Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 522, 2023 г.

И. М. Певзнер

ОРБИТЫ ВЕКТОРОВ НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ. III

Пусть Φ – система корней одинаковой длины и K – произвольное поле. Далее, обозначим через δ максимальный корень системы Φ и положим $\Phi_0 = \{\alpha \in \Phi; \delta \perp \alpha\}$, $G_0 = G_{\mathrm{sc}}(\Phi_0, K)$ и $V_1 = \langle e_\alpha; \angle(\alpha, \delta) = \pi/3\rangle$, где e_α – элементарные корневые элементы. В настоящей серии статей рассмотрены орбиты действия группы G_0 на V_1.

Такое действие изучалось во множестве работ. Прежде всего это, разумеется, случай $\Phi = \mathrm{E}_8$ – тогда получается 56-мерное минимальное микровесовое представление группы типа E_7. Остальные случаи исследуются меньше, однако тоже встречаются достаточно часто. Наряду с изучением собственно представления G_0 в V_1, это может помочь и при исследовании представления всей группы $G_{\mathrm{sc}}(\Phi, K)$ и соответствующей алгебры Ли.

Настоящая статья является продолжением работ [18, 19]. В них были доказаны некоторые общие результаты и разобраны случаи $\Phi = \mathrm{E}_l, \mathrm{A}_l$ и D_l при $\operatorname{char} K \neq 2$. В настоящей работе будут рассмотрены случаи $\Phi = \mathrm{E}_l$ при $\operatorname{char} K = 2$.

§1. Основные обозначения

Пусть K – произвольное поле с характеристикой, равной 2, Φ – система корней одной длины, $V = V(\Phi)$ – соответствующая алгебра Ли, а $G = G_{\mathrm{sc}}(\Phi, K)$ – соответствующая односвязная группа.

Как известно, в V существует базис Шевалле $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi; h_\alpha, \alpha \in \Pi\}$, где Π – фундаментальная система корней. При этом все h_α берутся из подалгебры Картана; $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$; $[h_\alpha, e_\beta] = A_{\alpha\beta} e_\beta$, где $A_{\alpha\beta} = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$ – числа Картана; $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$ при $\alpha + \beta \in \Phi$ и $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ при $\alpha + \beta \notin \Phi$ и $\beta \neq -\alpha$, где $N_{\alpha\beta} = \pm 1$ – структурные константы. В рассматриваемом случае $\operatorname{char} K = 2$ они все равны 1, но в этом параграфе мы их все же оставим для полноты картины. Коэффициент в разложении вектора $x \in V$ по этому базису при e_α обозначим

Ключевые слова: группы Шевалле, орбиты векторов, корневые элементы.
Настоящая работа выполнена при содействии проекта РФФИ 19-01-00297.

x^α, а соответствующий элемент из подалгебры Картана обозначим x^h; тогда $x = \sum_{\alpha\in\Phi} x^\alpha e_\alpha + x^h$.

Далее, в группе G выделяются элементарные корневые элементы $x_\alpha(a)$, $\alpha \in \Phi$, $a \in K$ и $X_\alpha = \langle x_\alpha(a); a \in K\rangle$ – элементарные корневые подгруппы. В работе будут использоваться формулы для действия элементы $x_\alpha(a)$ на базисе Шевалле. Они перечислены, например, в [35]. Нам понадобятся следующие равенства: $x_\alpha(a)e_\beta = e_\beta$ при $\angle(\alpha,\beta) < 2\pi/3$, $x_\alpha(a)e_\beta = e_\beta + N_{\alpha\beta}ae_{\alpha+\beta}$ при $\angle(\alpha,\beta) = 2\pi/3$, $x_\alpha(a)e_{-\alpha} = e_{-\alpha} + ah_\alpha - a^2e_\alpha$ и $x_\alpha(a)h_\beta = h_\beta - A_{\beta\alpha}ae_\alpha$; мы будем ими пользоваться без дополнительных ссылок.

Обозначим через δ максимальный корень системы Φ. Экстраспециальным унипотентным радикалом называется подгруппа

$$U_\delta = \langle X_\alpha; \angle(\alpha,\delta) < \pi/2\rangle.$$

Подробнее об этом радикале говорится, например, в [7, 16].

Пусть $\alpha \in \Phi$ – некоторый корень. Разобьем все корни из Φ на пять классов в зависимости от их расположения относительно корня α: $\Phi_2(\alpha) = \{\alpha\}$, $\Phi_1(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = \pi/3\}$, $\Phi_0(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = \pi/2\}$, $\Phi_{-1}(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = 2\pi/3\}$, $\Phi_{-2}(\alpha) = \{-\alpha\}$. Другими словами, β принадлежит $\Phi_i(\alpha)$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение β и α равно $i/2$. Простейшие свойства этого разбиения приведены в [16]. Часто нас будет интересовать случай $\alpha = \delta$; для краткости, аргумент у $\Phi_i(\delta)$ будем опускать. В этих обозначениях $U_\delta = \langle X_\alpha; \alpha \in \Phi_2 \cup \Phi_1\rangle$.

§2. Необходимые результаты из работы [18]

1. Так как настоящая работа является переносом результатов статьи [18] со случая $\operatorname{char} K \neq 2$ на случай $\operatorname{char} K = 2$, стоит напомнить основные моменты той статьи. Мы рассматриваем орбиты действия группы $G_0 = G_{\mathrm{sc}}(\Phi_0, K)$ на пространстве $V_1 = \langle e_\alpha; \alpha \in \Phi_1\rangle$. Пусть $x \in V_1$. Сначала мы доказали, что можно считать, что $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; здесь $\lambda, \mu, \nu, \xi \in \Phi_1$ – некоторые попарно ортогональные корни и $\lambda + \mu + \nu + \xi = 2\delta$. Далее мы доказывали, что для систем $\Phi = \mathrm{E}_6$, E_7 и E_8 корни λ, μ, ν и ξ могут быть выбраны произвольно. После этого мы заметили, что любой $x \in V_1$ приводится к одному из следующих типов.

I. $x = 0$.

II. $x = x^\lambda e_\lambda$; $x^\lambda \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1.

III. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^\mu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1 и A_2.

IV. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

V. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

VI. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda}$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda} \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1.

VII. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda}, x^\mu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1 и A_2.

VIII. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda}, x^\mu, x^\nu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

IX. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda}, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

От VII и VIII случаев мы избавились сразу же. Далее, от VI случая мы избавлялись при $\Phi \neq \mathrm{A}_l$ и $|K| > 2$, а от IX – при $\operatorname{char} K \neq 2$. Кроме того, мы доказали следующую несложную лемму.

Лемма 1 (Лемма 1 из [18]). *Пусть*

$$w_\alpha(a) = x_{-\alpha}(-a^2 + a) x_\alpha(-\frac{1}{a}) x_{-\alpha}(a-1) x_\alpha(1),$$

где $\alpha \in \Phi_0$ и $a \in K^*$. Тогда $w_\alpha(a) e_\beta = \frac{1}{a} e_\beta$ при $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$; $w_\alpha(a) e_\beta = e_\beta$ при $\angle(\alpha, \beta) = \pi/2$ и $w_\alpha(a) e_\beta = a e_\beta$ при $\angle(\alpha, \beta) = 2\pi/3$.

С помощью этой леммы мы избавлялись от большинства коэффициентов в оставшихся случаях и приходили к искомому списку орбит.

2. Далее мы доказывали, что все описанные случаи дают разные орбиты. Во-первых, была доказана следующая лемма.

Лемма 2 (Лемма 3 из [18]). *Пусть $\Phi \neq \mathrm{A}_l$, $\operatorname{char} K \neq 2$ и $x = \sum_{\alpha \in \Phi_1} x^\alpha e_\alpha$. Тогда существует и единственен корневой элемент $y = \sum_{\alpha \in \Phi} y^\alpha e_\alpha + y^h$, для которого $y^\alpha = x^\alpha$ при $\alpha \in \Phi_1$, $y^\delta = 1$ и $y^h \in \langle h_\alpha; \alpha \in \Phi_0 \cap \Pi \rangle$.*

Во-вторых, мы вводили следующие определения: элемент x называется темным, если угол между соответствующим ему y и e_δ равен π (иначе говоря, $y^{-\delta} \neq 0$). Далее, x называется светящимся, если этот угол равен $2\pi/3$; блестящим, если угол равен $\pi/2$ и сингулярным, если он равен $\pi/3$. Как несложно видеть, последнее условие равносильно тому, что x – корневой элемент. Названия взяты из работы [30] для случая $\Phi = \mathrm{E}_8$. Их определения в [30] другие, но, на самом деле, равносильные.

Затем мы заметили, что при умножении на $g \in G_0$ элементу gx соответствует корневой элемент gy. При этом угол между y и e_δ при таком умножении также не меняется, значит определения темного, светящегося, блестящего и сингулярного элементов можно расширить на орбиты. Более того, если x темный, то коэффициент $y^{-\delta}$ также не меняется при умножении на $g \in G_0$, то есть тоже является инвариантом. Наконец, мы проверяли, что в случае II вектор x получается сингулярным, в случае III – блестящим, в случае IV – светящимся, а в случае V – темным. При этом в случае V инвариант $y^{-\delta}$ равнялся произведению нескольких структурных констант и $x^\lambda x^\mu x^\nu x^\xi$, поэтому произведение всех коэффициентов $x^\lambda x^\mu x^\nu x^\xi$ также постоянно. Для случая $\operatorname{char} K \neq 2$, рассматриваемого в статье [18], этого хватало для классификации. К сожалению, не все вышеописанное рассуждение проходит для рассматриваемого в настоящей работе случая $\operatorname{char} K = 2$, хотя оно по-прежнему остается очень полезным.

§3. Конструкция орбит при $\operatorname{char} K = 2$ и $|K| > 2$

3. Согласно пункту 1, если $\Phi = \mathrm{E}_l$, $\operatorname{char} K = 2$ и $|K| > 2$, то любой $x \in V_1$ приводится к одному из следующих типов.

I. $x = 0$.
II. $x = x^\lambda e_\lambda$; $x^\lambda \neq 0$.
III. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^\mu \neq 0$.
IV. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu \neq 0$.
V. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$.
IX. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda}, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$.

Теперь посмотрим, как можно упростить эти типы с помощью леммы 1. Напомним также, что корни $\lambda, \mu, \nu, \xi \in \Phi_1$ мы можем выбирать сами (с учетом попарной ортогональности), что упрощает подбор корня α из этой леммы. В типе I, разумеется, остается 0. В типе II, выбирая корень α из леммы так, чтобы $\angle(\lambda, \alpha) = \pi/3$, можно сделать x^λ равным 1. В типе III ситуация схожая – выбирая α так, чтобы $\angle(\lambda, \alpha) = \pi/3$ и $\angle(\mu, \alpha) = \pi/2$, можно сделать x^λ равным 1, а затем, выбирая α так, чтобы $\angle(\lambda, \alpha) = \pi/2$ и $\angle(\mu, \alpha) = \pi/3$, можно сделать и x^μ равным 1. Действуя аналогично, в типе IV можно сделать $x^\lambda = x^\mu = x^\nu = 1$. В типе V ситуация немного сложнее, так как не существует корня $\alpha \in \Phi_0$, ортогонального к μ, ν, ξ и неортогонального к λ. Выбирая корень α так, чтобы $\angle(\lambda, \alpha) = \pi/3$, $\angle(\mu, \alpha) = \angle(\nu, \alpha) = \pi/2$ и $\angle(\xi, \alpha) = 2\pi/3$, можно сделать x^λ равным 1; при этом x^μ и x^ν не меняются. Аналогичными действиями можно сделать x^μ и x^ν равными 1, при этом x^ξ станет равным произведению всех четырех изначальных коэффициентов. Повторяя рассуждения для типа IX, можно и в этом случае сделать коэффициенты x^λ, x^μ и x^ν равными 1; при этом коэффициент $x^{\delta-\lambda}$ станет равен произведению изначальных коэффициентов при корнях λ и $\delta-\lambda$, а коэффициент x^ξ – произведению изначальных коэффициентов при корнях λ, μ, ν и ξ.

4. Типы V и IX, оказывается, можно и еще упростить. Для этого стоит вспомнить, как в статье [18] для случая $\operatorname{char} K \neq 2$ избавлялись от типа IX. Повторим это рассуждение, слегка поменяв обозначения под наши цели. В той работе было показано, что можно считать все используемые в рассуждении структурные константы равными 1. В рассматриваемом сейчас случае все еще проще, при $\operatorname{char} K = 2$ структурные константы не важны, поэтому мы их не записываем.

Пусть $x_1 = x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$. "Испортим" этот элемент, а затем снова приведем его к такому же виду. Пусть $k \in K$ и $x_2 = x_{\delta-\mu-\nu}(k)x_1 = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + (x^\xi + k x^{\delta-\lambda}) e_\xi + k x^\mu e_{\delta-\nu} + k x^\nu e_{\delta-\mu}$. Теперь по очереди избавляемся в этом выражении от $e_{\delta-\nu}$ и $e_{\delta-\mu}$. Пусть $x_3 = x_{\delta-\lambda-\nu}(k\frac{x^\mu}{x^\lambda})x_2 = x^\lambda e_\lambda + (x^{\delta-\lambda} + k\frac{x^\mu x^\nu}{x^\lambda}) e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + (x^\xi + k x^{\delta-\lambda} + k^2 \frac{x^\mu x^\nu}{x^\lambda}) e_\xi + k x^\nu e_{\delta-\mu}$. Наконец, пусть $x_4 = x_{\delta-\lambda-\mu}(k\frac{x^\nu}{x^\lambda})x_3 = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + (x^\xi + k x^{\delta-\lambda} + k^2 \frac{x^\mu x^\nu}{x^\lambda}) e_\xi$.

В рассуждениях из пункта 3 у нас получалось в этих типах два "инварианта" – произведение изначальных коэффициентов при корнях λ и $\delta - \lambda$ и произведение изначальных коэффициентов при корнях λ, μ, ν и ξ. При преобразованиях из предыдущего абзаца первое произведение остается прежним, а второе меняется. Запишем это изменение так, чтобы оно не зависело от коэффициентов разложения нашего элемента, а только от первого "инварианта" (как мы увидим позднее, это действительно инвариант). Произведение $x^\lambda x^\mu x^\nu x^\xi$ перешло в $x^\lambda x^\mu x^\nu (x^\xi + k x^{\delta-\lambda} + k^2 \frac{x^\mu x^\nu}{x^\lambda}) = x^\lambda x^\mu x^\nu x^\xi + x^\lambda x^\mu x^\nu k x^{\delta-\lambda} + x^\mu x^\nu k^2 x^\mu x^\nu$. Полагая $l = x^\mu x^\nu k$, получаем $x^\lambda x^\mu x^\nu x^\xi + x^\lambda x^{\delta-\lambda} l + l^2$.

5. Для фиксированного $s \in K$ рассмотрим отношение $a \sim_s b \Leftrightarrow \exists l \in K : a = b + ls + l^2$. Несложно видеть, что для рассматриваемого случая $\operatorname{char} K = 2$ это отношение эквивалентности. Обозначим через K_s множество представителей классов эквивалентности по этому отношению.

Тогда если $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$ или E_8, $\operatorname{char} K = 2$ и $|K| > 2$, то любой $x \in V_1$ приводится к одному из следующих типов:

I. $x = 0$.
II. $x = e_\lambda$.
III. $x = e_\lambda + e_\mu$.
IV. $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu$.
V. $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\xi \in K_0$, $x^\xi \notin \bar{0}$.
IX. $x = e_\lambda + s e_{\delta-\lambda} + e_\mu + e_\nu + x^\xi e_\xi$; $s \in K^*, x^\xi \in K_s$.

§4. Доказательство различности орбит при $\operatorname{char} K = 2$ и $|K| > 2$

6. Осталось доказать, что все полученные типы лежат в разных орбитах. Для этого повторим, с соответствующими изменениями, доказательство леммы 3 из [18].

Как говорилось в утверждении 2 [17], любой корневой элемент $y = \sum_{\alpha\in\Phi} y^\alpha e_\alpha + y^h$ с $y^\delta = 1$ представляется в виде $y = u e_\delta$, где $u \in U_{-\delta}$ – унипотентный элемент, равный

$$u = x_{-\delta}(a) \cdot \prod_{\gamma\in\Phi_{-1}} x_\gamma\Big(N_{\gamma\delta} y^{\delta+\gamma}\Big)$$

для некоторого $a \in K$. Таким образом, для любого $x \in V_1$ существует целая серия корневых элементов y, таких что $y^\delta = 1$ и $y^\alpha = x^\alpha$ при $\alpha \in \Phi_1$, элементы которой отличаются друг от друга выбором коэффициента a. Есть ровно один простой корень α_k, не ортогональный к δ (для $\Phi = \mathrm{E}_6$ это α_2, для $\Phi = \mathrm{E}_7$ – α_1, а для $\Phi = \mathrm{E}_8$ – α_8), причем в разложении δ этот корень входит с коэффициентом 2. Соответственно, разложим y^h по базису h_i и посмотрим на коэффициент при h_k. В лемме 3 [18] утверждалось, что при $\operatorname{char} K \neq 2$ можно этот коэффициент сделать нулевым; в нашем случае ситуация немного другая.

7. Пусть y_0 – это один из корневых элементов, таких, что $y_0^\delta = 1$ и $y_0^\alpha = x^\alpha$ при $\alpha \in \Phi_1$, а $y_1 = x_{-\delta}(a) y_0$. Тогда, по описанным в §1 формулам, получаем, что $y_1^h = y_0^h + a h_{-\delta}$. Так как в разложении корня δ корень α_k входит с коэффициентом 2, то коэффициент при h_k у элемента y_1^h отличается от соответствующего коэффициента у

элемента y_2^h на $-2a$. Поэтому при $\operatorname{char} K = 2$ коэффициент элемента y при h_k не зависит от выбора a, то есть определяется элементом $x \in V_1$ однозначно. Обозначим этот коэффициент буквой t.

Далее, посмотрим, как меняется коэффициент $y^{-\delta}$. Пусть снова y_0 – это один из корневых элементов, таких что $y_0^\delta = 1$ и $y_0^\alpha = x^\alpha$ при $\alpha \in \Phi_1$, а $y_1 = x_{-\delta}(a) y_0$. Тогда $y_1^{-\delta} = y_0^{-\delta} - a^2 + at$. Таким образом, элементу x можно сопоставить число $t \in K$, являющееся коэффициентом соответствующего элемента y при h_k, и класс эквивалентности по отношению $\sim_t$ в обозначениях пункта 5. Несложно видеть также, что оба параметра не меняются при действии группой G_0, как и в [18]. Поэтому элементы x из одной орбиты имеют одинаковые значения параметров.

8. Свяжем эти параметры с коэффициентами из пункта 5. Пусть $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$. Так как в рассматриваемом случае $\operatorname{char} K = 2$, то структурные константы можно сразу опустить; для краткости также уберем и $x_{-\delta}(a)$, то есть положим a равным 0. Тогда

$$\begin{aligned}
y_0 = ue_\delta &= x_{-\lambda}(x^{\delta-\lambda}) x_{\xi-\delta}(x^\xi) x_{\nu-\delta}(x^\nu) x_{\mu-\delta}(x^\mu) x_{\lambda-\delta}(x^\lambda) e_\delta \\
&= x_{-\lambda}(x^{\delta-\lambda}) x_{\xi-\delta}(x^\xi) x_{\nu-\delta}(x^\nu) x_{\mu-\delta}(x^\mu)(e_\delta + x^\lambda e_\lambda) \\
&= x_{-\lambda}(x^{\delta-\lambda}) x_{\xi-\delta}(x^\xi) x_{\nu-\delta}(x^\nu)(e_\delta + x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\mu x^\lambda e_{\mu+\lambda-\delta}) \\
&= x_{-\lambda}(x^{\delta-\lambda}) x_{\xi-\delta}(x^\xi)(e_\delta + x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\mu x^\lambda e_{\mu+\lambda-\delta} + x^\nu e_\nu + x^\nu x^\lambda e_{\nu+\lambda-\delta} \\
&\quad + x^\nu x^\mu e_{\nu+\mu-\delta} + x^\nu x^\mu x^\lambda e_{-\xi}) = x_{-\lambda}(x^{\delta-\lambda})(e_\delta + x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\mu x^\lambda e_{\mu+\lambda-\delta} \\
&\quad + x^\nu e_\nu + x^\nu x^\lambda e_{\nu+\lambda-\delta} + x^\nu x^\mu e_{\nu+\mu-\delta} + x^\nu x^\mu x^\lambda e_{-\xi} + x^\xi e_\xi + x^\xi x^\lambda e_{\xi+\lambda-\delta} \\
&\quad + x^\xi x^\mu e_{\xi+\mu-\delta} + x^\xi x^\mu x^\lambda e_{-\nu} + x^\xi x^\nu e_{\xi+\nu-\delta} + x^\xi x^\nu x^\lambda e_{-\mu} \\
&\quad + x^\nu x^\nu x^\mu e_{-\lambda} + x^\xi x^\nu x^\mu x^\lambda e_{-\delta}) \\
&= e_\delta + x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\mu x^\lambda e_{\mu+\lambda-\delta} + x^\nu e_\nu + x^\nu x^\lambda e_{\nu+\lambda-\delta} + x^\nu x^\mu e_{\nu+\mu-\delta} \\
&\quad + x^\nu x^\mu x^\lambda e_{-\xi} + x^\xi e_\xi + x^\xi x^\lambda e_{\xi+\lambda-\delta} + x^\xi x^\mu e_{\xi+\mu-\delta} + x^\xi x^\mu x^\lambda e_{-\nu} + x^\xi x^\nu e_{\xi+\nu-\delta} \\
&\quad + x^\xi x^\nu x^\lambda e_{-\mu} + (x^\nu x^\nu x^\mu + (x^{\delta-\lambda})^2 x^\lambda) e_{-\lambda} + x^\xi x^\nu x^\mu x^\lambda e_{-\delta} + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} \\
&\quad + x^{\delta-\lambda} x^\lambda h_{-\lambda} + x^{\delta-\lambda} x^\mu x^\lambda e_{\mu-\delta} + x^{\delta-\lambda} x^\nu x^\lambda e_{\nu-\delta} + x^{\delta-\lambda} x^\xi x^\lambda e_{\xi-\delta} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Таким образом, $y_0^{-\delta} = x^\xi x^\nu x^\mu x^\lambda$, а $y_0^h = x^{\delta-\lambda} x^\lambda h_\lambda$. В разложении корня λ на простые корни α_k входит с коэффициентом 1, поэтому в разложении элемента y_0^h элемент h_k будет входить с коэффициентом $x^{\delta-\lambda}x^{\lambda}$. Как мы уже говорили, этот коэффициент не меняется при умножении элемента y_0 на $x_{-\delta}(a)$, а $y_0^{-\delta}$ остается в том же классе эквивалентности. Для интересующих нас типов IV, V и IX мы имеем $x = e_\lambda + se_{\delta-\lambda} + e_\mu + e_\nu + x^\xi e_\xi$; $s \in K, x^\xi \in K_s$, значит, в разложении элемента y^h элемент h_k будет входить с коэффициентом s, а $y^{-\delta} = x^\xi$. Поэтому для различных $s \in K$ и $x^\xi \in K_s$ действительно будут получаться разные орбиты.

9. Осталось научиться “отделять” типы II, III и IV (как всегда, тип I выделяется сразу), так как всем этим типам соответствуют $s = 0$ и $x^\xi = 0$. Заметим, что в этом случае существует ровно один y, такой что $y^{-\delta} = 0$: в самом деле, его существование следует из подсчетов из пункта 8 , а единственность – из формулы $y_1^{-\delta} = y_0^{-\delta} - a^2 + as$ из пункта 7. Тогда, как и в [18], можно посмотреть на угол между этим y и e_δ, причем при умножении на $g \in G_0$ элементу gx соответствует gy и угол между y и e_δ не меняется. Таким образом, угол является инвариантом. Посмотрим, какие углы получаются в типах II, III и IV. Вместо подсчетов, проводившихся в [18], можно сослаться на формулу (1), подставляя в нее соответствующие коэффициенты. В типе II, подставляя $x^\lambda = 1, x^\mu = x^\nu = x^\xi = x^{\delta-\lambda} = 0$, получаем угол, равный $\pi/3$; такие x в [18] назывались сингулярными. В типе III, подставляя $x^\lambda = x^\mu = 1, x^\nu = x^\xi = x^{\delta-\lambda} = 0$, получаем угол, равный $\pi/2$; такие x назывались блестящими. Наконец, в типе IV, подставляя $x^\lambda = x^\mu = x^\nu = 1, x^\xi = x^{\delta-\lambda} = 0$, получаем угол, равный $2\pi/3$; такие x назывались светящимися.

10. Объединяя результаты 5 и 9 пунктов, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi = \mathrm{E}_6$, E_7 *или* E_8, $\operatorname{char} K = 2$ *и* $|K| > 2$. *Для фиксированного* $s \in K$ *введем отношение эквивалентности* $a \sim_s b \Leftrightarrow \exists l \in K : a = b + ls + l^2$ *и обозначим через* K_s *множество представителей классов эквивалентности по этому отношению. Тогда векторы из* V_1 *под действием* G_0 *образуют следующие орбиты.*

(1) *Нулевая орбита,* $x = 0$.
(2) *Одна орбита из сингулярных векторов. Ее элементы можно привести к виду* $x = e_\lambda$.
(3) *Одна орбита из блестящих векторов. Ее элементы можно привести к виду* $x = e_\lambda + e_\mu$.

(4) *Одна орбита из светящихся векторов. Ее элементы можно привести к виду* $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu$.

(5) *Двухпараметрическое множество орбит, элементы которых можно привести к виду* $x = e_\lambda + se_{\delta-\lambda} + e_\mu + e_\nu + x^\xi e_\xi$*; где* $s \in K, x^\xi \in K_s$*, за исключением случая* $s = 0, x^\xi \in \bar{0}$.

§5. Случай $|K| = 2$

11. Согласно пункту 1, в случае $\Phi = \mathrm{E}_l$ и $|K| = 2$ любой $x \in V_1$ приводится к одному из следующих типов.

I. $x = 0$.
II. $x = e_\lambda$.
III. $x = e_\lambda + e_\mu$.
IV. $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu$.
V. $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu + e_\xi$.
VI. $x = e_\lambda + e_{\delta-\lambda}$.
IX. $x = e_\lambda + e_{\delta-\lambda} + e_\mu + e_\nu + e_\xi$.

С помощью процедуры из пункта 4 можно от типа V перейти к типу IV, поэтому тип V можно убрать.

12. Как и в предыдущем параграфе, посмотрим на соответствующие элементы y. В данном случае для каждого x есть два y, таких, что $y^\delta = 1$ и $y^\alpha = x^\alpha$ при $\alpha \in \Phi_1$: это y_0, посчитанный в (1), и $y_1 = x_{-\delta}(1)y_0$. Как отмечалось в пункте 7, коэффициент t при h_k одинаков у y_0 и y_1, а $y_1^{-\delta} = y_0^{-\delta} + 1 + t$. Поэтому если $t = 1$, то число $y_1^{-\delta} = y_0^{-\delta}$ оказывается инвариантом, а если $t = 0$, то $y_1^{-\delta} \neq y_0^{-\delta}$ и есть ровно один y с условием $y^{-\delta} = 0$. Как и прежде, для нахождения коэффициентов достаточно в формулу (1) подставить нужные числа.

Тип I, как всегда, отбрасывается сразу. В типе VI получаем $y^h = h_{-\lambda}$, то есть $t = 1$, а $y^{-\delta} = 0$, а в типе IX – тоже $y^h = h_{-\lambda}$, то есть $t = 1$, но $y^{-\delta} = 1$. Во всех остальных случаях $y^h = 0$ и, соответственно, $t = 0$. Таким образом, нам осталось научиться различать между собой типы II, III и IV. В них во всех $t = 0$, поэтому есть ровно один y с условием $y^{-\delta} = 0$. Как и в пункте 9, можно посмотреть на углы между этим y и e_δ: в типе II угол равен $\pi/3$, в типе III $\pi/2$, а в типе IV – $2\pi/3$. Соответственно, элементы снова называются сингулярными, блестящими и светящимися. В типах VI и IX буквально тем же путем действовать не получается, так как один y, инвариантный под действием G_0, выделить не получается, однако в типе VI оба y образуют угол $2\pi/3$ с

e_δ, а в типе IX – оба образуют угол π. Поэтому в типе VI естественно говорить про светящиеся векторы, а в типе IX – про темные векторы.

13. Объединяя результаты 11 и 12 пунктов, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $\Phi = \mathrm{E}_6$, E_7 *или* E_8 *и* $|K| = 2$. *Тогда векторы из* V_1 *под действием* G_0 *образуют следующие орбиты.*

(1) *Нулевая орбита,* $x = 0$.
(2) *Одна орбита из сингулярных векторов. Ее элементы можно привести к виду* $x = e_\lambda$.
(3) *Одна орбита из блестящих векторов. Ее элементы можно привести к виду* $x = e_\lambda + e_\mu$.
(4) *Две орбиты из светящихся векторов. Их элементы можно привести к виду* $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu$ *и* $x = e_\lambda + e_{\delta-\lambda}$.
(5) *Одна орбита из темных векторов. Ее элементы можно привести к виду* $x = e_\lambda + e_{\delta-\lambda} + e_\mu + e_\nu + e_\xi$.

14. Отметим напоследок, что использованные в этой работе, да и предыдущих статьях серии (хоть и в более “закамуфлированном” виде), параметры – коэффициент соответствующего элемента y при h_k и $y^{-\delta}$ – не являются чем-то принципиально новым. Первый из них является квадратичной формой, а второй схож с формой четвертой степени, хоть и не является ею; при этом оба параметра инвариантны под действием G_0. В случае $\Phi = \mathrm{E}_8$ действие G_0 на V_1 дает 56-мерное микровесовое представление группы типа E_7, и разнообразные формы на этом представлении изучались во множестве работ, см., например, [30, 4]. Видимо, наиболее близкое к текущей работе задание этих форм встречается в [8]. Сходство, разумеется, не является полным – $y^{-\delta}$ не является формой четвертой степени, а четырехлинейная форма из [8] не является симметричной. Однако оно слишком большое, чтобы быть случайным.

Список литературы

1. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле*, Семинар по алгебраическим группам, Мир, М. (1973), 9–59.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Главы IV–VI, Мир, М. (1972).
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Главы VII–VIII, Мир, М. (1978).
4. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_7. — Алгебра и анализ **27**, No. 6 (2015), 57–88.

5. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **338**, 5–68 (2006).
6. Н. А. Вавилов, И. М. Певзнер, *Тройки длинных корневых подгрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343**, 54–83 (2007).
7. Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, *Длинные корневые торы в группах Шевалле.* — Алгебра и анализ **24**, No. 3 (2012), 22–83.
8. А. Ю. Лузгарев, *Не зависящие от характеристики инварианты четвертой степени для* $G(\mathrm{E}_7, R)$. — Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: математика, механика, астрономия, No. 1 (2013), 43–50.
9. А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Некоторые факты из жизни* $\mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **305**, 153–163 (2003).
10. О. О'Мира, *Лекции о линейных группах*, Автоморфизмы классических групп, Мир, М. (1976), 57–167.
11. О. О'Мира, *Лекции о симплектических группах*, Мир, М. (1979).
12. И. М. Певзнер, *Геометрия корневых элементов в группах типа* E_6. — Алгебра и анализ **23**, No. 3 (2011), 261–309.
13. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, I. — Алгебра и анализ **23**, No. 5 (2011), 155–198.
14. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386**, 242–264 (2011).
15. И. М. Певзнер, *Ширина группы* $\mathrm{GL}(6, K)$ *относительно множества квазикорневых элементов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **423**, 183–204 (2014).
16. И. М. Певзнер, *Ширина экстраспециального унипотентного радикала относительно множества корневых элементов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **435**, 168–177 (2015).
17. И. М. Певзнер, *Существование корневой подгруппы, которую данный элемент переводит в противоположную.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **460**, 190–202 (2017).
18. И. М. Певзнер, *Орбиты векторов некоторых представлений.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **484**, 149–164 (2019).
19. И. М. Певзнер, *Орбиты векторов некоторых представлений.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, этот том.
20. Т. А. Спрингер, *Линейные алгебраические группы.* — Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. проблемы мат. Фундам. направления **55**, ВИНИТИ, М. (1989), 5–136.
21. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М. (1975).
22. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М. (1980).
23. Дж. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М. (2003).
24. M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for* E_6. I. — Invent. Math **89**, No. 1 (1987), 159–195.
25. M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for* E_6. II. — J. London Math. Soc **37**, 275–293 (1988).
26. M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for* E_6. III. — Trans. Amer. Math. Soc. **321**, 45–84 (1990).

27. M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for E_6. IV.* — J. Algebra **131**, 23–39 (1990).
28. M. Aschbacher, *Some multilinear forms with large isometry groups.* — Geom. Dedicata **25**, No. 1–3 (1988), 417–465.
29. M. Aschbacher, *The geometry of trilinear forms*, Finite Geometries, Buildings and Related topics, Oxford: Oxford Univ. Press (1990), 75–84.
30. B. N. Cooperstein, *The fifty-six-dimensional module for E_7. I. A four form for E_7.* — J. Algebra **173**, No. 2 (1995), 361–389.
31. S. Krutelevich, *Jordan algebras, exceptional groups, and Bhargava composition.* — J. Algebra **314**, No. 2 (2007), 924–977.
32. T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser Boston Inc., Boston (1998).
33. J. Tits, *Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples.* — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 31 (1966), 21–58.
34. N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **104**, 201–250 (2000).
35. N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations.* — Acta Applicandae Math. **45**, 73–115 (1996).

Pevzner I. M. Orbits of vectors in some representations. III.

Let Φ be a root system of type E_6, E_7, or E_8. Let K be a field of characteristic 2. Let δ be the maximal root of Φ and set $\Phi_0 = \{\alpha \in \Phi; \delta \perp \alpha\}$. The orbits of the group $G_{\mathrm{sc}}(\Phi_0, K)$ acting on the set $\langle e_\alpha; \angle(\alpha, \delta) = \pi/3\rangle$ are described.

РГПУ им. А. И. Герцена
наб. реки Мойки, д. 48
191186 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: pevzner_igor@mail.ru

Поступило 1 декабря 2022 г.