнения $v_k \equiv \alpha' \bmod L'$ для всех $k = 0, 1, \dots, d$. Поэтому перекладывание (2.3) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$ на вектор $\alpha' \bmod L'$,

$$T \xrightarrow{S'} T: \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L'. \tag{2.6}$$

2.2. Перекладывающиеся параллелоэдры. Определим для $m = 0, 1, \dots, d$ замкнутые d-мерные параллелепипеды

$$\overline{T}_m = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \ldots + \lambda_{k_d} v_{k_d};\ 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{2.7}$$

где $k_1, \dots, k_d$ – дополнительные к m индексы в $\mathcal{D}$. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ является звездой (1.7), то объединение

$$\overline{T} = \overline{T}_0 \cup \overline{T}_1 \cup \ldots \cup \overline{T}_d \tag{2.8}$$

параллелепипедов (2.7) образует *параллелоэдр* [19], [20] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l' \in L'} \overline{T}[l'] \tag{2.9}$$

с помощью параллельных переносов $\overline{T}[l'] = \overline{T} + l'$ на векторы l' решетки L'. Причем различные многогранники $\overline{T}[l']$ из (2.9) не имеют общих внутренних точек. Здесь и далее будем пользоваться соглашением (1.3).

Для $d = 2$ параллелоэдр $\overline{T}$ из (2.8) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $d = 3$ – ромбододекаэдром Федорова [21], а для $d = 4$ – параллелоэдром Вороного [22].

По i-*алгоритму* из [19] вершины, ребра и грани параллелепипедов $\overline{T}_m$ можно распределить между собою так, чтобы получалось разбиение $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d$, имеющее внутреннюю часть $T^{\mathrm{int}} = (\overline{T})^{\mathrm{int}}$ такую же, как и параллелоэдр (2.8), и разбивающее пространство

$$\mathbb{R}^d = \coprod_{l' \in L'} T[l'] \tag{2.10}$$

в строгом смысле (1.3), т.е. в (2.10) многогранники $T[l'] \cap T[l''] = \emptyset$, если $l' \neq l''$. Существование разбиения (2.10) равносильно условию незамкнутому параллелоэдру T быть разверткой тора $\mathbb{T}^d_{L'} = \mathbb{R}^d/L'$.

Исходя из i-алгоритма, можно считать, что выполняются условия

$$0 \in T_0, \ \ v_0 \in T_1, \ \ v_0 + v_1 \in T_2, \ \ \ldots \ \ v_0 + v_1 + \ldots + v_{d-1} \in T_d. \tag{2.11}$$

Если дополнительно предположить выполненными условия (2.11), то в результате каждой звезде $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ ставится в соответствие *перекладывающийся параллелоэдр*

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d, \tag{2.12}$$

являющийся разверткой тора $\mathbb{T}^d_{L'}$ с векторами перекладывания v_0, v_1, $\ldots, v_d$ в (2.3).

2.3. Вмещающее пространство. Кроме тора $\mathbb{T}^d_{L'}$, нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$ для другой полной решетки $L \subset \mathbb{R}^d$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d_L$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$, полагая

$$\mathbb{T}^d_L \xrightarrow{S} \mathbb{T}^d_L : \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod L. \tag{2.13}$$

Далее торы $\mathbb{T}^d_L$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}^d_{L'}$ с изменяющимися решетками L'.

2.4. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 2.1. Перекладывающаяся развертка T из (2.2) *вкладывается*

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_L \tag{2.14}$$

в тор $\mathbb{T}^d_L$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются следующие условия.

1. Подмножество $T \subset \mathbb{R}^d$ является *L-различимым*, т.е. для любых элементов x, y из T, связанных сравнением $x \equiv y \bmod L$, следует их равенство $x = y$. Значит, отображение

$$T \ \overrightarrow{\sim}\ T \bmod L: \quad x \mapsto x \bmod L \tag{2.15}$$

будет взаимно однозначным; и поэтому используя отображение (2.15) можем считать развертку T вложенной как множество в тор $\mathbb{T}^d_L$,

$$T \subset \mathbb{T}^d_L. \tag{2.16}$$

2. Векторы перекладывания (2.3) имеют вид

$$v_k \equiv m_k\alpha \bmod L \tag{2.17}$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, d$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \ldots$, называемыми *порядками* векторов v_k.

3. Пусть

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) = \{S^j(T_k);\ \ j = 1, \ldots, m_k - 1\} \tag{2.18}$$

обозначает *орбиту* подмножества $T_k \subset T$. В силу включения (2.16) будем полагать $\mathrm{Orb}^+_k \subseteq \mathbb{T}^d_L$. Тогда по определению считается, что орбиты (2.18) удовлетворяют условию $\mathrm{Orb}^+(T_k) \cap T = \emptyset$ для $k = 0, 1, \ldots, d$.

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (2.18) определить еще *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(T_k) = \{S^j(T_k);\ \ j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\}. \tag{2.19}$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из (2.13) *иррациональным*, т. е.

$$\textit{числа}\ \ 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d\ \ \textit{линейно независимы над кольцом}\ \ \mathbb{Z}. \tag{2.20}$$

Здесь α_k – координаты α в некотором базисе полной решетки L.

Теорема 2.1. *Пусть развертка* T *вкладывается* (2.14) *в тор* $\mathbb{T}_L^d$, *развертка* T *имеет внутреннюю точку, и пусть вектор* α *для сдвига* $S = S_\alpha$ *из* (2.13) *будет иррациональным* (2.20). *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Множества из полных орбит* $\mathrm{Orb}(T_k)$ *не пересекаются, т.е.*

$$S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \emptyset$$

только при условии $j_1 = j_2$ *и* $k_1 = k_2$.

2. *Имеет место разбиение тора* $\mathbb{T}_L^d$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d, \tag{2.21}$$

где

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \ldots \sqcup S^{m_k-1}(T_k)$$

– орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в полную орбиту $\mathrm{Orb}(T_k)$ *из* (2.19).

Доказательство. См. [8]. □

Сумма порядков

$$m = m_0 + m_1 + \ldots + m_d \tag{2.22}$$

всех векторов v_k из (2.17) называется *порядком* разбиения тора $\mathcal{T}$.

2.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 2.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \longrightarrow T$ из (2.6) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S : \mathbb{T}_L^d \longrightarrow \mathbb{T}_L^d$ из (2.13), что символически будем записывать в виде равенства

$$S' = S|_T.$$

Обозначим

$$T = T(v), \qquad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d \tag{2.23}$$

соответственно развертку T из (2.2) и *индуцированное разбиение* (2.21) тора $\mathbb{T}_L^d$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}_L^d$ разверткой T.

Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется (ср. [10]) *ядром (karyon)* разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$ используется обозначение

$$T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}). \tag{2.24}$$

Ядро Kr характеризуется следующим свойством: ядро – это такое подмножество $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}_L^D$, для которого отображение первого возвращения

$$S' = S|_{\mathrm{Kr}}, \tag{2.25}$$

индуцированное сдвигом тора $S = S_\alpha$ из (2.13), эквивалентно перекладыванию $D+1$ подмножеств из разбиения

$$\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \mathrm{Kr}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Kr}_D. \tag{2.26}$$

В определении Kr важно, что количество областей в разбиении (2.26) на единицу больше размерности вмещающего его тора $\mathbb{T}_L^D$. Отсюда, в частности, следует, что Kr является разверткой некоторого тора $\mathbb{T}_{L'}^D$, а индуцированное отображение (2.25) изоморфно сдвигу этого тора.

Поскольку определенное в (2.21) разбиение $\mathcal{T}$ порождается вкладывающимся в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}_L^d$ ядром $T = \mathrm{Kr}$ из (2.24), то оно называется *ядерным разбиением* тора $\mathbb{T}_L^d$.

2.6. Критерий вложимости развертки тора.

Теорема 2.2. *Определенная в* (2.12) *развертка тора $T = T(v)$ вкладывается* (2.14) *в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}_L^d$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

1) *множество $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d$ из* (2.23) *является разбиением тора $\mathbb{T}_L^d$;*

2) *внутренняя часть T^{int} развертки $T \subset \mathbb{T}_L^d$ не содержит ни одной из точек x_j орбиты*

$$\mathrm{Orb}^+(0, m) = \{x_j = S^j(0);\ \ j = 1, 2, \ldots, m-1\}$$

порядка m, определенного в (2.22).

Доказательство. См. [8]. □

Чтобы не вводить новые термины, число m из (2.22) будем также называть и *порядком* развертки тора $T = T(v)$. Саму развертку $T = T(v)$ и порождающую ее звезду v назовем *минимальными*, если выполняется условие 2) из теоремы 2.2.

2.7. Производные вкладывающихся звезд.

Определение 2.2. Пусть $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ – звезда и $T = T(v)$ – отвечающая ей развертка (2.23) тора $\mathbb{T}_{L'}^d$, с векторами перекладывания $v_0, v_1, \ldots, v_d$. Если данная развертка T вкладывается $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}_L^d$ в тор $\mathbb{T}_L^d$

относительно некоторого сдвига $S = S_\alpha$, то будем говорить, что звезда v *вкладывается*

$$v \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_L \tag{2.27}$$

в тор $\mathbb{T}^d_L$ относительно сдвига S.

Теорема 2.3. *Пусть невырожденная звезда $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ вкладывается (2.27) в тор $\mathbb{T}^d_L$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ с иррациональным (2.20) вектором α. Тогда любая ее σ-производная $v^\sigma = \{v^\sigma_0, v^\sigma_1, ..., v^\sigma_d\}$ для $\sigma \in \Sigma$ также вкладывается*

$$v^\sigma \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_L \tag{2.28}$$

в тот же тор $\mathbb{T}^d_L$ относительно сдвига S.

Доказательство. См. [8]. □

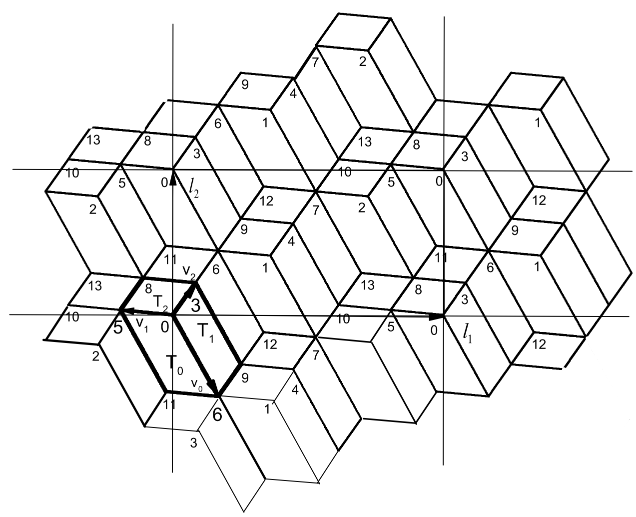

Рис. 2.1. Двумерное ядерное разбиение $\mathcal{T}$ порядка $m = 14$.

2.8. Двумерное ядерное разбиение. На рис. 2.1 показано двумерное ядерное разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ с ядром $T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2$, построенным по звезде $v = \{v_0, v_1, v_2\}$. Ее лучи v_0, v_1, v_2 имеют порядки $m_0 = 6$, $m_1 = 5$, $m_2 = 3$.

Векторы l_1, l_2 образуют базис решетки $L = \mathbb{Z}[l_1, l_2]$ периодов разбиения $\mathcal{T}$. По данной решетке строится двумерный тор $\mathbb{T}^2_L = \mathbb{Z}^2/L$, который разбиение $\mathcal{T}$ делит на $m = m_0 + m_1 + m_2 = 14$ параллелограммов.

§3. Дефляция. Основные определения

3.1. Лучи. Пусть $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, d\}$ – множество индексов из $d+1$ элемента; $\sigma = \{0, 1\}$ – сочетание из двух *фиксированных элементов* $0, 1$; $\sigma' = \mathcal{D} \setminus \sigma$ – дополнение σ в $\mathcal{D}$ из $d' = d - 1$ элемента и $\sigma'' \subset \sigma'$ – любое множество из $d'' = d - 2$ элементов.

Определим следующие лучи:

v_0, v_1 – *связанные лучи*, это лучи звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, отвечающие сочетанию σ;

v_0 – *исчезающий луч*;

v_1 – *остающийся луч* (доминантный луч);

v_k для $k \in \sigma'$ – *свободные лучи*;

$v_{\mathbf{0}} = v_0 + v_1$ – *новый луч* производной звезды $v^\sigma = \{v_{\mathbf{0}}, v_1, \dots, v_d\}$.

3.2. Параллелепипеды. Для $k = 0, 1, \dots, d$, определим замкнутые d-мерные *параллелепипеды*

$$T_k = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \ldots + \lambda_{k_d} v_{k_d};\ 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{3.1}$$

где $k_1, \dots, k_d$ – индексы из дополнения $\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}$ Множество лучей $v_{k_1}, \dots, v_{k_d}$ назовем *остовом* параллелепипеда T_k.

3.3. Ядро. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ является звездой (1.1), то объединение

$$T = T_0 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_d \tag{3.2}$$

параллелепипедов (3.1) образует *ядро*.

3.4. Производное ядро. Пусть

$$v^\sigma = \{v^\sigma_0, v^\sigma_1, \dots, v^\sigma_d\} \tag{3.3}$$

– производная звезда (1.7) для произвольного $\sigma \subset \mathcal{D}$. Определим *производное ядро*

$$T^\sigma = T_0^\sigma \cup T_1^\sigma \cup \ldots \cup T_d^\sigma, \tag{3.4}$$

составленное из производных параллелепипедов

$$T_k^\sigma = \{\lambda_{k_1} v_{k_1}^\sigma + \ldots + \lambda_{k_d} v_{k_d}^\sigma;\ 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\},$$

аналогичных параллелепипедам (3.1). По условию, луч v_0 исчезающий, а луч v_1 остающийся, т.е. является доминантным лучом. Поэтому, согласно определению (1.7), производная звезда (3.3) с $\sigma = \{0,1\}$ примет вид

$$v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots, v_d^\sigma\} = \{v_0 + v_1, v_1, \ldots, v_d\}. \tag{3.5}$$

3.5. Производные параллелепипеды. Опишем параллелепипеды из производного ядра T^σ (3.4) для $\sigma = \{0,1\}$.

$T_{\sigma',1}$ – параллелепипед с остовом $v_{\sigma',1} = \{v_{\sigma'}, v_1\}$;

$T_{\sigma',\mathbf{0}}$ – параллелепипед с остовом $v_{\sigma',\mathbf{0}} = \{v_{\sigma'}, v_{\mathbf{0}}\}$, где $v_{\sigma'}$ – множество лучей v_k с индексами $k \in \sigma'$;

$T_{\sigma'',\mathbf{0},1}$ – параллелепипеды с остовами $v_{\sigma'',\mathbf{0},1} = \{v_{\sigma''}, v_{\mathbf{0}}, v_1\}$, где $v_{\sigma''}$ – множество лучей v_k с индексами $k \in \sigma''$, при этом σ'' пробегает все $(d-2)$-подмножества из σ'. Последних параллелепипедов $d-1$.

Характеристики производных параллелепипедов:

$T_0^\sigma = T_{\sigma',1}$ – неменяющийся параллелепипед;

$T_1^\sigma = T_{\sigma',\mathbf{0}}$ – *компенсирующий* параллелепипед с уменьшенным объемом;

$T_k^\sigma = T_{\sigma'',\mathbf{0},1}$ – *деформирующиеся* параллелепипеды, сохраняющие объем.

3.6. Исходные параллелепипеды. Новые обозначения. Теперь опишем параллелепипеды исходного ядра T (3.2). Всего параллелепипедов $d+1$. Они делятся на *три типа*:

$T_0 = T_{\sigma',1}$ – параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma'}, v_1\}$;

$T_1 = T_{\sigma',0}$ – параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma'}, v_0\}$;

$T_k = T_{\sigma'',0,1}$, где $k \in \sigma' = \mathcal{D} \setminus \sigma$ (т.е. $k \neq 0,1$) – параллелепипеды с остовами $\{v_{\sigma''}, v_0, v_1\}$.

3.7. Подстановки. Зададим $\triangle$ – подстановку (substitution), действующую на параллелепипеды T_0, T_1 и T_k ($k \neq 0,1$) соответственно специализациями $\triangle_0$, $\triangle_1$ и $\triangle_k$:

$$T_0 = T_{\sigma',1} \xrightarrow{\triangle_0} T_{\sigma',1}, \tag{3.6}$$

$$T_1 = T_{\sigma',0} \xrightarrow{\triangle_1} T_{\sigma',\mathbf{0}} \cup (T_0 + v_0), \tag{3.7}$$

$$T_k = T_{\sigma'',0,1} \xrightarrow{\triangle_k} T_{\sigma'',\mathbf{0},1}. \tag{3.8}$$

§4. Орбиты разбиений

4.1. Орбиты исходного разбиения. Для полных орбит (2.19) введем расширенное обозначение

$$\mathrm{Orb}(T_k)^{m_k} = \{S^j(T_k);\ \ j = 0, 1, \dots, m_k - 1\},$$

где T_k – замкнутые параллелепипеды (3.1). Тогда разбиение (2.21) тора $\mathbb{T}^d_L$ перепишется в виде

$$\mathcal{T} = \mathrm{Orb}(T_0)^{m_0} \cup \mathrm{Orb}(T_1)^{m_1} \cup \ldots \cup \mathrm{Orb}(T_d)^{m_d}, \tag{4.1}$$

при этом

$$S^j(T_k)^{\mathrm{int}} \cap S^{j'}(T_{k'})^{\mathrm{int}} = \emptyset \tag{4.2}$$

с индексами $(j, k) \neq (j', k')$. Разбиение $\mathcal{T}$ состоит из $m_k > 0$ параллелепипедов типа T_k $(k = 0, 1, \dots, d)$. Число параллелепипедов разных типов $m = m_0 + m_1 + \ldots + m_d$ равно порядку (2.22) разбиения $\mathcal{T}$. Любые два из m указанных параллелепипедов не имеют общих внутренних точек (4.2).

Итак, если развертка $T = T(v) = T_0 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_d$ вкладывается

$$T = T(v) \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_L \tag{4.3}$$

в тор $\mathbb{T}^d_L$ и задан *весовой вектор*

$$\mathbf{m} = (m_0, m_1, \dots, m_d), \tag{4.4}$$

то по вложению (4.3) и вектору $\mathbf{m}$ можно построить индуцированное ядерное разбиение тора $\mathcal{T}$ (4.1).

4.2. Орбиты производного разбиения. Если звезда v невырожденная, то по теореме 2.3 любая производная развертка $T^\sigma = T(v^\sigma) = T_0^\sigma \cup T_1^\sigma \cup \ldots \cup T_d^\sigma$ снова вкладывается $T^\sigma = T(v^\sigma) \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_L$ в тот же тор $\mathbb{T}^d_L$, но уже с *производным* весовым вектором

$$\mathbf{m}^\sigma = (m_0^\sigma, m_1^\sigma, \dots, m_d^\sigma) = (m_0 + m_1, m_1, \dots, m_d) \tag{4.5}$$

для $\sigma = \{0, 1\}$ в согласии с формулой производной звезды (3.5). Поэтому существует производное разбиение

$$\mathcal{T}^\sigma = \mathrm{Orb}(T_0^\sigma)^{m_0^\sigma} \cup \mathrm{Orb}(T_1^\sigma)^{m_1^\sigma} \cup \ldots \cup \mathrm{Orb}(T_d^\sigma)^{m_d^\sigma} \tag{4.6}$$

тора $\mathbb{T}^d_L$ с разложением на орбиты

$$\mathrm{Orb}(T^\sigma_k)^{m^\sigma_k} = \{S^j(T^\sigma_k);\ \ j = 0, 1, \ldots, m^\sigma_k - 1\}.$$

Производное разбиение $\mathcal{T}^\sigma$ состоит из $m^\sigma_k > 0$ параллелепипедов типа T^σ_k $(k = 0, 1, \ldots, d)$. В силу (4.5), в разбиении (4.6) параллелепипедов разных типов

$$m^\sigma = m^\sigma_0 + m^\sigma_1 + \ldots + m^\sigma_d = m + m_0.$$

4.3. Типы орбит исходного разбиения. Перечислим эти типы:

$$\mathrm{Orb}(T_0)^{m_0} = \mathrm{Orb}(T_{\sigma',1})^{m_0} = \{S^j(T_{\sigma',1});\ \ j = 0, 1, \ldots, m_0 - 1\}, \quad (4.7)$$

$$\mathrm{Orb}(T_1)^{m_1} = \mathrm{Orb}(T_{\sigma',0})^{m_1} = \{S^j(T_{\sigma',0});\ \ j = 0, 1, \ldots, m_1 - 1\}, \quad (4.8)$$

$$\mathrm{Orb}(T_k)^{m_k} = \mathrm{Orb}(T_{\sigma'',0,1})^{m_k} = \{S^j(T_{\sigma'',0,1});\ j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\}, \quad (4.9)$$

для всех $k \neq 0, 1$.

4.4. Типы орбит производного разбиения. Перечислим указанные типы:

$$\mathrm{Orb}(T^\sigma_0)^{m^\sigma_0} = \mathrm{Orb}(T_{\sigma',1})^{m^\sigma_0} = \{S^j(T_{\sigma',1});\ \ j = 0, 1, \ldots, m^\sigma_0 - 1\}, \quad (4.10)$$

$$\mathrm{Orb}(T^\sigma_1)^{m^\sigma_1} = \mathrm{Orb}(T_{\sigma',\mathbf{0}})^{m^\sigma_1} = \{S^j(T_{\sigma',\mathbf{0}});\ \ j = 0, 1, \ldots, m^\sigma_1 - 1\},$$

$$\mathrm{Orb}(T^\sigma_k)^{m^\sigma_k} = \mathrm{Orb}(T_{\sigma'',\mathbf{0},1})^{m^\sigma_k} = \{S^j(T_{\sigma'',\mathbf{0},1});\ \ j = 0, 1, \ldots, m^\sigma_k - 1\},$$

для всех $k \neq 0, 1$.

§5. Подстановки

5.1. Подстановки орбит. Используя (4.7), (3.6), затем (4.8), (3.7) и (4.9), (3.8) определим подстановки

$$\mathrm{Orb}(T_0)^{m_0} = \mathrm{Orb}(T_{\sigma',1})^{m_0} \xrightarrow{\triangle_0} \mathrm{Orb}(T_0)^{m_0} = \mathrm{Orb}(T_{\sigma',1})^{m_0},$$

$$\mathrm{Orb}(T_1)^{m_1} = \mathrm{Orb}(T_{\sigma',0})^{m_1} \xrightarrow{\triangle_1} \mathrm{Orb}(T_{\sigma',\mathbf{0}})^{m_1} \cup \mathrm{Orb}(T_0 + v_0)^{m_1},$$

$$\mathrm{Orb}(T_k)^{m_k} = \mathrm{Orb}(T_{\sigma'',0,1})^{m_k} \xrightarrow{\triangle_k} \mathrm{Orb}(T_{\sigma'',\mathbf{0},1})^{m_k}, \quad k \neq 0, 1.$$

5.2. Подстановки в исходных обозначениях. Перечислим эти подстановки:

$$T_0 = T_{\sigma',1} \xrightarrow{\triangle_0} T_{\sigma',1} = T^\sigma_0, \quad (5.1)$$

$$T_1 = T_{\sigma',0} \xrightarrow{\triangle_1} T_{\sigma',\mathbf{0}} \cup (T_0 + v_0) = T^\sigma_1 \cup (T^\sigma_0 + v_0), \quad (5.2)$$

$$T_k = T_{\sigma'',0,1} \xrightarrow{\triangle_k} T_{\sigma'',\mathbf{0},1} = T^\sigma_k, \quad k \neq 0, 1. \quad (5.3)$$

5.3. Подстановки для производных орбит. Переход на производные орбиты:

$$\mathrm{Orb}(T_0)^{m_0} \xrightarrow{\triangle_0} \mathrm{Orb}(T_0^\sigma)^{m_0}, \tag{5.4}$$

$$\mathrm{Orb}(T_1)^{m_1} \xrightarrow{\triangle_1} \mathrm{Orb}(T_1^\sigma)^{m_1} \cup \mathrm{Orb}(T_0^\sigma + v_0)^{m_1}, \tag{5.5}$$

$$\mathrm{Orb}(T_k)^{m_k} \xrightarrow{\triangle_k} \mathrm{Orb}(T_k^\sigma)^{m_k}. \tag{5.6}$$

Учитывая вид (4.5) производного весового вектора $\mathbf{m}^\sigma$, переписываем подстановки (5.4)–(5.6):

$$\mathrm{Orb}(T_0)^{m_0} \xrightarrow{\triangle_0} \mathrm{Orb}(T_0^\sigma)^{m_0}, \tag{5.7}$$

$$\mathrm{Orb}(T_1)^{m_1} \xrightarrow{\triangle_1} \mathrm{Orb}(T_1^\sigma)^{m_1^\sigma} \cup \mathrm{Orb}(T_0^\sigma + v_0)^{m_1}, \tag{5.8}$$

$$\mathrm{Orb}(T_k)^{m_k} \xrightarrow{\triangle_k} \mathrm{Orb}(T_k^\sigma)^{m_k^\sigma}. \tag{5.9}$$

Так как $m_0^\sigma = m_0 + m_1$, то

$$\mathrm{Orb}(T_0^\sigma)^{m_0^\sigma} = \mathrm{Orb}(T_0^\sigma)^{m_0} \cup \mathrm{Orb}(T_0^\sigma)_{m_0}^{m_0^\sigma}, \tag{5.10}$$

где

$$\mathrm{Orb}(T_0^\sigma)_{m_0}^{m_0^\sigma} = \{S^j(T_0^\sigma);\ j = m_0, m_0+1, \dots, m_0^\sigma - 1\}. \tag{5.11}$$

Согласно (2.17) луч v_0 имеет порядок m_0. Поэтому хвост орбиты (5.11) – это начало орбиты (5.10), сдвинутое на луч v_0:

$$\mathrm{Orb}(T_0^\sigma)_{m_0}^{m_0^\sigma} = \mathrm{Orb}(T_0^\sigma)^{m_1} + v_0 = \mathrm{Orb}(T_0^\sigma + v_0)^{m_1}. \tag{5.12}$$

Подставляя (5.12) в подстановку (5.8), получим

$$\mathrm{Orb}(T_1)^{m_1} \xrightarrow{\Delta_1} \mathrm{Orb}(T_1^\sigma)^{m_1^\sigma} \cup \mathrm{Orb}(T_0^\sigma)_{m_0}^{m_0^\sigma}. \tag{5.13}$$

Теорема 5.1. *Для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$ существует отображение*

$$\sigma \ \to \ \triangle = \triangle(\sigma) \tag{5.14}$$

в множество подстановок $\triangle$ вида (3.6)–(3.8) такое, что определенное в (2.23) ядерное разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ тора $\mathbb{T}_L^d$ для невырожденной звезды v переводится

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) \xrightarrow{\triangle} \mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}(v^\sigma) \tag{5.15}$$

подстановкой $\triangle$ в производное ядерное разбиение $\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}(v^\sigma)$, порождаемое производной звездой v^σ (1.7).

Доказательство. *Случай* $\sigma = \{0, 1\}$. Пусть выбрано сочетание $\sigma = \{0, 1\}$. Перепишем исходное разбиение (4.1) в виде

$$\mathcal{T} = \mathrm{Orb}(T_0)^{m_0} \cup \mathrm{Orb}(T_1)^{m_1} \ \cup_{k\neq 0,1} \mathrm{Orb}(T_k)^{m_k}$$

и, учитывая (5.7), (5.9), (5.13), выполним подстановки:

$$\mathrm{Orb}(T_0)^{m_0} \xrightarrow{\triangle_0} \mathrm{Orb}(T_0^\sigma)^{m_0}, \tag{5.16}$$

$$\mathrm{Orb}(T_1)^{m_1} \xrightarrow{\triangle_1} \mathrm{Orb}(T_1^\sigma)^{m_1^\sigma} \cup \mathrm{Orb}(T_0^\sigma)^{m_0^\sigma}_{m_0}, \tag{5.17}$$

$$\mathrm{Orb}(T_k)^{m_k} \xrightarrow{\triangle_k} \mathrm{Orb}(T_k^\sigma)^{m_k^\sigma}. \tag{5.18}$$

После этого разбиение $\mathcal{T}$ перейдет в объединение

$$\triangle\mathcal{T} = \mathrm{Orb}(T_0)^{m_0} \cup \mathrm{Orb}(T_1^\sigma)^{m_1^\sigma} \cup \mathrm{Orb}(T_0^\sigma)^{m_0^\sigma}_{m_0} \ \cup_{k\neq 0,1} \mathrm{Orb}(T_k^\sigma)^{m_k^\sigma}. \tag{5.19}$$

Согласно определению (4.10) объединение первой и третьей орбит (5.19) составляет орбиту $\mathrm{Orb}(T_0^\sigma)^{m_0^\sigma}$. Поэтому

$$\triangle\mathcal{T} = \mathrm{Orb}(T_0^\sigma)^{m_0^\sigma} \cup \mathrm{Orb}(T_1^\sigma)^{m_1^\sigma} \ \cup_{k\neq 0,1} \mathrm{Orb}(T_k^\sigma)^{m_k^\sigma} \tag{5.20}$$

и, значит, $\triangle\mathcal{T} = \mathcal{T}^\sigma$. Поскольку по теореме 2.3 существует производное ядерное разбиение $\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}(v^\sigma)$, имеющее разложение на орбиты из правой части равенства (5.20). Это доказывает формулу (5.15) для сочетания $\sigma = \{0, 1\}$.

Случай произвольного σ. Укажем, какие нужно сделать изменения в случае произвольного сочетания $\sigma = \{k_0, k_1\} \in \Sigma$. Не уменьшая общности, можем считать луч v_{k_1} доминантным, а луч v_{k_0} исчезающим.

Зададим подстановку $s = s(k_0, k_1)$ на множестве индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$, переводящую $k_0 \to 0$, $k_1 \to 1$, а другие $k \neq k_0, k_1$ биективно в оставшиеся индексы $\mathcal{D}\backslash\{0, 1\}$ произвольным образом. На множестве разбиений $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ определим подстановку

$$\triangle(\sigma) = \underbrace{s^{-1}}_{3} \cdot \underbrace{\triangle(0, 1)}_{2} \cdot \underbrace{s}_{1}, \tag{5.21}$$

действующую в указанном порядке. Здесь подстановка s производит соответствующую перенумерацию параллелепипедов $T_0, T_1, \ldots, T_d$ разбиения $\mathcal{T}$; $\triangle = \triangle(0, 1)$ – ранее определенная подстановка (5.16)–(5.18); s^{-1} – обратная перенумерация параллелепипедов $T_0^\sigma, T_1^\sigma, \ldots, T_d^\sigma$ уже в производном разбиении $\mathcal{T}^\sigma$. Так определенная подстановка $\triangle(\sigma)$ и будет требуемой подстановкой (5.14). $\square$

§6. Геометрия подстановок параллелепипедов

6.1. Косые сдвиги. Выясним геометрический смысл подстановок параллелепипедов (5.1)–(5.3).

Подстановка (5.1) с $k = 0$ тождественная. Рассмотрим подстановки (5.3). По определению $T_k = T_{\sigma'',0,1}$ – d-мерные параллелепипеды с остовами $\{v_{\sigma''}, v_0, v_1\}$. За *основание (base)* $T_k(v_{\sigma''}, v_1)$ параллелепипеда T_k выберем $(d-1)$-мерный параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma''}, v_1\}$. Представим параллелепипед T_k через сумму Минковского

$$T_k = T_{\sigma'',0,1} = T_k(v_{\sigma''}, v_1) \dot{+} v_0.$$

Также запишем и производный параллелепипед

$$T_k^\sigma = T_{\sigma'',\mathbf{0},1} = T_k(v_{\sigma''}, v_1) \dot{+} v_{\mathbf{0}},$$

где нулевой луч $v_{\mathbf{0}}$ производной звезды v^σ имеет вид $v_{\mathbf{0}} = v_0 + v_1$. Следовательно, (5.3) есть не что иное, как *косой сдвиг* верхнего основания $T_k(v_{\sigma''}, v_1) + v_0$ вдоль вектора v_1, принадлежащего нижнему основанию $T_k(v_{\sigma''}, v_1)$. Поэтому преобразования косого сдвига $\triangle_k$ для $k \neq 0, 1$ сохраняют объем параллелепипедов, $\operatorname{vol} T_k^\sigma = \operatorname{vol} T_k$.

Более сложной оказалась подстановка (5.2) –

$$T_1 = T_{\sigma',0} \xrightarrow{\triangle_1} T_{\sigma',\mathbf{0}} \cup (T_0 + v_0) = T_1^\sigma \cup (T_0 + v_0). \tag{6.1}$$

Рассмотрим *сужение* $\triangle_1^-$ отображения $\triangle_1$:

$$T_1 = T_{\sigma',0} \xrightarrow{\triangle_1^-} T_1^\sigma = T_{\sigma',\mathbf{0}}. \tag{6.2}$$

Вернемся к гиперплоскости $H_{\sigma'}$, проходящей через $d-1$ вектор звезды v с индексами из дополнения $\sigma' = \mathcal{D} \setminus \sigma$ к сочетению $\sigma = \{0, 1\}$. Пусть, для определенности, луч v_0 принадлежит полупространству $H_{\sigma'}^+$, другой луч v_1 – полупространству $H_{\sigma'}^-$. По соглашению v_0 – исчезающий луч, а v_1 – остающийся (доминантный) луч. Поэтому новый луч $v_{\mathbf{0}} = v_0 + v_1$ производной звезды v^σ будет принадлежать тому же полупространству, что и исчезающий луч v_0. Итак, имеем

$$v_0 \in H_{\sigma'}^+, \quad v_{\mathbf{0}} \in H_{\sigma'}^+, \quad v_1 \in H_{\sigma'}^-. \tag{6.3}$$

В качестве *основания* $T_1(v_{\sigma'})$ параллелепипеда $T_1 = T_{\sigma',0}$ выберем $(d-1)$-мерный параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma'}\}$. Имеем

$$T_1 = T_{\sigma',0} = T_1(v_{\sigma'}) \dot{+} v_0; \tag{6.4}$$

$$T_1^\sigma = T_{\sigma',\mathbf{0}} = T_1(v_{\sigma'}) \dot{+} v_{\mathbf{0}} = T_1(v_{\sigma'}) \dot{+} (v_0 + v_1). \tag{6.5}$$

Из представлений (6.4), (6.5) и включений (6.3) следует неравенство

$$\operatorname{vol} T_1^\sigma = \operatorname{vol} \triangle_1^- T_1 < \operatorname{vol} T_1.$$

Таким образом, сужение $\triangle_1^-$ (6.2) отображения $\triangle_1$ представляет собою *сжимающий* косой сдвиг $T_1 \xrightarrow{\triangle_1^-} T_1^\sigma$.

6.2. Складки. Сдвинутый параллелепипед из (6.1) также представим через сумму Минковского

$$T_0 + v_0 = (T_1(v_{\sigma'}) \dot{+} v_1) + v_0 = (T_1(v_{\sigma'}) + v_0) \dot{+} v_1, \tag{6.6}$$

где $T_1(v_{\sigma'}) + v_0$ – второе основание параллелепипеда $T_1 = T_{\sigma',0}$ (6.4).

Рассмотрим сдвоенный невыпуклый многогранник

$$\triangle T_1 = T_1^\sigma \cup (T_0 + v_0) = T_{\sigma',\mathbf{0}} \cup (T_0 + v_0), \tag{6.7}$$

который из-за его формы назовем $\vee$-*складкой* ($\vee$-fold). Введем для нее обозначение

$$T_1^\sigma \vee (T_0 + v_0) = T_1^\sigma \cup (T_0 + v_0). \tag{6.8}$$

Многогранник (6.7) составлен из двух параллелепипедов T_1^σ и $T_0 + v_0$ с общей $(d-1)$-мерной гранью

$$T_1^\sigma \cap (T_0 + v_0) = T_1(v_{\sigma'}) + v_{\mathbf{0}},$$

расположенной между

$$T_1(v_{\sigma'}) <_{H_{\sigma'}} T_1(v_{\sigma'}) + v_{\mathbf{0}} <_{H_{\sigma'}} T_1(v_{\sigma'}) + v_0 \tag{6.9}$$

по высоте относительно гиперплоскости $H_{\sigma'}$ в направлении полупространства $H_{\sigma'}^+$. Поскольку $T_1(v_{\sigma'})$ и $T_1(v_{\sigma'}) + v_0$ – противоположные грани параллелепипеда T_1, то из (6.4), (6.5) и (6.6), (6.7) следует формула

$$\operatorname{vol} \triangle T_1 = \operatorname{vol} T_1^\sigma + \operatorname{vol} T_0 \tag{6.10}$$

для объема складки $\triangle T_1$ (6.7) – образа параллелепипеда T_1 при подстановке $\triangle = \triangle_1$ (6.1). Из (6.7) и (6.9) получаем инвариантность

$$\operatorname{vol} \triangle T_1 = \operatorname{vol} T_1$$

объема параллелепипеда T_1 при том же преобразовании $\triangle = \triangle_1$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Предложение 6.1. 1. *Определенная в* (5.1)–(5.3) *подстановка параллелепипедов*

$$T_k \xrightarrow{\triangle} T_k^\sigma$$

имеет следующий геометрический смысл: $\triangle = \triangle_0$ *– тождественное отображение;* $\triangle = \triangle_1^-$ *– сжимающий косой сдвиг;* $\triangle = \triangle_k$ *– простой косой сдвиг для остальных* $k \neq 0, 1$.

2. *Отображение* $\vee$*-складки*

$$T_1 \xrightarrow{\triangle} \triangle T_1 = T_1^\sigma \vee (T_0 + v_0) \tag{6.11}$$

сохраняет объем (6.10).

6.3. Дефляция ядерных разбиений. Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ – разбиение (2.21), (2.23) тора $\mathbb{T}_L^d$, индуцированное вкладывающейся в тор $T \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}_L^d$ разверткой $T = T(v)$; и пусть $\triangle$ – подстановка (3.6)–(3.8) на множестве параллелепипедов $T_0, T_1, \ldots, T_d$. Далее, пусть

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) \ \xrightarrow{\triangle} \ \triangle\mathcal{T} = \mathcal{T}^\sigma(v) = \mathcal{T}(v^\sigma) \tag{6.12}$$

– отображение (5.15) множества ядерных разбиений $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ из теоремы 5.1. По предложению 6.1 отображения $T_k \xrightarrow{\triangle} T_k^\sigma$ $(k = 0, 1, \ldots, d)$ или сохраняют объемы параллелепипедов, или уменьшают. При этом недостающий объем всего исходного разбиения $\mathcal{T}$ восполняется (6.11) через образование $\vee$-складкок $T_1^\sigma \vee (T_0 + v_0)$ в преобразованном разбиении $\triangle\mathcal{T}$ или, иначе, – через добавление в $\triangle\mathcal{T}$ новых параллелепипедов вида T_0.

Таким образом, в результате преобразования $\mathcal{T} \xrightarrow{\triangle} \triangle\mathcal{T}$ разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ в нем в среднем происходит уменьшение объемов образующих его параллелепипедов T_k. По этой причине преобразование (6.12) целесообразно назвать *дефляцией*.

6.4. Дефляция двумерного ядерного разбиения. Рассматривается ядерное разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ размерности 2, изображенное на рис. 2.1. Для его ядра $T = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$ (2.24) на рис. 6.1 показан процесс образования $\vee$-складки $T_1^\sigma \vee (T_0 + v_0)$ (6.8) в случае сочетания $\sigma = \{0, 1\}$, когда v_0 – исчезающий луч, а v_1 – остающийся (доминантный) луч.

Звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ в разбиении $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ имеет лучи v_0, v_1, v_2 порядков $m_0 = 6$, $m_1 = 5$, $m_2 = 3$. У дефлированной звезды $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}$ порядки лучей $m_0^\sigma = m_0 + m_1 = 11$, $m_1^\sigma = 5$, $m_2^\sigma = 3$.

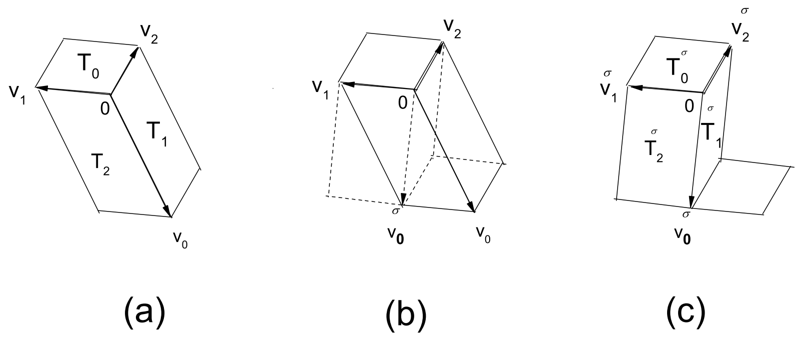

Рис. 6.1. (a) Исходное ядро T; (b) образование $\vee$-складки; (c) ядро T^σ после дефляции $\sigma = \{0, 1\}$.

Для того же сочетания $\sigma = \{0, 1\}$ на рис. 6.2 показан процесс дефляции $\mathcal{T} \xrightarrow{\triangle} \triangle\mathcal{T} = \mathcal{T}^\sigma$ (6.12) двумерного разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ на рис. 2.1. Весь дефляционный процесс происходит в многоугольной полосе, выделенной жирными границами на рис. 6.2(b). В результате дефляции порядок $m_0 = 6$ становится $m_0^\sigma = 11$, поэтому в разбиении $\triangle\mathcal{T} = \mathcal{T}^\sigma$ количество параллелограммов типа T_0 возрастает на 5. Все новые параллелограммы типа T_0 лежат в выделенной полосе и входят в образовавшиеся $\vee$-складки.

§7. Инфляция звезд

7.1. Инфляция звезды и барицентрические координаты. Обозначим через $\Sigma^{\langle\rangle}$ совокупность всех упорядоченных пар $\iota = \langle k_1, k_2 \rangle$ из двух элементов k_1, k_2 из множества индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$. Для произвольного $\iota = \langle k_1, k_2 \rangle$ определим операцию *инфляции*

$$v \xrightarrow{\iota} v^\iota = \{v_0^\iota, v_1^\iota, \ldots, v_d^\iota\} \tag{7.1}$$

на множестве всех звезд $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ (см. определение 1.1), полагая $v_{k_1}^\iota = v_{k_1} - v_{k_2}$ и $v_k^\iota = v_k$ для $k \neq k_1$.

Предложение 7.1. *Для произвольной звезды v ее инфляция v^ι, опредеоенная в* (7.1)*, также является звездой.*

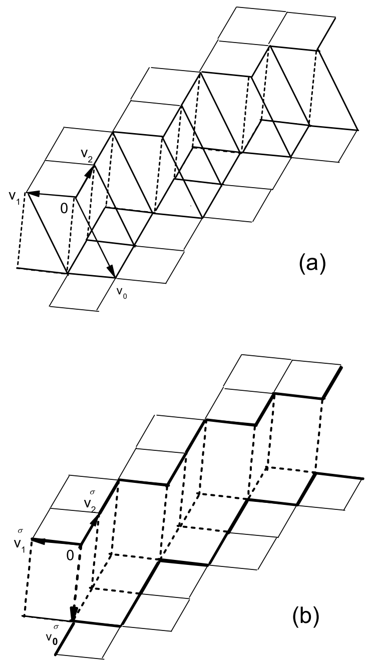

Рис. 6.2. (a) Образование $\vee$-складок в разбиении $\mathcal{T}$ для $\sigma = \{0,1\}$;
(b) дефлированное разбиение $\triangle\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\sigma}$.

Доказательство. По критерию 1.1 получаем представление

$$\mathbf{0} = \pi_0 v_0 + \pi_1 v_1 + \ldots + \pi_d v_d \tag{7.2}$$

для точки $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ – центра звезды v и, значит, она имеет *барицентрические координаты*

$$\mathbf{0}_v = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_d) \tag{7.3}$$

относительно замкнутого d-мерного симплекса $\Delta(v)$ (1.2), вершины которого есть концы лучей звезды v. В (7.2) коэффициенты π_k удовлетворяют условию *нормирования*

$$\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_d = 1, \quad \text{где} \quad \pi_k > 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, d).$$

Пусть для определенности $\iota = \langle k_1, k_2 \rangle = \langle 0, 1 \rangle$. Если переписать представление (7.2) в виде

$$\mathbf{0} = \pi_0(v_0 - v_1) + (\pi_1 + \pi_0)v_1 + \ldots + \pi_d v_d,$$

то после нормирования получим

$$\mathbf{0} = \pi_0^\iota v_0^\iota + \pi_1^\iota v_1^\iota + \ldots + \pi_d^\iota v_d^\iota \tag{7.4}$$

с коэффициентами

$$\pi_1^\iota = \frac{\pi_1 + \pi_0}{1 + \pi_0}, \quad \pi_k^\iota = \frac{\pi_k}{1 + \pi_0} \quad \text{для} \quad k \neq 1. \tag{7.5}$$

Представление (7.4), (7.5) означает, что $\mathbf{0}$ остается внутренней точкой симплекса $\Delta(v^\iota)$ для множества лучей v^ι из (7.1). Снова применяя критерий 1.1, убеждаемся, что v^ι является звездой. □

7.2. Типы звезд и их эквивалентность. Будем говорить, что две звезды v и v' *аффинно эквивалентны* или, просто, – *эквивалентны*

$$v \sim v', \tag{7.6}$$

если $v' = Av$ для некоторого преобразования A из вещественной группы аффинных преобразования $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ размерности d.

В [13] доказана следующая

Лемма 7.1. *Имеет место следующая равносильность*

$$v \sim v' \;\; \Leftrightarrow \;\; \mathbf{0}_v \sim \mathbf{0}_{v'}, \tag{7.7}$$

где эквивалентность $\mathbf{0}_v \sim \mathbf{0}_{v'}$ означает совпадение барицентрических координат с точностью до их перестановки.

Согласно (7.7), барицентрические координаты $\mathbf{0}_v$ центра звезды v целесообразно назвать *типом* звезды v.

Скажем, что звезда v имеет *иррациональный* тип, если барицентрические координаты ее центра (7.3) удовлетворяют условию:

$$\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_d \quad \textit{линейно независимы над} \quad \mathbb{Z}. \tag{7.8}$$

В [13] доказано, что условия иррациональности (7.8) и (2.20) звезды v и вектора сдвига тора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из (2.13) эквивалентны.

7.3. Связь между производными и инфляционными звездами. Если нужно выделит индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ, то будем для σ-производной (1.7) использовать еще и другое развернутое обозначение

$$v^{\sigma} = v^{\{k_1,k_2\}}.$$

По определению (1.7) имеет место формула коммутирования

$$v^{\{k_1,k_2\}} = v^{\{k_2,k_1\}}. \tag{7.9}$$

Поэтому для нерывожденной звезды v существуют

$$\sharp\Sigma = C_{d+1}^2 = \frac{d(d+1)}{2}$$

ее производных звезд v^{σ}.

Аналогично для упорядоченной пары $\iota = \langle k_1, k_2\rangle$ из $\Sigma^{\langle\rangle}$ введем обозначение

$$v^{\iota} = v^{\langle k_1,k_2\rangle}.$$

Согласно определению (7.1), в этом случае формула коммутирования (7.9) уже не выполняется

$$v^{\langle k_1,k_2\rangle} \neq v^{\langle k_2,k_1\rangle}$$

и, следовательно, для произвольной звезды v по предложению 7.1 инфляционных звезд v^{ι} существует в два раза больше

$$\sharp\Sigma^{\langle\rangle} = d(d+1).$$

Пусть $\iota = \langle k_1, k_2\rangle$ и $\sigma = \{k_1, k_2\}$. Примем соглашение

$$v^{\iota\sigma} = (v^{\iota})^{\sigma}.$$

Выпишем несколько формул связи между операциями дифференцирования и инфлирования. Первые две формулы

$$v^{\langle k_1,k_2\rangle\{k_1,k_2\}} = v, \quad v^{\langle k_2,k_1\rangle\{k_1,k_2\}} = v \tag{7.10}$$

выполняются для произвольной звезды v. Чтобы привести аналогичные (7.10) формулы с другим порядком операций $v^{\sigma\iota}$, введем для производных звезд $v^{\sigma} = v^{\{k_1,k_2\}}$ дополнительные индексы

$$v_{k_1}^{\{k_1,k_2\}}, \quad v_{k_2}^{\{k_1,k_2\}}, \tag{7.11}$$

указывающие, какой из лучей v_{k_1} или v_{k_2} является доминантным. В этих обозначениях для невырожденных звезд v справедливы формулы

$$v_{k_2}^{\{k_1,k_2\}\langle k_1,k_2\rangle} = v, \quad v_{k_1}^{\{k_1,k_2\}\langle k_2,k_1\rangle} = v. \tag{7.12}$$

Пусть снова для определенности $\iota = \langle k_1, k_2 \rangle = \langle 0, 1 \rangle$. Согласно (7.5) имеет место формула

$$\begin{aligned}(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)^\iota &= (\pi_0^\iota, \pi_1^\iota, \dots, \pi_d^\iota) \\ &= \Big(\frac{\pi_0}{1+\pi_0}, \frac{\pi_1+\pi_0}{1+\pi_0}, \dots, \frac{\pi_d}{1+\pi_0}\Big)\end{aligned} \tag{7.13}$$

преобразования барицентрических координат $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d$ (7.3) для произвольных звезд v.

Также пусть $\sigma = \{k_1, k_2\} = \{0, 1\}$ и луч v_1 будет доминантным. Тогда используя определение (1.7) производной звезды v^σ, в обозначениях (7.11) аналогично (7.13) получаем формулу

$$\begin{aligned}(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)_1^\sigma &= (\pi_0^\sigma, \pi_1^\sigma, \dots, \pi_d^\sigma) \\ &= \Big(\frac{\pi_0}{1-\pi_0}, \frac{\pi_1-\pi_0}{1-\pi_0}, \dots, \frac{\pi_d}{1-\pi_0}\Big)\end{aligned} \tag{7.14}$$

для невырожденных звезд v. Данная формула интересна тем, что позволяет по барицентрическим координатам центра звезды v определить ее свойства.

1) Является ли звезда v невырожденной: $\pi_{k_1} \neq \pi_{k_2}$ для всех $k_1 \neq k_2$?

2) Который из лучей v_{k_1} или v_{k_2} звезды v будет доминантным? Для $\sigma = \{k_1, k_2\}$ луч v_{k_2} будет доминантным, если $\pi_{k_1} < \pi_{k_2}$.

Приведенные выше формулы (7.10) и (7.12) можно проверить с помощью формул преобразования барицентрических координат (7.13) и (7.14).

§8. Инфляция звезд и параллелепипедов

8.1. Вложение инфляционных звезд. Пусть $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ – звезда имеющая весовой вектор $\mathbf{m} = (m_0, m_1, \dots, m_d)$ (4.4). Тогда по определению (7.1) инфляционная звезда $v^\iota = \{v_0^\iota, v_1^\iota, \dots, v_d^\iota\}$ для $\iota = \langle k_1, k_2 \rangle$ будет иметь *весовой вектор*

$$\mathbf{m}^\iota = (m_0^\iota, m_1^\iota, \dots, m_d^\iota) \tag{8.1}$$

с *весами*

$$m_{k_1}^\iota = m_{k_1} - m_{k_2}, \quad m_k^\iota = m_k \quad \text{для} \quad k \neq k_1. \tag{8.2}$$

Скажем, что звезда v с весовым вектором $\mathbf{m}$ *допускает* инфляцию $\iota = \langle k_1, k_2 \rangle$ из $\Sigma^{\langle\rangle}$, если весовой вектор инфляционной звезды v^ι положителен,

$$\mathbf{m}^\iota > 0, \tag{8.3}$$

т.е. все веса (8.2) положительны.

Если v – звезда, то по предложению 7.1 множество лучей v^ι также будет звездой для любой инфляции $\iota \in \Sigma^{\langle\rangle}$; и если звезда v допускает (8.3) инфляцию ι, то для инфляционной звезды v^ι существует определенная в (2.23) развертка

$$T^\iota = T(v^\iota) = T_0^\iota \cup T_1^\iota \cup \ldots \cup T_d^\iota \tag{8.4}$$

с векторами перекладывания $v_0^\iota, v_1^\iota, \ldots, v_d^\iota$. Поэтому для инфляционной развертки T^ι можно поставить вопрос о вложении (см. определение 2.1)

$$T^\iota \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}_L^d$$

в тор $\mathbb{T}_L^d$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ и о соответствующем вложении звезды v^ι (см. определение 2.2).

Теорема 8.1. *Пусть произвольная звезда $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ вкладывается* (2.27) *в тор $\mathbb{T}_L^d$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ с иррациональным* (2.20) *вектором α. Тогда для любой допустимой* (8.3) *инфляции $\iota \in \Sigma^{\langle\rangle}$ инфляционная звезда $v^\iota = \{v_0^\iota, v_1^\iota, \ldots, v_d^\iota\}$ также вкладывается*

$$v^\iota \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}_L^d$$

в тот же тор $\mathbb{T}_L^d$ относительно сдвига S.

Доказательство. На торе $\mathbb{T}_L^d$ рассмотрим следующее множество

$$\mathcal{T}^\iota = \mathrm{Orb}(T_0^\iota)^{m_0} \cup \mathrm{Orb}(T_1^\iota)^{m_1^\iota} \cup \ldots \cup \mathrm{Orb}(T_d^\iota)^{m_d^\iota} \tag{8.5}$$

состоящее из орбит

$$\mathrm{Orb}(T_k^\iota)^{m_k^\iota} = \{S^j(T_k^\iota);\ j = 0, 1, \ldots, m_k^\iota - 1\}$$

с весами m_k^ι из (8.2). Развертка $T^\iota = T(v^\iota)$ (8.4) перекладывается векторами $v_0^\iota, v_1^\iota, \ldots, v_d^\iota$, поэтому множество $\mathcal{T}^\iota$ замкнуто относительно сдвига тора S. Так как сдвиг $S = S_\alpha$ иррациональный (2.20), множество (8.5) покрывает весь тор

$$\mathcal{T}^\iota = \mathbb{T}_L^d. \tag{8.6}$$

С помощью предложения 9.1 можно показать, что объем всех параллелепипедов $S^j(T_k^\iota)$ из множества (8.5) тот же самый, что и объем всех параллелепипедов $S^j(T_k)$ из исходного разбиения $\mathcal{T}$ в (4.1). Отсюда и существования покрытия (8.6) следует, что разные параллелепипеды $S^j(T_k^\iota)$ не имеют общих внутренних точек.

Таким образом, объединение (8.5) является разбиением тора $\mathbb{T}_L^d$ на параллелепипеды $S^j(T_k^\iota)$. $\square$

8.2. Лучи. Пусть $\iota = \langle 0, 1\rangle$ – последовательность из двух *фиксированных элементов* $0, 1$; $\iota' = \mathcal{D} \setminus \iota$ – дополнение ι в $\mathcal{D}$ из $d' = d - 1$ элемента; $\iota'' \subset \iota'$ – любое множество из $d'' = d - 2$ элементов.

Определим следующие лучи звезды $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$:

v_0, v_1 – *связанные лучи*: лучи отвечающие ι;

v_0 – *исчезающий луч*;

v_1 – *остающийся луч* (вычитаемый луч);

v_k для $k \in \iota'$ – *свободные лучи*;

$v_0^\iota = v_{\mathbf{0}} = v_0 - v_1$ – *новый луч* инфляционной звезды $v^\iota = \{v_{\mathbf{0}}, v_1, ..., v_d\}$.

8.3. Инфляционные параллелепипеды и их характеристики. Перечислим параллелепипеды из инфляционного ядра $T^\iota = T(v^\iota)$ для $\iota = \langle 0, 1\rangle$:

$T_0^\iota = T_{\iota',1}$ – неменяющийся параллелепипед с остовом $v_{\iota',1} = \{v_{\iota'}, v_1\}$;

$T_1^\iota = T_{\iota',\mathbf{0}}$ – *поглощающий* параллелепипед увеличенного объема с остовом $v_{\iota',\mathbf{0}} = \{v_{\iota'}, v_{\mathbf{0}}\}$, где $v_{\iota'}$ – множество лучей v_k с индексами $k \in \iota'$;

$T_k^\iota = T_{\iota'',\mathbf{0},1}$ – сохраняющие объем *деформирующиеся* параллелепипеды с остовами $v_{\iota'',\mathbf{0},1} = \{v_{\iota''}, v_{\mathbf{0}}, v_1\}$, где $v_{\iota''}$ – множество лучей v_k с индексами $k \in \iota''$, при этом ι'' пробегает все $(d-2)$-подмножества из ι'.

8.4. Подстановки базисных параллелепипедов. Перечислим данные подстановки:

$$T_0 = T_{\iota',1} \xrightarrow{\bigtriangledown_0} T_{\iota',1} = T_0^\iota, \tag{8.7}$$

$$T_1 = T_{\iota',0} \xrightarrow{\bigtriangledown_1^-} T_{\iota',\mathbf{0}} = T_1^\iota, \tag{8.8}$$

$$T_k = T_{\iota'',0,1} \xrightarrow{\bigtriangledown_k} T_{\iota'',\mathbf{0},1} = T_k^\iota \quad \text{для} \quad k \neq 0, 1. \tag{8.9}$$

8.5. Подстановки орбитных параллелепипедов. Согласно (8.1), (8.2), для последовательности $\iota = \langle 0, 1\rangle$ весовым вектором будет

$$\mathbf{m}^\iota = (m_0^\iota, m_1^\iota, \ldots, m_d^\iota) = (m_0 - m_1, m_1, \ldots, m_d).$$

Поэтому

$$S^j(T_0) \xrightarrow{\bigtriangledown_0} S^j(T_0) = S^j(T_0^\iota) \tag{8.10}$$

для $j = 0, \ldots, m_0^\iota - 1$;

$$S^j(T_1 \cup (T_0 + v_0^\iota)) \xrightarrow{\bigtriangledown_1} S^j(T_1^\iota) \tag{8.11}$$

для $j = 0, \ldots, m_1^\iota - 1$;

$$S^j(T_k) \xrightarrow{\nabla_k} S^j(T_k^\iota) \tag{8.12}$$

для $k \neq 0, 1$ и $j = 0, ..., m_k^\iota - 1$.

8.6. Выпрямление $\vee$-складок. Как и в (6.8), у нас снова появляется $\vee$-*складка* – сдвоенный невыпуклый многогранник

$$T_1 \vee (T_0 + v_0^\iota) = T_1 \cup (T_0 + v_0^\iota). \tag{8.13}$$

Только теперь преобразование

$$T_1 \vee (T_0 + v_0^\iota) \xrightarrow{\nabla_1} T_1^\iota \tag{8.14}$$

представляет собою обратную операцию *выпрямления* $\vee$-складки. При такой операции происходит *поглощение* всех m_1^ι параллелепипедов

$$S^j(T_0 + v_0^\iota) = S^{j+m_0^\iota}(T_0) \tag{8.15}$$

для $j = 0, \ldots, m_1^\iota - 1$ из начального разбиения $\mathcal{T}$. Образование $\vee$-складок (8.13) происходит посредством операции *подтягивания* параллелограммов типа T_0.

§9. Инфляция разбиений

9.1. Геометрия подстановок параллелепипедов при инфляции. Выясним геометрический смысл инфляционных подстановок параллелепипедов (8.7)–(8.9).

Предложение 9.1. 1. *Определенные в* (8.7)–(8.9) *инфляционные подстановки параллелепипедов*

$$T_k \xrightarrow{\nabla} T_k^\iota$$

имеют следующий геометрический смысл.

0) $\nabla = \nabla_0$ *– тождественное отображение,* $\mathrm{vol}\, T_0^\iota = \mathrm{vol}\, T_0$;

1) $\nabla = \nabla_1^-$ *– растягивающий косой сдвиг,* $\mathrm{vol}\, T_1^\iota > \mathrm{vol}\, T_1$;

k) $\nabla = \nabla_k$ *($k \neq 0, 1$) – простой косой сдвиг, сохраняющий объем параллелепипедов,* $\mathrm{vol}\, T_k^\iota = \mathrm{vol}\, T_k$.

2. *Отображение выпрямления $\vee$-складки* $T_1 \vee (T_0 + v_0^\iota) \xrightarrow{\nabla} T_1^\iota$*, определенное в* (8.14)*, сохраняет объем*

$$\mathrm{vol}\, T_1 + \mathrm{vol}\, T_0 = \mathrm{vol}\, T_1^\iota.$$

Доказательство. Эти утверждения мы получаем следуя доказательству предложения 6.1. □

9.2. Подстановки и инфляция разбиений.

Теорема 9.1. *Для всех допустимых* (8.3) *инфляций* $\iota \in \Sigma^{\langle\rangle}$ *существует отображение*

$$\iota \to \bigtriangledown = \bigtriangledown(\iota)$$

в множество подстановок $\bigtriangledown$ *вида* (8.10)–(8.12) *такое, что определенное в* (2.23) *ядерное разбиение* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ *тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *для произвольной звезды* v *переводится*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) \xrightarrow{\bigtriangledown} \mathcal{T}^\iota = \mathcal{T}(v^\iota) \tag{9.1}$$

подстановкой $\bigtriangledown$ *в инфляционное ядерное разбиение* $\mathcal{T}^\iota = \mathcal{T}(v^\iota)$, *порождаемое инфляционной звездой* v^ι (7.1).

Доказательство. *Случай* $\iota = \langle 0, 1\rangle$. Используя явный вид, см. 8.5, весового вектора $\mathbf{m}^\iota$, исходное разбиение (4.1)

$$\mathcal{T} = \mathrm{Orb}(T_0)^{m_0} \cup \mathrm{Orb}(T_1)^{m_1} \ \cup_{k\neq 0,1} \mathrm{Orb}(T_k)^{m_k}$$

разложим на следующие объединения орбит

$$\mathrm{Orb}(T_0)^{m_0^\iota} \ \cup_{k\neq 0,1} \mathrm{Orb}(T_k)^{m_k} \tag{9.2}$$

и

$$\mathrm{Orb}(T_1)^{m_1} \cup \mathrm{Orb}(T_0)^{m_0}_{m_0^\iota} = \mathrm{Orb}(T_1 \cup (T_0 + v_0^\iota))^{m_1^\iota}. \tag{9.3}$$

Если теперь в орбитах (9.2), (9.3) выполнить подстановки (8.10)–(8.12), то получим инфляционное ядерное разбиение $\mathcal{T}^\iota = \mathcal{T}(v^\iota)$, которое в силу теоремы 8.1 и определения 2.1 состоит как раз из орбит (9.2), (9.3).

Случай произвольного $\iota \in \Sigma^{\langle\rangle}$. Вопрос сводится к рассмотренному выше $\iota = \langle 0, 1\rangle$ аналогично (5.21). □

Преобразование (9.1) из теоремы 9.1

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\bigtriangledown} \bigtriangledown\mathcal{T} = \mathcal{T}^\iota$$

назвается *инфляцией*. Оно в некотором смысле (7.10), (7.12) обратно преобразованию дефляции (6.12). По предложению 9.1 отображения $T_k \xrightarrow{\bigtriangledown} T_k^\sigma$ $(k = 0, 1, \ldots, d)$ или сохраняют объемы параллелепипедов, или увеличивают их объемы за счет выпрямления $\vee$-складок $T_1 \vee (T_0 + v_0^\iota) \overset{\bigtriangledown}{\to} T_1^\iota$ (8.14) с одновременным поглощением части параллелепипедов вида T_0 из исходного разбиения $\mathcal{T}$.

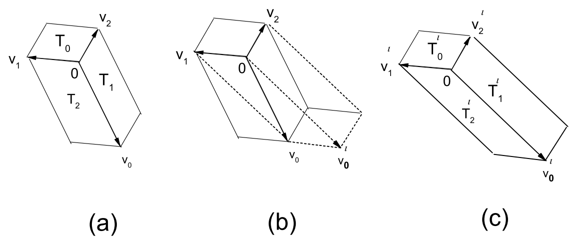

Рис. 9.1. (a) Исходное ядро T; (b) инфляция и подтягивание параллелограмма T_0; (c) ядро T^ι после инфляции $\iota = \langle 0, 1\rangle$.

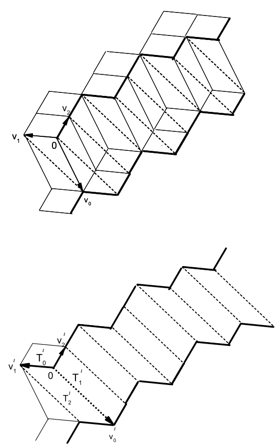

Рис. 9.2. Подтягивание параллелограммов типа T_0 и образование $\vee$-складок. Выпрямление $\vee$-складок и образование инфляционного разбиения $\bigtriangledown\mathcal{T} = \mathcal{T}^\iota$.

9.3. Инфляция двумерного ядерного разбиения. Снова рассматривается ядерное разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ размерности $d = 2$, изображенное на рис. 2.1.

В качестве допустимой (8.3) инфляции $\iota \in \Sigma^{\langle\rangle}$ выбрана $\iota = \langle 0, 1\rangle$. Это возможно, так как звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ в разбиении $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ имеет лучи v_0, v_1, v_2 порядков $m_0 = 6$, $m_1 = 5$, $m_2 = 3$; и, следовательно, по определению (8.1) у инфляционной звезды $v^\iota = \{v_0^\iota, v_1^\iota, v_2^\iota\}$

будет положительный весовой вектор

$$\mathbf{m}^{\iota} = (m_0^{\iota}, m_1^{\iota}, m_2^{\iota}) = (1, 5, 3) > 0. \tag{9.4}$$

Для ядра $T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$ на рис. 9.1 показан процесс (8.14) выпрямления $\vee$-складки

$$T_1 \vee (T_0 + v_0^{\iota}) \xrightarrow{\bigtriangledown_1} T_1^{\iota} \tag{9.5}$$

при котором происходит поглощение всех $m_1^{\iota} = 5$ параллелограммов типа T_0 из начального разбиения $\mathcal{T}$ (см. рис. 9.2). На первом шаге происходит подтягивание параллелограмма T_0 к ядерному параллелограмму $T_1 \subset T$ (см. рис. 9.1 (b)), затем выпрямление появившейся $\vee$-складки (см. рис. 9.1 (c)).

На рис. 9.2 (a) показан процесс подтягивания параллелограммов типа T_0 ко всем соседним параллелограммам типа T_1 и образования $\vee$-складок в исходном разбиении $\mathcal{T}$. Затем на рис. 9.2 (b) происходит выпрямление появившихся на первом этапе $\vee$-складок. После инфляции (9.5) в разбиении $\bigtriangledown\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\iota}$, согласно (9.4), остается единственный ($m_0^{\iota} = 1$) параллелограмм $T_0^{\iota} = T_0$ из ядра T^{ι}.

Список литературы

1. N. G. de Bruijn, *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane I, II.* — Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Series A **84 (1)** (1981), 39–66.
2. B. Grünbaum, G. C. Shephard, *Tilings and Patterns.* W. H. Freeman, San Francisco, 1987.
3. M. Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers and the return of Dr. Matrix.* W. H. Freeman and Co., New York, 1989.
4. P. Arnoux, S. Ito, *Pisot Substitutions and Rauzy fractals.* — Bulletin of the Belgian Mathematical Society **8**, No. 2 (2001), 1–27.
5. S. Ito, *Diophantine approximations, substitutions, and fractals.* In: N.P. Fogg, Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1794. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.
6. В. Г. Журавлев, А. В. Малеев, *Симметрия подобия двумерного квазипериодического разбиения Рози.* — Кристаллография **54** (2009), 400–409.
7. S. Akiyama, J-Y. Lee, *Determining quasicrystal structures on substitution tilings.* — Philosophical Magazine A **91**, No. 19 (2011), 2709–2717.
8. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
9. G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions.* — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.

10. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.
11. A. V. Shutov, A. V. Maleev, V. G. Zhuravlev, *Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry.* — Acta Crystallogr. **A66** (2010), 427–437.
12. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН, сер. матем. **71** (2007), No. 2, 89–122.
13. В. Г. Журавлев, *Универсальные ядерные разбиения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **490** (2020), 49–93.
14. В. Г. Журавлев, *Локальный алгоритм построения производных разбиений двумерного тора.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **479** (2019), 85–120.
15. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.* — Современные проблемы матем., МИАН **299** (2017), 283–303.
16. S. Ito, M. Ohtsuki, *Parallelogram tilings and Jacobi-Perron algorithm.* — Tokyo J. Math. **17**, No. 1 (1994), 33–58.
17. P. Arnoux, V. Berthé, H. Ei, Sh. Ito, *Tilings, Quasicrystals, Discrete Planes, Generalized Substitutions, and Multidimensional Continued Fractions.* — Maison de l'Informatique et des Mathématiques Discrètes (MIMD), Paris (2001), 59–78.
18. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби.* Владимир, ВлГУ, 2019.
19. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
20. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, Москва, 2012, 82–102.
21. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, Москва, 1953.
22. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, том 2. Киев, 1952.

Zhuravlev V. G. Inflation and deflation of the karyon tilings.

The substitution transformations of inflation and deflation are defined for the karyon tilings $\mathcal{T}(v)$ of multidimensional tori $\mathbb{T}^d$. Such tilings $\mathcal{T}(v)$ consist of parallelepipeds and are generated by its karyons. Stars v, sets of $d+1$ vectors in the space $\mathbb{R}^d$, are frames of the karyons. The interest in karyon tilings is due to their connections with multidimensional continued fractions.

Владимирский государственный университет
пр. Строителей, 11, 600024 Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 31 мая 2023 года