Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 523, 2023 г.

В. Г. Журавлев

ГОМЕОМОРФИЗМЫ ОКРУЖНОСТИ И ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Введение

Цель статьи – получить обобщение одномерных разбиений окружности [1] на нелинейные отображения. Пусть f – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с иррациональным числом вращения α_f.

В теореме 2.1 для него строятся разбиения $\mathcal{T}^l$ окружности $\mathbb{T}$ уровней $l = 0, 1, 2, \ldots$, квазиинвариантные относительно гомеоморфизма f:

$$f(\mathcal{T}^l) = \mathcal{T}^l \setminus T^l \cup f(T^l),$$

где $f : T^l \longrightarrow f(T^l) = T^l$ – перекладывание отрезков T^l_0 и T^l_1 ядра

$$T^l = T^l_1 \cup T^l_0 = [v^l_1, 1) \cup [0, v^l_0) = [v^l_1, v^l_0) \tag{0.1}$$

разбиения $\mathcal{T}^l$. Концам отрезков v^l_0, v^l_1 приписаны веса $m^l_{f,0}, m^l_{f,1}$ (2.13). В теореме 2.1 показано, что ядро T^l обладает свойством минимальности: среди точек бесконечной положительной орбиты $\mathrm{Orb}^+(0) = \{f^j(0);\ j = 1, 2, \ldots\}$ точка $v^{l+1} = f^{m^{l+1}}(0)$, где $m^{l+1} = m^l_{f,0} + m^l_{f,1}$, первой попадает в ядро T^l.

Точка $x \in \mathbb{T}$ называется предельной справа (слева), если любой непустой отрезок $[x, *)$ ($[*, x)$) $\subset \mathbb{T}$ содержит бесконечно много точек орбиты точки x. При выполнении обоих свойств точка x считается двусторонне предельной. Если точка $x_0 = 0 \in \mathbb{T}$ двусторонне предельная для гомеоморфизма f, то в предложении 2.1 доказано, что

$$|T^l| = |[v^l_1, v^l_0)| \to 0 \quad \text{при} \quad l \to +\infty. \tag{0.2}$$

Здесь $|[v^l_1, v^l_0)|$ обозначает длину отрезка $[v^l_1, v^l_0)$.

Таким образом, получается бесконечный процесс измельчения

$$\mathcal{T}^0 \supset \mathcal{T}^1 \supset \ldots \supset \mathcal{T}^l \supset \mathcal{T}^{l+1} \supset \ldots \tag{0.3}$$

разбиений окружности $\mathbb{T}$ с ядрами (0.1), обладающими свойством (0.2).

Ключевые слова: гомеоморфизмы окружности, число вращения, цепные дроби.

Это позволило в теореме 4.1 получить приближения

$$\Big|\alpha_f - \frac{p^l_{f,0}}{m^l_{f,0}}\Big| \leqslant \frac{1}{m^l_{f,0}m^l_{f,1}}, \qquad \Big|\alpha_f - \frac{p^l_{f,1}}{m^l_{f,1}}\Big| \leqslant \frac{1}{m^l_{f,0}m^l_{f,1}}. \tag{0.4}$$

для иррационального числа вращения α_f гомеоморфизма f. В (0.4) числители $p^l_{f,0}, p^l_{f,1}$ определяются самим гомеоморфизмом f. Значение теоремы 4.1 состоит в том, что она позволяет находить приближения цепными дробям $p^l_{f,0}/m^l_{f,0}$, $p^l_{f,1}/m^l_{f,1}$ для числа α_f, которое не задается непосредственно самим гомеоморфизмом f и определяется через некий предел (1.3). Такое определение не позволяет получать для α_f хорошие приближения, тогда как числители и знаменатели приближений (0.4) вычисляются конечным алгоритмом, основанным на ядерных разбиениях окружности $\mathcal{T}^l$ из (0.3), не требующим знания числа вращения α_f.

§1. Гомеоморфизмы окружности

1.1. Поднятие гомеоморфизма. См. [2, 3] и [4]. Пусть

$$f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T} \tag{1.1}$$

– сохраняющий ориентацию *гомеоморфизм* окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, которую иногда будем отождествлять

$$\mathbb{I} \overset{\pi}{\underset{\sim}{\to}} \mathbb{T}, \quad x \mapsto x \bmod 1 \tag{1.2}$$

с ее разверткой – единичным отрезком $\mathbb{I} = [0, 1)$. *Поднятие*

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

гомеоморфизма f на универсальную накрывающую

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}, \quad x \to x \bmod 1$$

тора $\mathbb{T}$ определяется уравнением $\widehat{f}(x) = \widehat{f}(\{x\}) + [x]$ и начальными условиями $\widehat{f}(\{x\}) \equiv f(\{x\}) \bmod 1$, $\widehat{f}(0) = f(0)$ таким образом, чтобы функция $\widehat{f}$ была непрерывной.

1.2. Число вращения. Предел

$$\tau(\widehat{f}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\widehat{f}^n(x)}{n} \tag{1.3}$$

существует и не зависит от выбора точки $x \in \mathbb{R}$. Здесь $\widehat{f}^n = \widehat{f} \circ \ldots \circ \widehat{f}$ – n-кратная композиция. Величина

$$\alpha_f = \tau(f) = \tau(\widehat{f}) \tag{1.4}$$

называется *числом вращения* отображения f.

Число $\alpha_f = \tau(f)$ рационально тогда и только тогда, когда отображения f имеет неподвижные точки. Далее будем предполагать число вращения *иррациональным* и, значит, $f^n(x) \neq f^{n'}(x)$ для всех $x \in \mathbb{T}$, $n \neq n'$, т.е. в *орбите*

$$\mathrm{Orb}_f(x) = \{f^n(x);\ n = 0, 1, 2, \ldots\} \tag{1.5}$$

любого $x \in \mathbb{T}$ нет одинаковых точек.

§2. Ядерные разбиения окружности

2.1. Ядро разбиения. Ядро 0-го уровня

$$T^0 = T_0^0 \cup T_1^0 \tag{2.1}$$

состоит из двух отрезков

$$T_0^0 = [0, f(0)), \quad T_1^0 = [f(0), 1). \tag{2.2}$$

Используя (1.2), определим также разбиение окружности 0-го уровня

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}_0^0 \cup \mathcal{T}_1^0, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{T}_0^0 = T_0^0$, $\mathcal{T}_1^0 = T_1^0$. Ядро 1-го уровня

$$T^1 = T_0^1 \cup T_1^1 \tag{2.4}$$

состоит из двух отрезков

$$T_0^1 = [0, f^2(0)), \quad T_1^1 = [f^1(0), 1), \tag{2.5}$$

если точка $f^2(0)$ попадает в интервал T_0^0, и

$$T_0^1 = [0, f^1(0)), \quad T_1^1 = [f^2(0), 1), \tag{2.6}$$

если $f^2(0)$ попадает в интервал T_1^0. Удобно отрезки (2.5) и (2.6) записать более единообразно

$$T_0^1 = [0, v_0^1), \quad T_1^1 = [v_1^1, 1). \tag{2.7}$$

Припишем точкам v_0^1, v_1^1 *веса*

$$m_0^1 = 2,\ m_1^1 = 1 \quad \text{или} \quad m_0^1 = 1,\ m_1^1 = 2 \tag{2.8}$$

в случае (2.5) или (2.6) соответственно. Таким образом, имеем

$$v_0^1 = f^{m_0^1}(0), \quad v_1^1 = f^{m_1^1}(0). \tag{2.9}$$

Для номера $k = 0, 1$ интервала T_k^1 через $k' = 1, 0$ обозначим номер дополнительного интервала $T_{k'}^1$. Определим разбиение окружности 1-го уровня

$$\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}_0^1 \cup \mathcal{T}_1^1,$$

где $\mathcal{T}_k^1 = T_k^1 \cup f^1(T_k^1) \cup \ldots \cup f^{m_{k'}^1 - 1}(T_k^1)$ – *орбиты* интервалов T_k^1. В силу непрерывности гомеоморфизма f из (1.1), различные интервалы $f^i(T_k^1)$ не пересекаются. Поэтому $\mathcal{T}_k^1$ представляют собою *орбитные разбиения*, порождаемые интервалами T_k^1. *Орбиты* для них обозначим

$$\mathrm{Orb}(T_k^1) = \{f^j(T_k^1);\ j = 0, 1, \ldots, m_{k'} - 1\}. \tag{2.10}$$

Лемма 2.1. *Пусть дано ядро l-го уровня*

$$T^l = T_0^l \cup T_1^l = [v_1^l, 1) \cup [0, v_0^l) = [v_1^l, v_0^l), \tag{2.11}$$

состоящее из двух отрезков

$$T_0^l = [0, v_0^l), \quad T_1^l = [v_1^l, 1), \tag{2.12}$$

и пусть их концы v_k^l имеют веса m_k^l. Тогда точка

$$v^{l+1} = f^{m_1^l}(v_0^l) = f^{m_0^l}(v_1^l) = f^{m^{l+1}}(0)$$

веса

$$m^{l+1} = m_0^l + m_1^l \tag{2.13}$$

принадлежит ядру (2.11),

$$v^{l+1} \in T^l. \tag{2.14}$$

Доказательство. Рассмотрим отрезки

$$\begin{aligned} f^{m_1^l}([0, v_0^l)) &= [f^{m_1^l}(0), f^{m_1^l}(v_0^l)) = [v_1^l, v^{l+1}), \\ f^{m_0^l}([v_1^l, 0)) &= [f^{m_0^l}(v_1^l), f^{m_0^l}(0)) = [v^{l+1}, v_0^l). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Поскольку f из (1.1) – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности $\mathbb{T}$, эти отрезки имеют общий конец v^{l+1} и

$$[v_1^l, v^{l+1}),\ [v^{l+1}, v_0^l) \subset T^l = [v_1^l, v_0^l).$$

Поэтому получаем разбиение

$$[v_1^l, v^{l+1}) \cup [v^{l+1}, v_0^l) = [v_1^l, v_0^l) \tag{2.16}$$

отрезка $T^l = [v_1^l, v_0^l)$, откуда следует включение (2.14). $\square$

Если построено ядро T^l, то ядро $(l+1)$-го уровня

$$T^{l+1} = T_0^{l+1} \cup T_1^{l+1} \tag{2.17}$$

определяется по индукции. Оно состоит из двух отрезков

$$T_0^{l+1} = [0, v_0^{l+1}), \quad T_1^{l+1} = [v_1^{l+1}, 1), \tag{2.18}$$

где

$$\begin{array}{lll} v_0^{l+1} = v^{l+1}, & v_1^{l+1} = v_1^l, & \text{если} \quad v^{l+1} \in T_0^l, \\ v_0^{l+1} = v_0^l, & v_1^{l+1} = v^{l+1}, & \text{если} \quad v^{l+1} \in T_1^l. \end{array} \tag{2.19}$$

Следовательно, концы v_k^{l+1} имеют веса

$$\begin{array}{lll} m_0^{l+1} = m^{l+1}, & m_1^{l+1} = m_1^l, & \text{если} \quad v^{l+1} \in T_0^l, \\ m_0^{l+1} = m_0^l, & v_1^{l+1} = m^{l+1}, & \text{если} \quad v^{l+1} \in T_1^l, \end{array} \tag{2.20}$$

где $m^{l+1} = m_0^l + m_1^l$ согласно (2.13).

2.2. Разбиения окружности. Используя ядро T^{l+1}, определим объединение отрезков

$$\mathcal{T}^{l+1} = \mathcal{T}_0^{l+1} \cup \mathcal{T}_1^{l+1}, \tag{2.21}$$

где $\mathcal{T}_k^{l+1} = T_k^{l+1} \cup f^1(T_k^{l+1}) \cup \ldots \cup f^{m_{k'}^{l+1}-1}(T_k^{l+1})$ – орбиты интервалов T_k^{l+1}.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{T}^l$ – разбиение окружности l-го уровня и $\mathcal{T}^{l+1}$ – объединение отрезков* (2.21). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Объединение $\mathcal{T}^{l+1}$ является разбиением окружности $(l+1)$-го уровня.*

2. *Среди точек бесконечной положительной орбиты*

$$\mathrm{Orb}^+(0) = \{f^j(0);\ j = 1, 2, \ldots\} \tag{2.22}$$

точка $v^{l+1} = f^{m^{l+1}}(0)$, где m^{l+1} определено в (2.13), *первой попадает в ядро T^l из* (2.17).

3. *Разбиение $\mathcal{T}^l$ квазиинвариантно относительно гомеоморфизма* (1.1):

$$f(\mathcal{T}^l) = \mathcal{T}^l \setminus T^l \cup f(T^l).$$

При этом, $f : T^l \longrightarrow f(T^l) = T^l$, где

$$f(T^l) = f(T_0^l) \cup f(T_1^l) = [v_1^l, v^{l+1}) \cup [v^{l+1}, v_0^l) = [v_1^l, v_0^l) = T^l$$

– *перекладывание отрезков* $T^l_1 = [v^l_1, 1) \equiv [v^l_1, 0) \bmod 1$ *и* $T^l_0 = [0, v^l_0)$ *ядра*

$$T^l = T^l_1 \cup T^l_0 = [v^l_1, 0) \cup [0, v^l_0) = [v^l_1, v^l_0).$$

4. *Последовательность ядер*

$$T^0 \supset T^1 \supset \ldots \supset T^l \supset T^{l+1} \supset \ldots \tag{2.23}$$

строго убывающая и поэтому процесс измельчения

$$\mathcal{T}^0 \supset \mathcal{T}^1 \supset \ldots \supset \mathcal{T}^l \supset \mathcal{T}^{l+1} \supset \ldots \tag{2.24}$$

разбиений окружности $\mathbb{T}$ *бесконечен.*

Доказательство. 1. По определению (2.3), (2.21) имеем

$$\mathcal{T}^l = \mathcal{T}^l_0 \cup \mathcal{T}^l_1, \tag{2.25}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^l_0 &= T^l_0 \cup f^1(T^l_0) \cup \ldots \cup f^{m^l_1 - 1}(T^l_0), \\ \mathcal{T}^l_1 &= T^l_1 \cup f^1(T^l_1) \cup \ldots \cup f^{m^l_0 - 1}(T^l_1) \end{aligned} \tag{2.26}$$

– орбиты интервалов T^l_0, T^l_1. Разберем случай $v^{l+1} \in T^l_0$. Случай $v^{l+1} \in T^l_1$ рассматривается аналогично. Вспоминая (2.18), (2.12), записываем

$$T^l_0 = [0, v^{l+1}_0) \cup [v^{l+1}_0, v^l_0),$$

где $[0, v^{l+1}_0) = T^{l+1}_0$ и $[v^{l+1}_0, v^l_0) = f^{m^l_0}([v^l_1, 0)) = f^{m^l_0}(T^l_1)$. Отсюда приходим к разбиению

$$T^l_0 = T^{l+1}_0 \cup f^{m^l_0}(T^l_1). \tag{2.27}$$

Подставляя (2.27) в первую орбиту из (2.26), получаем разбиение

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^l_0 = T^{l+1}_0 \cup f^1(T^{l+1}_0) \cup \ldots \cup f^{m^{l+1}_1 - 1}(T^{l+1}_0) \cup \\ f^{m^l_0}(T^l_1) \cup f^{m^l_0 + 1}(T^l_1) \cup \ldots \cup f^{m^{l+1}_0 - 1}(T^l_1), \end{aligned} \tag{2.28}$$

так как веса $m^{l+1}_0 = m^l_0 + m^l_1$ и $m^{l+1}_1 = m^l_1$ по (2.20). Теперь заменим разбиение $\mathcal{T}^l_0$ из (2.25) более мелким разбиением (2.28). Получим новое разбиение

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^l_0 \cup \mathcal{T}^l_1 &= T^{l+1}_0 \cup f^1(T^{l+1}_0) \cup \ldots \cup f^{m^{l+1}_1 - 1}(T^{l+1}_0) \\ &\cup T^l_1 \cup f^1(T^l_1) \cup \ldots \cup f^{m^{l+1}_0 - 1}(T^l_1) \\ &= T^{l+1}_0 \cup f^1(T^{l+1}_0) \cup \ldots \cup f^{m^{l+1}_1 - 1}(T^{l+1}_0) \\ &\cup T^{l+1}_1 \cup f^1(T^{l+1}_1) \cup \ldots \cup f^{m^{l+1}_0 - 1}(T^{l+1}_1), \end{aligned} \tag{2.29}$$

поскольку $T_1^l = T_1^{l+1}$ согласно определениям (2.18) и (2.19). Последнее разбиение из (2.29) есть не что иное, как объединение отрезков $\mathcal{T}^{l+1} = \mathcal{T}_0^{l+1} \cup \mathcal{T}_1^{l+1}$ из (2.21). Это означает, что $\mathcal{T}^{l+1}$ – разбиение окружности $\mathbb{T}$.

2. Из определения (2.25), (2.26) следует, что концы отрезков, образующих разбиение $\mathcal{T}^l$, – это в точности точки $f^j(0)$ с номерами $j = 0, 1, \ldots, m^{l+1} - 1$, а точка $v^{l+1} = f^{m^{l+1}}(0)$ в силу (2.14) принадлежит ядру T^l, что доказывает второе утверждение теоремы.

3. Подействуем отображением f на разбиение $\mathcal{T}^l$, используя его разложение на орбиты (2.26). Имеем

$$f(\mathcal{T}^l) = f(\mathcal{T}_0^l) \cup f(\mathcal{T}_1^l), \tag{2.30}$$

где

$$\begin{aligned} f(\mathcal{T}_0^l) &= (f^1(T_0^l) \cup \ldots \cup f^{m_1^l - 1}(T_0^l)) \cup f^{m_1^l}(T_0^l), \\ f(\mathcal{T}_1^l) &= (f^1(T_1^l) \cup \ldots \cup f^{m_0^l - 1}(T_1^l)) \cup f^{m_0^l}(T_1^l), \end{aligned} \tag{2.31}$$

при этом

$$\begin{aligned} f^{m_1^l}(T_0^l) \cup f^{m_0^l}(T_1^l) &= f^{m_1^l}([0, v_0^l)) \cup f^{m_0^l}([v_1^l, 0)) \\ &= [v_1^l, v^{l+1}) \cup [v^{l+1}, v_0^l) \\ &= [v_1^l, v_0^l) = T^l. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Из (2.30)–(2.32) следует третье утверждение теоремы.

4. Свойства (2.23) и (2.24) вытекают из факта отсутствия одинаковых точек в орбите $\mathrm{Orb}_f(0)$ (1.5). □

Определенные в (2.25), (2.26) разбиения $\mathcal{T}^l = \mathcal{T}_0^l \cup \mathcal{T}_1^l$ называются *ядерными разбиениями* l-го уровня окружности $\mathbb{T}$. Согласно второму утверждению теоремы 2.1, ядра T^l таких разбиений обладает *свойством минимальности*: среди точек орбиты $\mathrm{Orb}^+(0)$ точка $f^{m^{l+1}}(0)$ порядка $m^{l+1} = m_{f,0}^l + m_{f,1}^l$ первой попадает в ядро T^l разбиения $\mathcal{T}^l$.

2.3. Ядро для предельной точки. Считаем, что у гомеоморфизма f (1.1) выбрана положительная ориентация, при которой движение происходит вправо от 0 к 1 вдоль единичного отрезка $\mathbb{I} = [0, 1)$ из (1.2).

Точка $x \in \mathbb{T}$ называется *предельной справа (слева)* относительно своей орбиты $\mathrm{Orb}_f(x)$ (1.5), если любой непустой отрезок $[x, *)$ $([*, x)) \subset \mathbb{T}$ содержит бесконечно много точек орбиты. Если выполнены оба свойства, то считаем точку x *двусторонне предельной*.

Предложение 2.1. *Пусть* $T^l = T_0^l \cup T_1^l$ *– ядро* l*-го уровня* (2.11); *и пусть точка* $0 \in \mathbb{T}$ *является предельной справа или слева. Тогда*

$$|T_0^l| = |[0, v_0^l)| \ \to \ 0 \quad \text{для} \ \ l \to +\infty \tag{2.33}$$

или

$$|T_1^l| = |[v_1^l, 1)| \ \to \ 0 \quad \text{для} \ \ l \to +\infty. \tag{2.34}$$

Если точка 0 *двусторонне предельная, то*

$$|T^l| = |[v_1^l, v_0^l)| \quad \to \quad 0 \quad \text{для} \quad l \to +\infty. \tag{2.35}$$

Здесь $|*|$ *– длина отрезка* $*$.

Доказательство. Пусть 0 – предельная справа точка. Используя (2.23), рассмотрим последовательность вложенных отрезков

$$[0, v_0^0) \supset [0, v_0^1) \supset \ldots \supset [0, v_0^l) \supset [0, v_0^{l+1}) \supset \ldots . \tag{2.36}$$

В каждом отрезке $[0, v_0^l)$ бесконечно много точек $f^n(0)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ орбиты $\mathrm{Orb}_f(0)$. Поэтому концы отрезков $v_0^l = f^{m_0^l}(0)$ имеют веса $m_0^l \to +\infty$ при $l \to +\infty$. С другой стороны, по теореме 2.1 отрезок $[0, v_0^l)$ не содержит ни одной точки $f^n(0)$ с номером $n < m_0^l < m^{l+1}$. Следовательно, длины отрезков в (2.36) должны стремиться к нулю.

Свойство (2.34) доказывается аналогично, а свойство (2.35) вытекает из (2.33) и (2.34). $\square$

Следствие 2.1. *Если у гомеоморфизма* f (1.1) *есть двусторонне предельная точка* $x_0 \in \mathbb{T}$, *то, выбрав ее в качестве начальной точки вместо* $x_0 = 0$, *можно по правилу* (2.25), (2.26) *построить последовательность вложенных разбиений*

$$\mathcal{T}^0(x_0) \supset \mathcal{T}^1(x_0) \supset \ldots \supset \mathcal{T}^l(x_0) \supset \mathcal{T}^{l+1}(x_0) \supset \ldots \tag{2.37}$$

окружности $\mathbb{T}$, *обладающих свойствами* 1)–4) *из теоремы* 2.1; *при этом длины отрезков разбиений* (2.37) *стремятся к* 0 *при* $l \to +\infty$.

§3. Поворот окружности

3.1. Ядерные разбиения для поворота окружности. Пусть

$$\mathbb{T} \overset{f_\alpha}{\underset{\sim}{\to}} \mathbb{T}, \quad x \mapsto f_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod 1 \tag{3.1}$$

– поворот окружности на иррациональное число вращения $\alpha = \alpha_f$ гомеоморфизма f, определенное в (1.4). Здесь $0 < \alpha < 1$. Поворот f_α является одним из базовых примеров сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности $\mathbb{T}$.

Выбирая гомеоморфизм $f = f_\alpha$ и начальную точку $x_0 = 0$ снова по правилу (2.25), (2.26) строим последовательность вложенных разбиений

$$\mathcal{T}_\alpha^0 \supset \mathcal{T}_\alpha^1 \supset \ldots \supset \mathcal{T}_\alpha^l \supset \mathcal{T}_\alpha^{l+1} \supset \ldots . \tag{3.2}$$

Поворот f_α на иррациональный угол α является *минимальным* отображением, при котором любая точка имеет всюду плотную орбиту [3]. Следовательно, $x_0 = 0$ – двусторонне предельная точка; и тогда по следствию 2.1 длины отрезков разбиений (3.2) стремятся к нулю при $l \to +\infty$.

3.2. Ядра разбиений для поворота окружности. Удобно ядро 0-го уровня

$$T_\alpha^0 = T_{\alpha,0}^0 \cup T_{\alpha,1}^0$$

строить из двух отрезков

$$T_{\alpha,0}^0 = [0, v_{\alpha,0}^0) = [0, \alpha), \quad T_{\alpha,1}^0 = [v_{\alpha,1}^0, 0) = [\alpha - 1, 0).$$

Для ядер

$$T_\alpha^l = T_{\alpha,0}^l \cup T_{\alpha,1}^l \tag{3.3}$$

уровней $l = 0, 1, 2, \ldots$ введем обозначения:

$$T_{\alpha,0}^l = [0, v_{\alpha,0}^l), \quad T_{\alpha,1}^l = [v_{\alpha,1}^l, 0), \tag{3.4}$$

где

$$v_{\alpha,0}^l = m_{\alpha,0}^l \alpha - p_{\alpha,0}^l, \quad v_{\alpha,1}^l = m_{\alpha,1}^l \alpha - p_{\alpha,1}^l. \tag{3.5}$$

Здесь веса $m_{\alpha,k}^l = 1, 2, \ldots$ и свободные члены $p_{\alpha,k}^l = 0, 1, 2, \ldots$ такие, что

$$0 < v_{\alpha,0}^l < 1, \quad -1 < v_{\alpha,1}^l < 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, по определению (3.4), (3.5), для уровня $l = 0$ имеем

$$m_{\alpha,0}^0 = 1, \quad p_{\alpha,0}^0 = 0; \quad m_{\alpha,1}^0 = 1, \quad p_{\alpha,1}^0 = -1.$$

Полагая

$$v_\alpha^{l+1} = v_{\alpha,0}^l + v_{\alpha,1}^l,$$

индукционный переход $l \to l + 1$ выполним по правилу:

$$v_{\alpha,0}^{l+1} = v_\alpha^{l+1}, \quad v_{\alpha,1}^{l+1} = v_{\alpha,1}^l,$$

или

$$v_{\alpha,0}^{l+1} = v_{\alpha,0}^l, \quad v_{\alpha,1}^{l+1} = v_\alpha^{l+1},$$

если соответственно

$$v_\alpha^{l+1} \in T_{\alpha,0}^l \quad \text{или} \quad v_\alpha^{l+1} \in T_{\alpha,1}^l. \tag{3.7}$$

Предложение 3.1. 1. *Пусть*

$$m_\alpha^{l+1} = m_{\alpha,0}^l + m_{\alpha,1}^l, \qquad p_\alpha^{l+1} = p_{\alpha,0}^l + p_{\alpha,1}^l. \tag{3.8}$$

Тогда

$$\begin{aligned} m_{\alpha,0}^{l+1} &= m_\alpha^{l+1}, & p_{\alpha,0}^{l+1} &= p_\alpha^{l+1},\\ m_{\alpha,1}^{l+1} &= m_{\alpha,1}^{l}, & p_{\alpha,1}^{l+1} &= p_{\alpha,1}^{l} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} m_{\alpha,0}^{l+1} &= m_{\alpha,0}^{l}, & p_{\alpha,0}^{l+1} &= p_{\alpha,0}^{l},\\ m_{\alpha,1}^{l+1} &= m_{\alpha}^{l+1}, & p_{\alpha,1}^{l+1} &= p_{\alpha}^{l+1} \end{aligned}$$

соответственно первому или второму условию из (3.7).

2. *Если* $m_{\alpha,k}^l$, $p_{\alpha,k}^l$ *для* $k = 0, 1$ *удовлетворяют неравенствам* (3.6), *то* $m_{\alpha,k}^{l+1}$, $p_{\alpha,k}^{l+1}$ *также им удовлетворяют.*

3. *Определенные в* (3.3)–(3.5) *ядра* T_α^l *совпадают с ядрами* $T_f^l = T^l$ *из* (2.17) *для гомеоморфизма* $f = f_\alpha$.

Доказательство. Эти утверждения следуют из определений, равенств

$$\begin{aligned} v_\alpha^{l+1} = v_{\alpha,0}^l + v_{\alpha,1}^l &= (m_{\alpha,0}^l\alpha - p_{\alpha,0}^l) + (m_{\alpha,1}^l\alpha - p_{\alpha,1}^l)\\ &= (m_{\alpha,0}^l + m_{\alpha,1}^l)\,\alpha - (p_{\alpha,0}^l + p_{\alpha,1}^l) \end{aligned}$$

и сравнения $f_\alpha^{m_{\alpha,0}^l + m_{\alpha,1}^l}(0) \equiv (m_{\alpha,0}^l + m_{\alpha,1}^l)\,\alpha \bmod 1$. □

3.3. Другие способы вычисления свободных членов. Разобъем единичный интервал $\mathbb{I}$ из (1.2) на два интервала

$$\mathbb{I}_{\alpha,0} = [0, f_\alpha^{-1}(0)), \qquad \mathbb{I}_{\alpha,1} = [f_\alpha^{-1}(0), 1). \tag{3.9}$$

Затем, полагая $p_\alpha(0) = 0$ и $\alpha^m = f_\alpha^m(0) \equiv m\alpha \bmod 1$ для $m = 0, 1, 2, \ldots$, определим последовательность $p_\alpha(m)$ рекуррентными правилами.

Правило 1:

$$p_\alpha(m+1) = p_\alpha(m) + \varepsilon_\alpha(m+1), \tag{3.10}$$

где

$$\varepsilon_\alpha(m+1) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \alpha^m < \alpha^{m+1},\\ 1, & \text{если} \quad \alpha^m > \alpha^{m+1}. \end{cases}$$

Правило 2:

$$p_\alpha(m+1) = p_\alpha(m) + \varepsilon'_\alpha(m), \tag{3.11}$$

где

$$\varepsilon'_\alpha(m) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \alpha^m \in \mathbb{I}_{\alpha,0},\\ 1, & \text{если} \quad \alpha^m \in \mathbb{I}_{\alpha,1}. \end{cases}$$

Лемма 3.1. 1. *Определения* (3.10) *и* (3.11) *последовательности чисел* $p_\alpha(m)$ *эквивалентны.*

2. *Свободные члены* $p^l_{\alpha,0}$, $p^l_{\alpha,1}$ *из* (3.8) *вычисляются по формулам*

$$p^l_{\alpha,0} = p_\alpha(m^l_{\alpha,0}), \qquad p^l_{\alpha,1} = p_\alpha(m^l_{\alpha,1}) - 1, \tag{3.12}$$

где $m^l_{\alpha,0}$, $m^l_{\alpha,1}$ *– веса из* (3.8).

Доказательство. 1. Первое утверждение справедливо, так как

$$\begin{aligned} \alpha^m < \alpha^{m+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha^m \in \mathbb{I}_0, \\ \alpha^m > \alpha^{m+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha^m \in \mathbb{I}_1. \end{aligned}$$

2. Пусть $\alpha_0^{(m)} = m\alpha - p_\alpha(m)$, $\alpha_1^{(m)} = m\alpha - p_\alpha(m) - 1$. Из определения (3.5) следуют сравнения

$$v^l_{\alpha,0} \equiv \alpha_0^{(m^l_{\alpha,0})}, \quad v^l_{\alpha,1} \equiv \alpha_1^{(m^l_{\alpha,1})} \bmod 1. \tag{3.13}$$

Сопоставляя неравенства (3.6) с неравенствами

$$0 < \alpha_0^{(m)} < 1, \quad -1 < \alpha_1^{(m)} < 0,$$

вытекающими из (3.10), в силу (3.13) приходим к формулам (3.12). □

3.4. Разбиения окружности и цепные дроби. Согласно (3.4) и (3.5) записываем

$$|m^l_{\alpha,0}\alpha - p^l_{\alpha,0}| = |T^l_{\alpha,0}|, \qquad |m^l_{\alpha,1}\alpha - p^l_{\alpha,1}| = |T^l_{\alpha,1}|, \tag{3.14}$$

где $|T^l_{\alpha,k}|$ обозначают длины интервалов $T^l_{\alpha,k}$ $(k = 0, 1)$.

Чтобы оценить длины, вернемся к разбиениям окружности, определенным в (3.2) и (2.25), (2.26). Данные разбиения $\mathcal{T}^l_\alpha = \mathcal{T}^l_{\alpha,0} \cup \mathcal{T}^l_{\alpha,1}$ разложены на орбиты

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^l_{\alpha,0} &= T^l_{\alpha,0} \cup f^1(T^l_{\alpha,0}) \cup \ldots \cup f^{m^l_{\alpha,1}-1}(T^l_{\alpha,0}), \\ \mathcal{T}^l_{\alpha,1} &= T^l_{\alpha,1} \cup f^1(T^l_{\alpha,1}) \cup \ldots \cup f^{m^l_{\alpha,0}-1}(T^l_{\alpha,1}). \end{aligned}$$

Интервалы каждой орбиты имеют одну и ту же длину и все вместе составляют единичную окружность $\mathbb{T}$. Поэтому длины интервалов должны удовлетворять неравенствам

$$|T^l_{\alpha,0}| \leqslant \frac{1}{m^l_{\alpha,1}}, \qquad |T^l_{\alpha,1}| \leqslant \frac{1}{m^l_{\alpha,0}}. \tag{3.15}$$

Предложение 3.2. *Имеют место рациональные прибижения*

$$\left|\alpha - \frac{p^l_{\alpha,0}}{m^l_{\alpha,0}}\right| \leqslant \frac{1}{m^l_{\alpha,0} m^l_{\alpha,1}}, \qquad \left|\alpha - \frac{p^l_{\alpha,1}}{m^l_{\alpha,1}}\right| \leqslant \frac{1}{m^l_{\alpha,0} m^l_{\alpha,1}} \tag{3.16}$$

иррационального числа α*, где числители и знаменатели определены в предложении* 3.1.

Доказательство. Утверждение следует из представлений (3.14) и неравенств (3.15). □

Замечание 3.1. 1. Участвующие в предложении 3.2 рациональные приближения $p^l_{\alpha,k}/m^l_{\alpha,k}$ есть не что иное, как промежуточные дроби из теории цепных дробей [5].

2. Связь между разбиениями $\mathcal{T}^l_\alpha$ окружности $\mathbb{T}$ и цепными дробями была исследована в [6].

§4. Аппроксимация числа вращения

4.1. Связь между гомеоморфизмом и поворотом окружности. Пусть f – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм (1.1) окружности $\mathbb{T}$ и f_α – поворот окружности (3.1) на иррациональное число вращения $\alpha = \alpha_f$ гомеоморфизма f. Тогда эти отображения можно связать через коммутативную диаграмму [3]:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{T} & \xrightarrow{f} & \mathbb{T} & \\ \mu & \downarrow & & \downarrow & \mu \\ & \mathbb{T} & \xrightarrow{f_\alpha} & \mathbb{T} & \end{array} \tag{4.1}$$

Здесь

$$\mu(x) = \mu([0, x]) \tag{4.2}$$

– мера отрезка $[0, x) \subset \mathbb{T}$, где μ – нормированная борелевская мера на окружности $\mathbb{T}$, инвариантная относительно гомеоморфизма f. В силу иррациональности числа вращения α, такая мера μ непрерывна.

4.2. Веса и свободные члены для гомеоморфизма. Используя отождествление $\mathbb{I} \overset{\pi}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{T}$ из (1.2), аналогично (3.9) разобъем единичный интервал $\mathbb{I}$ на два интервала

$$\mathbb{I}_{f,0} = [0, f^{-1}(0)), \quad \mathbb{I}_{f,1} = [f^{-1}(0), 1).$$

Затем, полагая $p_f(0) = 0$ и

$$\alpha^m_f = f^m(0)$$

для $m = 0, 1, 2, \ldots$, определим последовательность $p_f(m)$, полагая

$$p_f(m+1) = p_f(m) + \varepsilon'_f(m),$$

где

$$\varepsilon'_f(m) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \alpha_f^m \in \mathbb{I}_0, \\ 1, & \text{если} \quad \alpha_f^m \in \mathbb{I}_1. \end{cases}$$

Аналогично (3.12) введем обозначения

$$p^l_{f,0} = p_f(m^l_{f,0}), \quad p^l_{f,1} = p_f(m^l_{f,1}) - 1, \tag{4.3}$$

где веса $m^l_{f,0}$, $m^l_{f,1}$ – веса из (2.20).

Предложение 4.1. *Пусть $m^l_{f,0} = m^l_0$, $m^l_{f,1} = m^l_1$ – веса для гомеоморфизма f, определенные в* (2.20)*, $m^l_{\alpha,0}$, $m^l_{\alpha,1}$ – веса для поворота окружности f_α из предложения* 3.1*; и пусть свободные члены $p^l_{\alpha,k}$ и $p^l_{f,k}$ ($k = 0, 1$) определены в* (3.12) *и* (4.3) *соответственно. Тогда справедливы равенства*

$$m^l_{\alpha,0} = m^l_{f,0}, \quad m^l_{\alpha,1} = m^l_{f,1}, \quad p^l_{\alpha,0} = p^l_{f,0}, \quad p^l_{\alpha,1} = p^l_{f,1}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Это следует из предложения 3.1 и коммутативности диаграммы (4.1). □

4.3. Число вращения и цепные дроби.

Теорема 4.1. *Пусть f – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм* (1.1) *окружности $\mathbb{T}$ с иррациональным числом вращения α_f* (1.4)*; и пусть для $l = 0, 1, 2, \ldots$ целые числа $m^l_{f,0}$, $m^l_{f,1}$ и $p^l_{f,0}$, $p^l_{f,1}$ определены в* (2.20) *и* (4.3) *соответственно. Тогда имеют место приближения*

$$\left|\alpha_f - \frac{p^l_{f,0}}{m^l_{f,0}}\right| \leqslant \frac{1}{m^l_{f,0} m^l_{f,1}}, \quad \left|\alpha_f - \frac{p^l_{f,1}}{m^l_{f,1}}\right| \leqslant \frac{1}{m^l_{f,0} m^l_{f,1}}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Если выбрать $\alpha = \alpha_f$, то неравенства (4.5) получаются из неравенств (3.16) подстановкой (4.4). □

Замечание 4.1. В силу (2.22) приближения (4.5) обладают свойством минимальности.

Замечание 4.2. Значение доказанной теоремы 4.1 состоит в том, что она позволяет находить приближения цепными дробям $p^l_{f,0}/m^l_{f,0}$, $p^l_{f,1}/m^l_{f,1}$ числа вращения α_f гомеоморфизма окружности f. Число вращения α_f не задается непосредственно самим гомеоморфизмом f и определяется как предел в (1.3). Такое определение не позволяет получать для α_f хорошие приближения. Числители и знаменатели приближений (4.5) вычисляются дискретным алгоритмом, основанным на ядерных разбиениях окружности $\mathcal{T}^l$ из теоремы 2.1, не требующим знания числа вращения α_f.

Замечание 4.3. Гомеоморфизм f называется (топологически) транзитивным, если у него есть всюду плотная орбита. По теореме Пуанкаре о классификации [4], если гомеоморфизм f транзитивен, то он сопряжен

$$f = h^{-1} f_\alpha h \tag{4.6}$$

повороту окружности f_α (3.1) с углом поворота α, равным числу вращения α_f. Для таких гомеоморфизмов мы приходим к приближениям обычными цепными дробям (3.16), однако, для этого потребуется знать сопрягающее отображение h в (4.6).

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН, сер. матем., **71**, No. 2 (2007), 89–122.
2. З. Нитецки, *Введение в дифференциальную динамику.* Москва, Мир, 1975.
3. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория.* Москва, Наука, 1980.
4. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем.* Москва, Факториал, 1999.
5. Хинчин А. Я., *Цепные дроби*, четвертое изд., Москва, Наука, 1978.
6. V. G. Zhuravlev, A. V. Shutov, *Derivaties of circle rotations and similarity of orbits*, Max-Planck-Institut für Mathematik, Preprint Series **62** (2004), 1–11.

Zhuravlev V. G. Circle homeomorphisms and continued fractions.

For an orientation preserving homeomorphism $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ of the circle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ with an irrational rotation number α_f, we build karyon tilings $\mathcal{T}^l$ of levels $l = 0, 1, 2, \dots$ that are quasi-invariant with respect to f and have minimal kernels. These tilings are used to obtain approximations for the rotation number α_f by continued fractions.

Владимирский государственный университет
пр. Строителей, 11, 600024 Владимир, Россия
E-mail: `vzhuravlev@mail.ru`

Поступило 11 марта 2023 г.