Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 523, 2023 г.

Н. Л. Гордеев

ОБОБЩЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ГАУССА ПРОСТЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

§1. Введение

В. Л. Попов задал автору вопрос о возможных разложениях элементов простых алгебраических групп в произведения корневых элементов и элементов тора наподобие разложения Гаусса (см. Определение 1.1 ниже). Полный ответ на этот вопрос, по-видимому, достаточно трудная задача. В этой работе строятся некоторые примеры таких разложений и примеры случаев, когда такие разложения невозможны.

Пусть $\mathcal{G}$ – простая алгебраическая группа, определенная и расщепимая над полем K, и пусть $G = \mathcal{G}(K)$ – группа K-точек. Пусть $\mathcal{T}$ – зафиксированный максимальный расщепимый тор группы $\mathcal{G}$, $T = \mathcal{T}(K)$; $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{U}$ – зафиксированная подгруппа Бореля, где $\mathcal{U} = R_u(\mathcal{B})$ – ее унипотентный радикал, $B = \mathcal{B}(K)$, $U = \mathcal{U}(K)$. Далее пусть $\mathcal{B}^- = \mathcal{T}\mathcal{U}^-$ – противоположная подгруппа Бореля (т. е. $\mathcal{B}^- = \dot{w}_0\mathcal{B}\dot{w}_0^{-1}$, где $\dot{w}_0$ – прообраз элемента максимальной длины $w_0 \in W$ группы Вейля W в нормализаторе тора $N_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$). Множество $\mathcal{B}^-\mathcal{B}$ – это открытое подмножество в G (в топологии Зарисского), называемое *Большой Клеткой Гаусса* (см., например, [5, 4]).

Разложение Гаусса

$$g \in B^-B \ \Leftrightarrow\ g = vtu \quad \text{где} \quad v \in U^-,\ t \in T,\ u \in U. \tag{1.1}$$

При этом элементы v, t, u определены однозначно элементом g, а элементы v, u имеют однозначное разложение в произведения

$$\prod_{\alpha\in R^-} x_\alpha(s_g), \qquad \prod_{\beta\in R^+} x_\beta(s_g),$$

в которых произведения корневых элементов рассматриваются в любом зафиксированном порядке.

Ключевые слова: простые алгебраические группы, Большая Клетка Гаусса, разложение Гаусса, замкнутые подмножества корней.

Здесь $R = R^+ \cup R^-$ – система корней, соответствующая простой алгебраической группе $\mathcal{G}$. В разложении (1.1) мы частично фиксируем порядок расположения корневых подгрупп $X_\alpha = \langle x_\alpha(s) \mid s \in K \rangle$ и тора T: сначала идут корневые подгруппы, соответствующие отрицательным корням, потом тор T, а затем подгруппы, соответствующие положительным корням. При этом подгруппы, соответствующие отрицательным корням, можно ставить в любом зафиксированном порядке и то же самое можно делать и с корневыми подгруппами положительных корней. Ясно, что элементы тора можно ставить в таком произведении на любое фиксированное место.

Разложения Гаусса являются важным инструментом исследования структурных вопросов теории алгебраических групп. Разложения такого типа можно обобщить следующим образом.

Определение 1.1. *Пусть M – подмножество корней в R (возможно $M = \varnothing$). Будем говорить, что группа G имеет M-разложение, если существует такой линейный порядок на множестве M и на множестве $R \setminus M$, что произведение корневых подгрупп и тора*

$$X_M := \Big(\prod_{\beta \in R \setminus M} X_\beta \Big) \cdot T \cdot \Big(\prod_{\alpha \in M} X_\alpha \Big), \tag{1.2}$$

где произведения $\prod\limits_{\beta \in R \setminus M} X_\beta$ и $\prod\limits_{\alpha \in M} X_\alpha$ берутся согласно данным зафиксированным порядкам, удовлетворяет следующему условию: любой элемент g, содержащийся в произведении X_M имеет единственное представление

$$g = \Big(\prod_{\beta \in R \setminus M} x_\beta(s_{\beta,\, g}) \Big) \cdot t_g \cdot \Big(\prod_{\alpha \in M} x_\alpha(s_{\alpha,\, g}) \Big), \tag{1.3}$$

где $s_{\alpha,\, g}, s_{\beta,\, g} \in K$, $t_g \in T$. Если при этом единственность разложения (1.3) *имеет место для любого порядка корней в разложении* (1.2), *то будем говорить, что группа G имеет универсальное M-разложение.*

Отметим, что разложение Гаусса – это универсальное M-разложение для $M = R^+$.

Пусть $\overline{K}$ – алгебраическое замыкание поля K. Тогда алгебраическую группу $\mathcal{G}$ можно отождествить с группой ее точек $\mathcal{G}(\overline{K})$. При этом группы $\overline{X}_\alpha = X_\alpha(\overline{K})$ можно рассматривать как замкнутые аффинные подмногообразия в $\mathcal{G}$. Пусть

$$\mathcal{X}_M := \Big(\prod_{\beta \in R \setminus M} \overline{X}_\beta \Big) \times \mathcal{T} \times \Big(\prod_{\alpha \in M} \overline{X}_\alpha \Big)$$

– прямое произведение афинных многообразий $\overline{X}_\beta$, $\overline{X}_\alpha$, $\mathcal{T}$, где β пробегает все корни из $R \setminus M$ в любом зафиксированном порядке, а α пробегает все корни из M в любом зафиксированном порядке. Тогда $\mathcal{X}_M$ – гладкое аффинное многообразие размерности $\dim \mathcal{G}$. Естественный морфизм

$$\iota : \mathcal{X}_M \to \mathcal{G}$$

является доминантным отображением. Действительно, образы дифференциалов в нейтральных элементах $e_\gamma \in \overline{X}_\gamma$ корневых подгрупп $\overline{X}_\gamma$ при естественных вложениях $\iota : \overline{X}_\gamma \to \overline{X}_\gamma \subset \mathcal{G}$ и дифференциал тора в нейтральном элементе $e_\mathcal{T} \in \mathcal{T}$ при вложении $\iota : \mathcal{T} \to \mathcal{T} \subset \mathcal{G}$ содержат базис Шевалле алгебры Ли $L(\mathcal{G})$, а значит, порождают алгебру Ли $L(\mathcal{G})$ группы $\mathcal{G}$. Поэтому образ дифференциала отображения ι в точке

$$\widetilde{e} := \Big(\prod_{\beta \in R \setminus M} e_\beta \Big) \times e_\mathcal{T} \times \Big(\prod_{\alpha \in M} e_\alpha \Big)$$

совпадает со всей алгеброй Ли. Следовательно, слои отображения ι в некоторой окрестности точки $\widetilde{e}$ нульмерны. Так как X_M – связное многообразие, то

$$\dim \iota(\mathcal{X}_M) = \dim \mathcal{G}.$$

Отметим, что, если группа $\mathcal{G}$ имеет M-разложение, то

$$\mathcal{X}_M := \iota(\mathcal{X}_M) \text{ – \textit{открытое подмножество группы} } \mathcal{G}.$$

Доказательство. Если группа $\mathcal{G}$ имеет M-разложение, то все слои доминантного отображения $\iota : \mathcal{X}_M \to \mathcal{G}$ состоят из одной точки, а значит, ι – это открытое отображение ([1, п. 18.4]). □

Таким образом, *M-разложение простой алгебраической группы можно рассматривать, как некоторое обобщение разложения Гаусса*, а именно, также как и для большой клетки Гаусса имеется открытое подмножество $\mathcal{X}_M$, элементы которого однозначно определяются элементами зафиксированного максимального тора и элементами корневых подгрупп, разбитых на два непересекающихся подмножества – M и $R \setminus M$.

Вопрос о существовании M-разложения для данного фиксированного $M \subset R$ является, по-видимому, довольно трудным. Возможно, что вопрос о единственности разложения 1.3 может быть получен из анализа соотношений Стейнберга для корневых элементов ([5, §6]). В данной работе рассматриваются примеры M-разложений, которые связаны с параболическими группами, и примеры таких M, когда универсальные M-разложения вообще невозможны. В частности, приводятся все возможности для универсальных M-разложений группы $\mathrm{SL}_3(K)$.

§2. Квазипараболические M-разложения

Естественными примерами M-разложений являются разложения, ассоциированные с параболическими подгруппами. Пусть Δ – фиксированный базис R, $\Delta' \subset \Delta$ и $R' = \langle \Delta' \rangle$; $W_1 = \langle w_\alpha \mid \alpha \in S_1 \rangle$; $P = BW_1B = LR_u(P)$ – параболическая подгруппа группы G (мы используем названия соответствующих подгрупп и для группы точек $G = \mathcal{G}(K)$), где L – ее группа Леви, а $R_u(P)$ – ее унипотентный радикал; $P^- = LR_u(P^-)$ – противоположная параболическая подгруппа.

Параболическое разложение Гаусса

$$g \in P^-P \;\Leftrightarrow\; g = vlu \quad \text{где} \;\; v \in R_u(P^-),\;\; l \in L,\;\; u \in R_u(P). \tag{2.1}$$

При этом элементы v, l, u определены однозначно элементом g, а элементы v, u имеют однозначное разложение в произведения

$$\prod_{\alpha \in R^- \setminus R_1} x_\alpha(t_g), \qquad \prod_{\beta \in R^+ \setminus R_1} x_\beta(s_g),$$

в которых произведения корневых элементов рассматриваются в любом зафиксированном порядке.

Доказательство. Действительно,

$$v_1 l_1 u_1 = v_2 l_2 u_2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{v_2^{-1} v_1}_{=v \in R_u(P^-)} \; \underbrace{\left(l_1 u_1 u_2^{-1} l_1^{-1}\right)}_{u \in R_u(P)} = \underbrace{l_2 l_1^{-1}}_{l \in L}.$$

Далее пусть

$$L = \bigcup_{w \in W_1} B_1^- \dot{w} B_1, \quad \text{где} \quad B_1^- = L \cap B^-, \quad B_1 = L \cap B$$

– разложение группы Леви L в объединение непересекающихся клеток Гаусса (см. [4]). Тогда

$$\begin{cases} l \in B_1^- \dot{w} B_1 \leqslant B^- \dot{w} B, \\ l = vu \in R_u(P^-) R_u(P) \subset U^- U \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{w} = e$$

(здесь e – нейтральный элемент группы G). Из единственности разложения Гаусса (1.1) и включения $l \in L$ получаем $l = 1$, $v_1 = v_2$, $u_1 = u_2$. $\square$

Замечание 2.1. В разложении (2.1) элемент $l \in L$ играет роль элемента тора T в обычном разложении Гаусса. При этом элемент l не обязан содержаться в Большой Клетке Гаусса группы L.

Ясно, что разложение вида vul, где $v \in R_u(P^-)$, $u \in R_u(P)$, $l \in L$, также однозначно. Если мы теперь рассмотрим в качестве множества M все корни, лежащие в R', то получим M-разложение для G:

$$\Big(\prod_{\gamma \in R^- \setminus R'} X_\gamma\Big)\Big(\prod_{\beta \in R^+ \setminus R'} X_\beta\Big)\, T\, \underbrace{\Big(\prod_{\alpha \in R'^-} X_\alpha \prod_{\alpha \in R'^+} X_\alpha\Big)}_{\alpha \in M = R'}. \tag{2.2}$$

Отметим, что хотя (2.2) и не является универсальным M-разложением, но порядок корней в произведениях корневых подгрупп, соответствующих множествам $R^- \setminus M$, $R^+ \setminus M$, $M^- = R'^-$, $M^+ = R'^+$, можно зафиксировать произвольным образом. Ясно, что тор T можно передвинуть в разложении (2.2) влево на любое подмножество корневых подгрупп, соответствующих корням, содержащимся в некотором подмножестве $\mathfrak{M} \subset R \setminus R'$:

$$\Big(\prod_{\gamma \in R^- \setminus (R' \cup \mathfrak{M})} X_\gamma\Big)\, T \\ \times \underbrace{\underbrace{\Big(\prod_{\gamma \in (R^- \setminus R') \cap \mathfrak{M})} X_\gamma\Big)\Big(\prod_{\beta \in R^+ \setminus R'} X_\beta\Big)}_{\mathfrak{M}}\, \Big(\prod_{\alpha \in R'^-} X_\alpha \prod_{\alpha \in R'^+} X_\alpha\Big)}_{M := \mathfrak{M} \cup R'}, \tag{2.3}$$

если $R^+ \setminus R' \subset \mathfrak{M}$;

$$\Big(\prod_{\gamma\in R^-\setminus R'} X_\gamma\Big)\Big(\prod_{\beta\in R^+\setminus(R'\cup\mathfrak{M})} X_\beta\Big)\, T \\ \times \underbrace{\Big(\prod_{\beta\in\mathfrak{M}} X_\beta\Big)\Big(\prod_{\alpha\in R'^-} X_\alpha \prod_{\alpha\in R'^+} X_\alpha\Big)}_{M:=\mathfrak{M}\cup R'}, \qquad (2.4)$$

если $\mathfrak{M} \subset R^+ \setminus R'$.

Замечание 2.2. В случае (2.3) последнюю скобку можно поместить между второй и третьей, а в случае (2.4) поменять ее с третьей скобкой местами, но только, если $\Big(\prod\limits_{\beta\in\mathfrak{M}} X_\beta\Big)$ является L-инвариантным подмножеством в G. Кроме того, в последней скобке вместо обычного разложения Гаусса $\Big(\prod\limits_{\alpha\in R'^-} X_\alpha \prod\limits_{\alpha\in R'^+} X_\alpha\Big)$ можно использовать любое M'-разложение $\Big(\prod\limits_{\alpha\in R'\setminus M'} X_\alpha \prod\limits_{\alpha\in M'} X_\alpha\Big)$ группы L. Также ясно, что, применив к указанным разложениям любой элемент группы Вейля $\dot{w}$, мы получим $\dot{w}(M)$-разложение группы G.

Определение 2.3. *M-разложения группы точек $G = \mathcal{G}(K)$ простой алгебраической группы $\mathcal{G}$, определенной и расщепимой над полем K, будем называть квазипараболическими M-разложениями, если они получаются из разложений вида* (2.3), (2.4) *преобразованиями, указанными в Замечании* (2.3).

§3. Квазипараболические M-разложения для замкнутых подмножеств

Пусть $M \subset R$ – подмножество корней. Множество M называется **замкнутым**, если $\alpha+\beta \in M$ для любых $\alpha, \beta \in M$, для которых $\alpha + \beta \in R$. Замкнутое множество M можно представить как объединение непересекающихся подмножеств

$$M = M_s \cup M_u,$$

где

$$M_s := \{\alpha \in M \mid -\alpha \in M\}, \quad M_u := M \setminus M_s,$$

которые будем называть **полупростой** и **унипотентной** частью множества M. Отметим, что M_s – это подсистема корней в R (см. [3, Глава VI, §1, Предложение 23, ii]). Кроме того,

$$\alpha \in M, \quad \beta \in M_u, \quad \alpha+\beta \in M \quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta \in M_u. \tag{3.1}$$

Доказательство. Предположим $\alpha+\beta \in M_s$. Тогда $-(\alpha+\beta) \in M$, а значит, $-(\alpha+\beta)+\alpha = -\beta \in M$, что противоречит выбору β. □

Далее пусть $\mathcal{G}_{M_s}$, $\mathcal{G}_{M_u}$ – группы, порожденные корневыми подгруппами

$$\overline{X}_\gamma = \langle\, x_\gamma(t) \mid t \in \overline{K}\,\rangle,$$

где $\overline{K}$ – алгебраическое замыкание поля K, а $\gamma \in M_s$ или $\gamma \in M_u$ соответственно. Тогда:

(i) $\mathcal{G}_{M_s}$ – *полупростая алгебраическая группа, определенная и расщепимая над полем* K (см. [5], §5);

(ii) если $M_u \neq \varnothing$, то $\mathcal{G}_{M_u}$ – *связная нильпотентная алгебраическая группа.*

Доказательство. Из (3.1) и коммутаторной формулы Шевалле (см. [5, §3]) следует, что $\mathcal{G}_{M_u}$ – нильпотентная группа и любой ее элемент представляется в виде

$$\prod_{\alpha \in M_u} x_\alpha(s_\alpha), \quad \text{где} \quad s_\alpha \in \overline{K}. \tag{3.2}$$

Замыкание (в топологии Зарисского) $\overline{\mathcal{G}_{M_u}}$ группы $\mathcal{G}_{M_u}$ в группе $\mathcal{G}$ является связной нильпотентной группой ([1, Глава I, §2]). Поскольку максимальны тор $\mathcal{T}$ нормализует корневые подгруппы, он также нормализует и группу $\mathcal{G}_{M_u}$, а следовательно, и ее замыкание $\overline{\mathcal{G}_{M_u}}$. Замкнутая связная унипотентная подгруппа группы $\mathcal{G}$, нормализуемая максимальным тором $\mathcal{T}$, порождается корневыми подгруппами ([1, Глава IV, п. 14.4]). Следовательно, существует такое замкнутое множество корней $\overline{M}_u \supset M_u$, что любой элемент группы $\overline{\mathcal{G}_{M_u}}$ представим в виде

$$\prod_{\beta \in \overline{M}_u} x_\beta(t_\beta), \quad \text{где} \quad t_\beta \in \overline{K}. \tag{3.3}$$

Из (3.3) следует, что $\dim \overline{\mathcal{G}_{M_u}} = |\,\overline{M}_u\,|$. Поскольку $\overline{\mathcal{G}_{M_u}}$ – это замыкание группы $\mathcal{G}_{M_u}$, то из (3.2) получаем

$$\overline{M}_u = M_u \quad \text{и} \quad \overline{\mathcal{G}_{M_u}} = \mathcal{G}_{M_u}. \qquad \square$$

(iii) Если $M_u \neq \varnothing$, то существует параболическая подгруппа $\mathcal{Q} \leqslant \mathcal{G}$, для которой $\mathcal{G}_{M_s} \leqslant \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ – некоторая подгруппа Леви, содержащая максимальный тор $\mathcal{T}$, и

$$\mathcal{G}_{M_u} \leqslant R_u(\mathcal{Q}), \quad \mathcal{G}_{M_s} \leqslant N_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_{M_u}) \leqslant \mathcal{Q},$$

где $N_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_{M_u})$ – нормализатор подгруппы $\mathcal{G}_{M_u}$ в группе $\mathcal{G}$ (см. [6, §30]).

Определение 3.1. *Подмножество корней $M \subset R$ называется линейно замкнутым, если из включения $\epsilon = r_1\alpha_1 + \cdots + r_k\alpha_k \in R$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in M$, $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{Q}$, следует включение $\epsilon \in M$. Пустое множество M также считаем линейно замкнутым.*

Замечание 3.2. Если V – вещественное линейное пространство, порожденное корнями системы R, а $\langle M\rangle$ – подпространство, порожденное линейно замкнутым множеством M, то $M = R \cap \langle M\rangle$.

Пример. *Пусть $R = C_l$, а M – множество длинных корней. Тогда $M = M_s = \cup_{i=1}^{l} M_s^i$, где $M_s^i = \{\pm 2\epsilon_i\}$ – неприводимая система корней ранга один. При этом множество линейных комбинаций (над $\mathbb{Q}$) корней из M содержат всю систему R. Следовательно, M – замкнутое, но не линейно замкнутое подмножество корней в R.*

Предложение 3.3. *Пусть M – замкнутая система корней в R. Если M_s – линейно замкнутое подмножество, то группа G имеет M-разложение. При этом такое разложение является квазипараболическим типа* (2.4).

Доказательство. Пусть $\widetilde{R} \subset R$ – некоторая подсистема корней (возможно приводимая), содержащая подмножество M_s. Тогда M_s – также линейно замкнутое подмножество в $\widetilde{R}$. Следовательно,

$$M_s = \widetilde{R} \cap \langle M_s\rangle, \tag{3.4}$$

где $\langle M_s\rangle$ – вещественное линейное пространство, порожденное множеством корней M_s (пространство $\langle M_s\rangle$ – это подпространство вещественного линейного пространства $\langle\widetilde{R}\rangle$, порожденного системой корней $\widetilde{R}$). Из условия (3.4) следует, что существуют базисы Φ', Φ систем корней $M_s \subset \widetilde{R}$ такие, что $\Phi' \subset \Phi$ ([3], Глава 6, §1, Предложение 24). Тогда $\mathcal{T}\mathcal{G}_{M_s}$ – подгруппа Леви стандартной параболической группы $\widetilde{\mathcal{P}}$ (соответсвующая базисам $\Phi' \subset \Phi$) редуктивной алгебраической группы

$\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{T}\langle \overline{X}_\gamma \mid \gamma \in \widetilde{R}\rangle$. При этом $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{T}\langle \overline{X}_\gamma \mid \gamma \in \widetilde{R}^+\rangle$ (здесь $\widetilde{R}^+$ – это положительные корни относительно базиса Φ) – подгруппа Бореля и

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \mathcal{G}_{M_s}\widetilde{\mathcal{B}}. \tag{3.5}$$

Предположим, что $M_u \neq \varnothing$. Тогда существует параболическая подгруппа $\mathcal{Q}$ группы $\mathcal{G}$ такая, что

$$\mathcal{T}\mathcal{G}_{M_s} \leqslant \mathcal{L}, \quad \mathcal{G}_{M_u} \leqslant R_u(\mathcal{Q}), \quad \mathcal{T}G_{M_s} \leqslant N_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_{M_u}),$$

где $\mathcal{L}$ – некоторая подгруппа Леви, соответствующая параболической подгруппе $\mathcal{Q}$, см. (iii). Поскольку $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{L}$, полупростая часть редуктивной группы $\mathcal{L}$ порождается корневыми подгруппами $\overline{X}_\gamma$, где γ пробегает некоторую подсистему корней $\widetilde{R} \subset R$ ([1], Глава IV, 14.4). Пусть $\widetilde{\mathcal{P}}$ – параболическая подгруппа редуктивной группы $\mathcal{L}$, удовлетворяющая равенству (3.5). Так как $\widetilde{\mathcal{B}}$ нормализует унипотентный радикал $R_u(\mathcal{Q})$, то $\mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{B}}R_u(\mathcal{Q})$ – связная разрешимая подгруппа простой алгебраической группы $\mathcal{G}$, содержащая тор $\mathcal{T}$. При этом размерность этой группы совпадает с размерностью подгруппы Бореля группы $\mathcal{G}$, а значит, группа $\mathcal{B}$ является группой Бореля в $\mathcal{G}$, соответствующей максимальному тору $\mathcal{T}$. Если $\mathcal{N} = N_{\mathcal{T}\mathcal{G}_{M_s}}(\mathcal{T})$ – нормализатор тора $\mathcal{T}$ в группе $\mathcal{T}\mathcal{G}_{M_s}$, то

$$\mathcal{P} := \mathcal{B}\mathcal{N}\mathcal{B} = \mathcal{G}_{M_s}\mathcal{B}$$

– параболическая подгруппа группы $\mathcal{G}$, группа Леви которой совпадает с $\mathcal{T}\mathcal{G}_{M_s}$, а $\mathcal{G}_{M_u} \leqslant R_u(\mathcal{P})$ – подгруппа, содержащаяся в радикале и инвариантная относительно группы Леви $\mathcal{T}\mathcal{G}_{M_s}$. При этом группа $\mathcal{P}$ порождается корневыми подгруппами $\overline{X}_\gamma$ и является стандартной параболической группой относительно подходящих базисов $\Delta' \subset \Delta$ систем корней, соответствующих группам $\mathcal{G}_{M_s}$ и $\mathcal{G}$. При выборе таких базисов получаем $M_u \subset R^+$. Переходя к группам K-точек расщепимых групп $\mathcal{T}$, $\mathcal{G}_{M_s}$, $\mathcal{G}$, получаем M-разложение группы $G = \mathcal{G}(K)$ типа (2.4)

$$\Big(\prod_{\gamma\in R^-\setminus M_s} X_\gamma\Big)\Big(\prod_{\beta\in R^+\setminus(M_s^+\cup M_u)} X_\beta\Big)\; T\; \underbrace{\Big(\prod_{\beta\in\mathfrak{M}} X_\beta\Big)\Big(\prod_{\alpha\in M_s^-} X_\alpha \prod_{\alpha\in M_s^+} X_\alpha\Big)}_{M:=M_u\cup M_s}$$

(здесь $R' = \langle\Delta'\rangle = M_s$, M_s^+, M_s^- – положительные и отрицательные корни относительно базиса Δ', $\mathfrak{M} = M_u$).

Предположим, что $M_u = \varnothing$. Тогда M-разложение непосредственно вытекает из (3.5) при $\widetilde{R} = R$. □

Следствие 3.4. *Пусть M – замкнутая система корней в R, в которой $M_s = \varnothing$ или $M_s = \langle \alpha, -\alpha \rangle$. Тогда G имеет M-разложение.*

Доказательство. Если $|\, M_s \,| \leqslant 2$, то M_s – линейно замкнутая система корней. □

Следствие 3.5. *Пусть M – замкнутая система корней в R и пусть G – группа типа A_l. Тогда G имеет M-разложение.*

Доказательство. Пусть $M_s = M_s^1 \cup M_s^2 \cup \cdots \cup M_s^k$ – разложение системы корней в неприводимые подсистемы. Так как R – система типа A_l, то любая подсистема M_s^i имеет тип A_{l_i} и является линейно замкнутым множеством, поскольку не существует неприводимая система корней R' ранга l_i, для которой $A_{l_i} \subsetneqq R'$. Далее, корни системы M_s^i имеют вид $\pm\, \epsilon_{p_i} \mp \epsilon_{q_i}$. При этом, если $j \neq i$, то

$$\epsilon_{p_j} \neq \pm\, \epsilon_{p_i}, \pm\, \epsilon_{q_i}, \qquad \epsilon_{q_j} \neq \pm\, \epsilon_{p_i}, \pm\, \epsilon_{q_i}. \tag{3.6}$$

Пусть $\mathcal{V}_{l+1}$ – евклидово пространство с ортонормированным базисом $\{\epsilon_j\}_{j=1}^{l+1}$. Мы рассматриваем систему корней M_s^i как подмножество линейного пространства $\mathcal{V}_{l+1}$, порожденное корнями вида $\pm\, \epsilon_{p_i} \mp \epsilon_{q_i}$. Линейное подпространство $\mathcal{V}_{l+1}$, порожденное корнями M_s^i, обозначим V_i, а линейное подпространство, порожденное корнями M_s, обозначим V. Тогда $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$. Пусть $\mu \in R \cap V$ и пусть

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k, \quad \text{где } \mu_i \in V_i.$$

Так как μ_i – это линейная комбинация корней вида $\pm\, \epsilon_{p_i} \mp \epsilon_{q_i}$, то в разложении по базису $\{\epsilon_j\}_{j=1}^{l+1}$ в пространстве $\mathcal{V}_{l+1}$

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{l+1} c_{ij} \epsilon_j$$

по крайней мере два коэффициента c_{ij_1}, c_{ij_2} не равны нулю. Следовательно, если $\mu_i, \mu_j \neq 0$ для некоторых $i \neq j$, то из условия (3.6) следует, что в разложении по базису $\{\epsilon_j\}_{j=1}^{l+1}$ в пространстве $\mathcal{V}_{l+1}$

$$\mu = \sum_{j=1}^{l+1} d_j \epsilon_j$$

по крайней мере четыре коэффициента $d_{is_1}, d_{is_2}, d_{s_2}, d_{s_4}$ не равны нулю, а значит, μ – не корень. Таким образом, любой корень $\mu \in M_s$, представимый в виде линейной комбинации корней (над $\mathbb{Q}$) из множества M_s, должен совпадать с μ_i – линейной комбинацией корней только из одной неприводимой подсистемы M_s^i. Из линейной замкнутости системы M_s^i следует, что $\mu \in M_s^i$.

Мы показали, что для системы корней $R = A_l$ замкнутое подмножество корней является также и линейно замкнутым, а значит, группа G имеет M-разложение. □

Пусть M – замкнутая система корней в R. Условие линейной замкнутости подмножества M_s является достаточным для существования M-разложения (квазипараболического). *Возможно, что это и необходимое условие.*

Заметим, что если M_s – замкнутая подсистема корней в R, то линейное замыкание R' множества M_s удовлетворяет следующему условию: при некотором выборе базиса Δ системы R подсистема R' порождается базисом $\Delta' \subset \Delta$, который соответствует некоторой части диаграммы Дынкина системы R (см. ([3], Глава 6, §1, Предложение 24). Таким образом, для описания случаев, когда Предложение 3.3 не гарантирует M-разложение для группы G, достаточно выписать следующие тройки:

$$M_s = R'' \subsetneq R' \subset R,$$

где R – неприводимая система корней, R' – подсистема корней, соответствующая некоторой части диаграммы Дынкина для R, R'' – подсистема корней в R', у которой ранг совпадает с рангом R'. Такие тройки хорошо известны (см., например, [2]). В частности, если подсистема корней $M_s \subset R$ является неразложимой, то достаточно рассмотреть случаи, когда $R' = R$ и

A. $M_s = A_2$, если $R = G_2$; $M_s = A_7$, если $R = E_7$; $M_s = A_8$, если $R = E_8$;

B. $M_s = B_4$, если $R = F_4$;

D. $M_s = D_r$ для любого r в интервале $4 \leqslant r \leqslant l$, если $R = B_l$; $r = 8, 4$, если $R = E_8$, F_4 соответственно.

§4. Универсальные M-разложения в группе $\mathrm{SL}_3(K)$

Напомним, что универсальным M-разложением называется такое M-разложение, при котором можно фиксировать любой порядок в произведениях $\prod\limits_{\beta\in R\setminus M} X_\beta$, $\prod\limits_{\alpha\in M} X_\alpha$. Примером универсального M-разложения является разложение Гаусса и все разложения, которые могут быть получены из раложения Гаусса заменой корневых подгрупп X_α, X_β на корневые подгруппы $X_{w(\alpha)}$, $X_{w(\beta)}$ для некоторого $w\in W$ (такое разложение становится обычным разложением Гаусса, если выбрать вместо базиса Δ системы корней R базис $w(\Delta)$). Здесь мы рассмотрим возможности для универсалных M-разложений для случая группы $G=\mathrm{SL}_3(K)$.

Пусть $R=\langle\alpha,\beta\rangle$ – система корней A_2. Здесь $\alpha=\epsilon_1-\epsilon_2$, $\beta=\epsilon_2-\epsilon_3$, $\gamma:=\alpha+\beta=\epsilon_1-\epsilon_3$ в обозначениях [3]. Отождествим корневые элементы $x_\lambda(s_\lambda)$ группы G с соответствующими матрицами:

$$x_\alpha(s_\alpha)=\begin{pmatrix}1&s_a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad x_\beta(s_b)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&s_\beta\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$x_\gamma(s_\gamma)=\begin{pmatrix}1&0&s_\gamma\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad x_{-\alpha}(s_{-\alpha})=\begin{pmatrix}1&0&0\\s_{-\alpha}&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$x_{-\beta}(s_{-\beta})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&s_{-\beta}&1\end{pmatrix},\quad x_{-\gamma}(s_{-\gamma})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\s_{-\gamma}&0&1\end{pmatrix}.$$

Положим $s_\alpha=s_\gamma=s,\ s_\beta=-1,\ s_{-\alpha}=0,\ s_{-\beta}=1,\ s_{-\gamma}=1$. Тогда

$$\begin{aligned}&x_\alpha(s)x_{-\alpha}(0)x_\beta(-1)x_{-\beta}(1)x_\gamma(s)x_{-\gamma}(1) \qquad (4.1)\\
&=\begin{pmatrix}1&s&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&s\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&s&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+s&0&s\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&0&-s\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+s&0&s\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Таким образом, для любого параметра s в разложении (4.1) получаем один и тот же элемент группы G. Используя тождество (4.1), можно описать универсальные M-разложения для группы G.

Случай I. $M = \{\mu\}$. Тогда любое M-разложение имеет вид

$$X_M = \Big(\prod_{\beta\neq\mu} X_\beta\Big) \cdot T \cdot X_\mu.$$

Так как группа W действует транзитивно на R, то $w(\mu) = -\gamma$ для некоторого $w \in W$, где $\gamma = \alpha + \beta$. Поэтому можно считать, что $\mu = -\gamma$. Ввиду (4.1) мы не получим M-разложения, если корни множества $R \setminus \{-\gamma\}$ расположены в произведении $\prod\limits_{\beta\neq\mu} X_\beta$ в следующем порядке: α, $-\alpha$, β, $-\beta$, γ.

Случай II. $M = \{\mu, \nu\}$.

II a. $\mu+\nu \in R$. Тогда M – базис системы R. Поскольку любые два базиса сопряжены элементом группы Вейля, то можно считать, что $\mu = -\beta$, $\nu = \gamma$. При этом, если существует M-разложение, то корни в $R \setminus M$ и в M можно зафиксировать в следующем порядке $\{-\gamma, \alpha, -\alpha, \beta\}$, $\{-\beta, \gamma\}$. Ввиду (4.1) мы получим тождество

$$x_{-\gamma}(1)x_\alpha(s)x_{-\alpha}(0)x_\beta(-1)x_{-\beta}(1)x_\gamma(s) \\ = x_{-\gamma}(1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x_{-\gamma}(-1),$$

из которого следует неоднозначность разложения в произведение корневых элементов при данном порядке на множествах $R \setminus M$ и M.

II b. $\mu + \nu = 0$. Можно считать, что $\mu = \gamma$, $\nu = -\gamma$. Тогда при соответствующем порядке корней в $R \setminus M$ мы получаем тождество (4.1), а значит, при таком M соответствующее M-разложение не является универсальным.

II c. $0 \neq \mu+\nu \notin R$. Поскольку такие пары в $R = A_2$ сопряжены элементом группы автоморфизмов системы корней R (см. [3, Глава VI, §1]), можно считать, что $\mu = \beta$, $\nu = \gamma$. Отметим, что $x_\beta(r)x_\gamma(s) = x_\gamma(s)x_\beta(r)$ для любых r, $s \in K$.

Лемма 4.1. *Для любого порядка на множестве*

$$R \setminus M = \{-\gamma, -\beta, -\alpha, \alpha\}$$

элемент

$$g = \Big(\prod_{\lambda \in R \setminus M} x_\lambda(s_\lambda) \Big) \cdot t,$$

где $s_\lambda \in K,\ t \in T$, *определяет однозначно элементы* s_λ, t.

Доказательство. Пусть

$$L = T\,\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle, \quad U = \langle X_\beta, X_\gamma\rangle, \quad V = \langle X_{-\beta}, X_{-\gamma}\rangle.$$

Тогда $P = LU,\ P^- = LV$ – параболические подгруппы группы G, у которых L – группа Леви, а U, V – унипотентные радикалы. Любой элемент множества $P^- P$ однозначно представим в виде

$$\underbrace{x_{-\beta}(r_{-\beta})x_{-\gamma}(r_{-\gamma})}_{v \in V}\, l\, \underbrace{x_\beta(r_\beta)x_\gamma(r_\gamma)}_{u \in U} \quad \text{где} \quad l \in L \tag{4.2}$$

(см. 2.1). Рассмотрим элемент

$$x = \Big(\prod_{\lambda \in R \setminus M} x_\lambda(s_\lambda) \Big) \cdot t \tag{4.3}$$

для некоторого зафиксированного порядка корней множество $R \setminus M$. Используя тождество

$$\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_i\sigma_{i+1} \cdots \sigma_n = \sigma_1\sigma_2 \cdots \big(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i^{-1}\big)\sigma_i \cdots \sigma_n$$

для последовательности $\sigma_i = x_\lambda(s_\lambda)$ и соотношения

$$\begin{cases} x_\alpha(s_\alpha)x_{-\beta}(s_{-\beta})x_\alpha(-s_\alpha) = x_{-\beta}(s_{-\beta}), \\ x_\alpha(s_\alpha)x_{-\gamma}(s_{-\gamma})x_\alpha(-s_\alpha) = x_{-\gamma}(s_{-\gamma})x_{-\beta}(\pm s_\alpha s_{-\gamma}), \\ x_{-\alpha}(s_{-\alpha})x_{-\beta}(s_{-\beta})x_{-\alpha}(-s_{-\alpha}) = x_{-\beta}(s_{-\beta})x_{-\gamma}(\pm s_{-a}s_{-\beta}), \\ x_\alpha(s_\alpha)x_{-\gamma}(s_{-\gamma})x_\alpha(-s_\alpha) = x_{-\gamma}(s_{-\gamma})x_{-\beta}(\pm s_\alpha s_{-\gamma}), \end{cases} \tag{4.4}$$

можно переместить элементы $x_\alpha(s_\alpha)$, $x_{-\alpha}(s_{-\alpha})$ в произведении (4.3) вправо и получить разложение вида (4.2), где $l = x_\alpha(s_\alpha)x_{-\alpha}(s_{-\alpha})t$ или $l = x_{-\alpha}(s_{-\alpha})x_\alpha(s_\alpha)t$ и $r_\beta = r_\gamma = 0$. При этом элементы $r_{-\beta}$, $r_{-\gamma}$ однозначно определяются элементами $s_{-\beta}$, $s_{-\gamma}$, $s_{-\alpha}$, s_α (т. е. для разных последовательностей $s_{-\beta}$, $s_{-\gamma}$, $s_{-\alpha}$, s_α получим разные последовательности $r_{-\beta}$, $r_{-\gamma}$; это следует из соотношений (4.4)). Далее, элемент $l = x_\alpha(s_\alpha)x_{-\alpha}(s_{-\alpha})t$ или $l = x_{-\alpha}(s_{-\alpha})x_\alpha(s_\alpha)t$ однозначно определен элементами $s_\alpha, s_{-\alpha} \in K, t \in T$. Таким образом, из элемента $x = x(s_\alpha, s_{-\alpha}, s_{-\beta}, s_{-\gamma}, t)$ вида (4.3) соответствующими перестановками корневых элементов $x_\lambda(s_\lambda)$ можно получить тот же элемент

$x = x(r_{-\beta}, r_{-\gamma}, l)$, но в форме (4.2), которая однозначно определяется элементами $r_{-\beta}$, $r_{-\gamma}$, l. $\square$

Ввиду леммы 4.1 при любом порядке на множестве $R \backslash M$ мы получаем однозначность разложения элементов множества $\Big(\prod\limits_{\lambda \in R \backslash M} x_\lambda(s_\lambda)\Big) \cdot t$. Однозначность в разложении $\Big(\prod\limits_{\lambda \in R \backslash M} x_\lambda(s_\lambda)\Big) \cdot t \cdot \Big(x_\beta(s_\beta) x_\gamma(s_\gamma)\Big)$ вытекает из (2.1).

Случай III. $M = \{\mu, \nu, \lambda\}$.

III a. $M = R^+$ при некотором выборе базиса системы корней R. Тогда мы получаем обычное разложение Гаусса, которое является M-универсальным.

III b. $\nu = -\mu$. Можно считать, что $\mu = \gamma$. Тогда $\lambda = \pm\alpha, \pm\beta$. Так как $w_\gamma(\gamma) = -\gamma$, $w_\gamma(\alpha) = -\beta$, $w_\gamma(\beta) = -\alpha$, где $w_\gamma \in W$ – отражение, соответствующее корню γ, то можно считать, что

$$M = \{\gamma, -\gamma, -\beta\} \quad \text{или} \quad \{\gamma, -\gamma, -\alpha\}.$$

Если $M = \{\gamma, -\gamma, -\beta\}$, то выбирая порядок на $R \setminus M$ и M

$$\underbrace{\alpha, -\alpha, \beta}_{=R \backslash M}, \quad \underbrace{-\beta, \gamma, -\gamma}_{=M}$$

мы можем получить тождество (4.1), которое препятствует существованию M-разложения. Если $M = \{\gamma, \gamma, -\alpha\}$, то выбирая порядок на $R \setminus M$ и M

$$\underbrace{\alpha, \beta, -\beta}_{=R \backslash M}, \quad \underbrace{-\alpha, \gamma, -\gamma}_{=M}$$

и учитывая, что в произведении (4.1) присутствует единичная матрица $x_{-\alpha}(0)$, также получаем тождество (4.1).

III c. $\mu + \nu = -\lambda$. Можно считать, что $M = \{-\alpha, -\beta, \gamma\}$. Зафиксируем порядок $-\gamma$, α, β на $R \setminus M$. Тогда из тождества (4.1) получим тождество

$$x_{-\gamma}(1)\big(x_\alpha(s)x_{-\alpha}(0)x_\beta(-1)x_{-\beta}(1)x_\gamma(s)x_{-\gamma}(1)\big)x_{-\gamma}(-1)$$
$$= \underbrace{x_{-\gamma}(1)x_\alpha(s)x_\beta(-1)}_{R\backslash M}\ \underbrace{x_{-\alpha}(0)x_{-\beta}(1)x_\gamma(s)}_{M}$$
$$= x_{-\gamma}(1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}x_{-\gamma}(-1).$$

Случай IV. $\mid M\mid > 3$. Заменяя в тождестве (4.1) все элементы на обратные, получим тождество

$$x_{-\gamma}(-1)x_\gamma(-s)x_{-\beta}(-1)x_\beta(1)x_{-\alpha}(0)x_\alpha(-s) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}.$$

Теперь, рассматривая вместо M множество $R\setminus M$, можно получить аналогичные результаты для случаев $|M| < 3$.

Суммируя рассуждения, приведенные выше, получаем

Предложение 4.2. *Множество $M\subset R$ определяет универсальное M-разложение тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

(i) $M=\{\mu,\nu\}$, $0\neq\mu+\nu\notin R$;
(ii) $M=\{\mu,\nu,\lambda\}$, $\mu+\nu=\lambda$;
(iii) $M=\{\mu,\nu,\lambda,-\lambda\}$, $0<\mu+\nu\notin R$.

Замечание 4.3. Случай (i) и случай (iii) – производные от разложения подмножества P^-P, где

$$P = \underbrace{T\,\langle X_{\pm\lambda}\rangle}_{L}\ \underbrace{\langle X_\mu, X_\nu\rangle}_{=R_u(P)}$$

– параболическая подгруппа, L – ее подгруппа Леви, а $R_u(P)$ – ее унипотентный радикал. В случае (i), $R\backslash M$ – корни, соответствующие корневым подгруппам параболической группы P^-. Отметим, что случай (i) является квазипараболическим разложением, у которого $M_s=\varnothing$. В случае (iii), множество M – это корни, соответствующие корневым подгруппам параболической группы P.

§5. Пример неоднозначности разложения в произведение корневых подгрупп в группе типа C_2

Пусть V – линейное пространство над полем K, $\dim V = 4$, на котором определена невырожденная кососимметрическая билинейная форма $< > : V \times V \to K$. Далее пусть $e_1,\ e_2,\ e_{-2},\ e_{-1}$ – базис линейного пространства V такой, что

$$< e_1, e_{-1} >= 1, \quad < e_2, e_{-2} >= 1 \quad \text{и} \quad < e_i, e_j >= 0 \quad \text{для всех} \quad j \neq -i.$$

Симплектическая группа $\mathrm{Sp}(V)$ – это односвязная группа типа C_2, порожденная корневыми подгруппами

$$x_{\epsilon_1-\epsilon_2}(p),\ x_{\epsilon_1+\epsilon_2}(q),\ x_{2\epsilon_1}(s),\ x_{2\epsilon_2}(t),\ x_{-\epsilon_2+\epsilon_1}(w),$$
$$x_{-\epsilon_1-\epsilon_2}(r),\ x_{-2\epsilon_1}(v),\ x_{-2\epsilon_2}(u),$$

где $p, q, s, t, w, r, v, u \in K$. Базисные векторы $e_1,\ e_2,\ e_{-2},\ e_{-1}$ являются весовыми векторами, соответствующими весам $\epsilon_1,\ \epsilon_2,\ -\epsilon_2,\ -\epsilon_1$. Далее

$$x_{\epsilon_1-\epsilon_2}(p) = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{-\epsilon_1+\epsilon_2}(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ w & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -w & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{\epsilon_1+\epsilon_2}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{-\epsilon_1-\epsilon_2}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{2\epsilon_1}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{-2\epsilon_1}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{2\epsilon_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{-2\epsilon_2}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая соответствующие матрицы $x_\lambda(s_\lambda)$, получим

$$x_{-\epsilon_1-\epsilon_2}(0)x_{-\epsilon_1+\epsilon_2}\left(\tfrac{1-\alpha^2}{2\alpha}\right)x_{\epsilon_1+\epsilon_2}(\alpha)x_{\epsilon_1-\epsilon_2}(-\alpha)x_{2\epsilon_1}(-\alpha^2)x_{-2\epsilon_2}(1) \quad (5.1)$$

$$\times x_{2\epsilon_2}(0)x_{-2\epsilon_1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} & 1 & \frac{1-\alpha^2}{2} & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 & \alpha \\ 1-\frac{1-\alpha^2}{2} & -\frac{1-\alpha^2}{2\alpha} & -\frac{1-\alpha^2}{2\alpha} & 1-\frac{1-\alpha^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$= x_{-\epsilon_1-\epsilon_2}(\alpha)x_{-\epsilon_1+\epsilon_2}\left(\tfrac{1+\alpha^2}{2\alpha}\right)x_{\epsilon_1+\epsilon_2}(\alpha)x_{\epsilon_1-\epsilon_2}(-\alpha)x_{2\epsilon_1}(-\alpha^2)x_{-2\epsilon_2}(1)$$
$$\times x_{2\epsilon_2}(-\alpha^2)x_{-2\epsilon_1}(0).$$

Доказательство.

$$A := x_{\epsilon_1+\epsilon_2}(\alpha)x_{\epsilon_1-\epsilon_2}(-\alpha)x_{2\epsilon_1}(-\alpha^2)x_{-2\epsilon_2}(1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее

$$x_{-\epsilon_1-\epsilon_2}(0)x_{-\epsilon_1+\epsilon_2}\left(\tfrac{1-\alpha^2}{2\alpha}\right)Ax_{2\epsilon_2}(0)x_{-2\epsilon_1}(1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\alpha^2}{2\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-\alpha^2}{2\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} & 1 & \frac{1-\alpha^2}{2} & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 & \alpha \\ 1-\frac{1-\alpha^2}{2} & -\frac{1-\alpha^2}{2\alpha} & -\frac{1-\alpha^2}{2\alpha} & 1-\frac{1-\alpha^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1+\alpha^2}{2} & \alpha & -\frac{1+\alpha^2}{2\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha^2 & \alpha \\ 0 & 1 & 1-\alpha^2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+\alpha^2}{2\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_{-\epsilon_1-\epsilon_2}(\alpha) x_{-\epsilon_1+\epsilon_2}\left(\tfrac{1+\alpha^2}{2\alpha}\right) A x_{2\epsilon_2}(-\alpha^2) x_{-2\epsilon_1}(0). \qquad \square$$

Предложение 5.1. *Для замкнутого множества корней*

$$M = \{\pm 2\epsilon_1, \pm 2\epsilon_2\}$$

не существует универсальное M-разложение группы $G = \mathrm{Sp}_4(K)$.

Доказательство. Тождество (5.1) показывает, что не существует M-разложение группы G при следующем порядке корней

$$\underbrace{-\epsilon_1-\epsilon_2,\ -\epsilon_1+\epsilon_2,\ \epsilon_1+\epsilon_2,\ \epsilon_1-\epsilon_2}_{R\setminus M},\ \underbrace{2\epsilon_1,\ -2\epsilon_2,\ 2\epsilon_2,\ -2\epsilon_1}_{M}. \qquad \square$$

Замечание 5.2. По-видимому, используя тождество (5.1) можно показать невозможность M-разложения группы G. Для этого надо проверить, что при любой перестановке корней в $R\setminus M$ и при любой перестановке корней в M мы также получим неоднозначность при разложении в произведение элементов корневых подгрупп и тора. По крайней мере, это очевидно для перестановок корней внутри множества M.

Список литературы

1. A. Borel, *Linear Algebraic groups*, 2nd enlarged edition, Graduate texts in mathematics **126**, Springer-Verlag, New York, 1991.
2. A. Borel, J. Siebenthal, *Les sous-groupes ferm s de rang maximum des groupes de Lie clos.* — Commentarii Mathematici Helvetici **23** (1949), 200–221.
3. N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique. Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. IV, V, VI, 2ème édition, Masson, Paris, 1981.
4. E. Ellers, N. Gordeev, *Intersection of Conjugacy Classes of Chevalley Groups with Gauss Cells.* — J. Algebra **220** (1999), 591–611.
5. Р. Стейнбег, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, Москва, 1975.
6. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, Москва, 1980.

Gordeev N. L. Generalized Gauss decompositions of simple algebraic groups.

Let $\mathcal{G}$ be a simple algebraic group which is defined and split over a field K and which corresponds to an irreducible root system R. Further, let $G = \mathcal{G}(K)$ be the group of K-points. We say that the group G has an M-decomposition, where $M \subset R$, if every element of the subset $\prod_{\beta \in R \setminus M} X_\beta \cdot T \cdot \prod_{\alpha \in M} X_\alpha$, where X_β, X_α are root subgroups and T is the group of K-points of a maximal split torus, can be represented uniquely as products of eleements of root subgroups and the group T. Moreover, we assume here that the order of the multiplication of elements of groups X_β and X_α is fixed. If such a decomposition holds for every fixed order of the multiplication of elements of groups $\{X_\beta\}_{\beta \in R \setminus M}$, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in M}$, we say that the group G has the universal M-decomposition. The important example of the universal M-decomposition является is the classical Gauss decomposition where $M = R^+$ is the set of positive roots.

In this paper we consider the examples of M-decompositions, which appear when we deal with parabolic subgroups of $\mathcal{G}$. Moreover, for groups of types A_2, B_2 we construct the identities which are obstacles to a construction of universal M-decomposition for some subsets $M \subset R$.

Факультет математики
Российского Государственного
Педагогического Университета
имени А. И. Герцена,
Набережная реки Мойки 48,
Санкт-Петербург 191186, Россия
E-mail: nickgordeev@mail.ru

Поступило 26 сентября 2023 г.