Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 522, 2023 г.

И. М. Певзнер

ОРБИТЫ ВЕКТОРОВ НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ. II

Пусть Φ – система корней одинаковой длины и K – произвольное поле. Далее, обозначим через δ максимальный корень системы Φ и положим $\Phi_0 = \{\alpha \in \Phi; \delta \perp \alpha\}$, $G_0 = G_{\mathrm{sc}}(\Phi_0, K)$ и $V_1 = \langle e_\alpha; \angle(\alpha, \delta) = \pi/3\rangle$, где e_α – элементарные корневые элементы. В настоящей серии статей рассмотрены орбиты действия группы G_0 на V_1.

Такое действие изучалось во множестве работ. Прежде всего это, разумеется, случай $\Phi = \mathrm{E}_8$ – тогда получается 56-мерное минимальное микровесовое представление группы типа E_7. Остальные случаи исследуются меньше, однако тоже встречаются достаточно часто. Наряду с изучением собственно представления группы G_0 в V_1, это может помочь и при исследовании представления всей группы $G_{\mathrm{sc}}(\Phi, K)$ и соответствующей алгебры Ли.

Настоящая статья является продолжением работы [18]. В ней были доказаны некоторые общие результаты и разобраны случаи $\Phi = \mathrm{E}_l$ при $\operatorname{char} K \neq 2$. В настоящей работе будут рассмотрены случаи $\Phi = \mathrm{A}_l$ и D_l при $\operatorname{char} K \neq 2$.

Кроме того, для случая $\Phi = \mathrm{D}_l$ возникла необходимость, как довольно часто бывает при изучении алгебр Ли и групп Шевалле, вычислить несколько структурных констант $N_{\alpha\beta}$. В [4, 32] приведен метод их вычисления для систем корней одной длины и положительных базисов Шевалле. Он позволяет индуктивно находить константы $N_{\alpha\beta}$. А именно, сводит их вычисление сперва, постепенно уменьшая высоту корня α, к вычислению нескольких $N_{\alpha_i\beta}$, а те, в свою очередь, сводит к нескольким $N_{\alpha_i\alpha_j}$. К сожалению, для корней большой высоты это вычисление может оказаться довольно длительным. В настоящей работе доказывается следующая теорема, позволяющая избавиться от второй части вышеописанных расчетов.

Теорема. *Пусть Φ – система корней одной длины, в соответствующей алгебре Ли $V(\Phi)$ выбран положительный базис Шевалле, α_i – простой корень, а β и $\beta + \alpha_i$ – положительные корни. Тогда*

Ключевые слова: группы Шевалле, орбиты векторов, корневые элементы.
Настоящая работа выполнена при содействии проекта РФФИ 19-01-00297.

$N_{\alpha_i\beta} = -1$, *если и только если i больше номера любого простого корня, входящего в разложение β.*

§1. Основные обозначения

Пусть K – произвольное поле, Φ – система корней одной длины, $V = V(\Phi)$ – соответствующая алгебра Ли, а $G = G_{\mathrm{sc}}(\Phi, K)$ – соответствующая односвязная группа.

Как известно, в V существует базис Шевалле $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi; h_\alpha, \alpha \in \Pi\}$, где Π – фундаментальная система корней. При этом все h_α берутся из подалгебры Картана; $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$; $[h_\alpha, e_\beta] = A_{\alpha\beta}e_\beta$, где $A_{\alpha\beta} = 2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}$ – числа Картана; $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$ при $\alpha + \beta \in \Phi$ и $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ при $\alpha + \beta \notin \Phi$ и $\beta \neq -\alpha$, где $N_{\alpha\beta} = \pm 1$ – структурные константы. Коэффициент в разложении вектора $x \in V$ по этому базису при e_α обозначим через x^α, а соответствующий элемент из подалгебры Картана обозначим через x^h; тогда $x = \sum_{\alpha\in\Phi} x^\alpha e_\alpha + x^h$.

Далее, в группе G выделяются элементарные корневые элементы $x_\alpha(a)$, $\alpha \in \Phi, a \in K$ и $X_\alpha = \langle x_\alpha(a); a \in K\rangle$ – элементарные корневые подгруппы. В работе будут использоваться формулы для действия элементов $x_\alpha(a)$ на базисе Шевалле. Они перечислены, например, в [34]. Нам понадобятся следующие равенства: $x_\alpha(a)e_\beta = e_\beta$ при $\angle(\alpha,\beta) < 2\pi/3$, $x_\alpha(a)e_\beta = e_\beta + N_{\alpha\beta}ae_{\alpha+\beta}$ при $\angle(\alpha,\beta) = 2\pi/3$, $x_\alpha(a)e_{-\alpha} = e_{-\alpha} + ah_\alpha - a^2e_\alpha$ и $x_\alpha(a)h_\beta = h_\beta - A_{\beta\alpha}ae_\alpha$; мы будем ими пользоваться без дополнительных ссылок.

Обозначим через δ максимальный корень системы Φ. Экстраспециальным унипотентным радикалом называется подгруппа

$$U_\delta = \langle X_\alpha; \angle(\alpha,\delta) < \pi/2\rangle.$$

Подробнее об этом радикале говорится, например, в [8, 16].

Пусть $\alpha \in \Phi$ – некоторый корень. Разобьем все корни из Φ на пять классов в зависимости от их расположения относительно корня α: $\Phi_2(\alpha) = \{\alpha\}$, $\Phi_1(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = \pi/3\}$, $\Phi_0(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = \pi/2\}$, $\Phi_{-1}(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = 2\pi/3\}$, $\Phi_{-2}(\alpha) = \{-\alpha\}$. Другими словами, β принадлежит $\Phi_i(\alpha)$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение β и α равно $i/2$. Простейшие свойства этого разбиения приведены в [16]. Часто нас будет интересовать случай $\alpha = \delta$; для краткости, аргумент у $\Phi_i(\delta)$ будем опускать. В этих обозначениях $U_\delta = \langle X_\alpha; \alpha \in \Phi_2 \cup \Phi_1\rangle$.

§2. Структурные константы

В отличие от статьи [18], в настоящей работе нам понадобится посчитать несколько структурных констант. В начале мы кратко изложим метод, описанный в [4], потом упростим и ускорим его, и в конце параграфа посчитаем требуемые константы.

1. Структурные константы $N_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \Phi$, как уже отмечалось, определяются равенством $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$. По определению базиса Шевалле все $N_{\alpha\beta}$ являются целыми числами; $N_{\alpha\beta} = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta \notin \Phi$. Для систем корней одинаковой длины при этом $N_{\alpha\beta} = \pm 1$ при $\alpha + \beta \in \Phi$.

Далее, существуют так называемые положительные базисы Шевалле, в которых $N_{\alpha\beta} > 0$ для всех экстраспециальных пар (см. [4, 32]). Для систем, в которых все корни имеют одинаковую длину, это условие означает в точности, что $N_{\alpha_i\beta} = 1$ каждый раз, когда $\alpha_i + \beta \in \Phi^+$ обладает тем свойством, что если $\alpha_j + \gamma = \alpha_i + \beta$ для какого-то простого корня α_j и какого-то положительного корня γ, то $j > i$. Мы всегда полагаем, что выбранный нами базис Шевалле положителен.

Для структурных констант, как известно (см., например, [32, 34]), выполняются следующие свойства:

N1 $N_{\alpha\beta} = N_{-\beta,-\alpha} = -N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\beta\alpha}$;
N2 $\frac{N_{\alpha\beta}}{(\gamma,\gamma)} = \frac{N_{\beta\gamma}}{(\alpha,\alpha)} = \frac{N_{\gamma\alpha}}{(\beta,\beta)}$, если $\alpha + \beta + \gamma = 0$;
N3 $\frac{N_{\alpha\beta}N_{\gamma\zeta}}{(\alpha+\beta,\alpha+\beta)} + \frac{N_{\beta\gamma}N_{\alpha\zeta}}{(\beta+\gamma,\beta+\gamma)} + \frac{N_{\gamma\alpha}N_{\beta\zeta}}{(\gamma+\alpha,\gamma+\alpha)} = 0$, если $\alpha + \beta + \gamma + \zeta = 0$.

Для систем с одинаковыми длинами корней формулы N2 и N3 можно упростить:

N2' $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha}$, если $\alpha + \beta + \gamma = 0$;
N3' $N_{\alpha\beta}N_{\gamma\zeta} + N_{\beta\gamma}N_{\alpha\zeta} + N_{\gamma\alpha}N_{\beta\zeta} = 0$, если $\alpha + \beta + \gamma + \zeta = 0$.

На самом деле, в последней формуле одно слагаемое точно будет нулевым, поэтому она эквивалентна части уравнения 2-цикла

N3" $N_{\beta\gamma}N_{\alpha,\beta+\gamma} = N_{\alpha+\beta,\gamma}N_{\alpha\beta}$.

Свойство положительности базиса Шевалле можно записать следующим образом:

N4 $N_{\alpha_i\beta} = 1$, если α_i – простой корень с наименьшим индексом, который можно вычесть из корня $\alpha_i + \beta$.

Здесь и всюду далее в этом параграфе фраза “можно вычесть один корень из другого” означает, что разность этих корней является корнем. Как известно, это равносильно тому, что скалярное произведение этих корней равно $1/2$.

2. В работе [4], следуя работе Титса [32], приведен индуктивный способ вычисления констант $N_{\pm\alpha_i\beta}$. Однако, как мы покажем в этом параграфе, эти константы можно найти сразу, без длительных подсчетов. Сперва докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть $\gamma \in \Phi^+$ – некоторый положительный корень и α_j – простой корень с наименьшим индексом, который можно вычесть из γ. Далее, пусть α_i – другой простой корень, который можно вычесть из γ, и $\gamma \neq \alpha_i + \alpha_j$. Тогда либо α_j является простым корнем с наименьшим индексом, который можно вычесть из $\gamma - \alpha_i$, либо $\Phi = \mathrm{E}_8$, $\gamma = \begin{smallmatrix}2454321\\3\end{smallmatrix}$, $j = 2$ и $i = 3$.*

Доказательство. Так как α_j вычитается из γ, то $(\gamma, \alpha_j) = 1/2$. Аналогично $(\gamma, \alpha_i) = 1/2$, следовательно $(\gamma, \alpha_i + \alpha_j) = 1$. Если бы $\alpha_i + \alpha_j$ являлось корнем, то $\gamma = \alpha_i + \alpha_j$, что противоречит условию. Значит, $\alpha_i + \alpha_j$ – не корень и, следовательно, $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ (то есть α_i и α_j – не соседние простые корни). Поэтому $(\gamma - \alpha_i, \alpha_j) = 1/2$ и α_j вычитается из $\gamma - \alpha_i$.

Далее, напомним хорошо известное и совсем простое утверждение: для произвольного корня γ в его разложении на простые корни удвоенный коэффициент при любом простом корне α или равен сумме коэффициентов при всех соседних с ним в диаграмме Дынкина простых корнях, или отличается от нее на 1. При этом если они равны, то $(\alpha, \gamma) = 0$; если удвоенный коэффициент больше на 1, то $(\alpha, \gamma) = 1/2$ и α можно вычесть из γ (или $\gamma = \alpha$ и $(\alpha, \gamma) = 1$); если удвоенный коэффициент меньше на 1, то $(\alpha, \gamma) = -1/2$ и α можно прибавить к γ (или $\gamma = -\alpha$ и $(\alpha, \gamma) = -1$). Это сразу следует из того, что скалярный квадрат корня α равен 1, скалярное произведение корня α на соседний корень равно $1/2$, а на не соседний – 0.

Предположим, что существует простой корень с меньшим индексом, чем j, который тоже можно вычесть из $\gamma - \alpha_i$; пусть это α_k, $k < j$. Так как α_k не вычиталось из γ, то, в силу вышесказанного, это означает, что простые корни α_k и α_i соседние. Таким образом, $k < j < i$, корни α_k и α_i соседние, а α_j и α_i – нет. В системах корней $\Phi = \mathrm{A}_l$ соседние простые корни всегда имеют соседние номера, и сразу получается противоречие. Если $\Phi = \mathrm{D}_l$, то единственные соседние корни с не соседними номерами, это α_1 и α_3. Но тогда $j = 2$ и корни α_2 и α_3 – тоже соседние, что противоречит ранее сказанному.

Пусть $\Phi = \mathrm{E}_l$. Аналогичными рассуждениями получаем, что единственный возможный случай – это $k = 1$, $j = 2$ и $i = 3$. Тогда в разложении корня γ коэффициент при α_1 может быть равен 1 или 2. Предположим, что он равен 1. Тогда, так как $(\gamma, \alpha_1) = 0$, коэффициент при α_3 равен 2. Так как α_3 вычитается из γ, то коэффициент при α_4 тоже должен равняться 2 (как мы уже упоминали, удвоенный коэффициент при α_3 должен равняться сумме коэффициентов при α_1 и α_4 плюс 1). Но тогда коэффициент при α_2 должен равняться 1, и α_2 не будет вычитаться из γ – противоречие.

Осталось рассмотреть случай, когда в разложении корня γ коэффициент при α_1 равен 2. Тогда, аналогично, коэффициент при α_3 должен равняться 4, при α_4 – 5, а при α_2 – 3. В принципе, то, что такой корень существует всего один, можно доказать и непосредственным перебором, но мы в этом убедимся, используя все то же утверждение. Как мы видим (и как уже выводилось из условия), из корня γ можно вычесть α_2 и α_3. Поэтому удвоенный коэффициент при α_4 должен быть на 1 меньше суммы коэффициентов при соседних корнях, следовательно, коэффициент при α_5 должен равняться 4. Далее, корень α_4 можно к γ прибавить, а можно, после вычитания α_2 и α_3, и вычесть. Это означает, что удвоенный коэффициент при α_5 должен равняться сумме коэффициентов при соседних корнях, и поэтому коэффициент при α_6 должен равняться 3. Аналогичными рассуждениями получаем, что коэффициент при α_7 равен 2, а при α_8 – 1, что и требовалось. $\square$

Теорема 1. *Пусть $\alpha_i \in \Pi$ и $\beta, \beta + \alpha_i \in \Phi^+$. Тогда $N_{\alpha_i \beta} = -1$, если и только если i больше номера любого простого корня, входящего в разложение β.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $\beta = \alpha_j$ – простой корень, то утверждение теоремы выполняется. В самом деле, если $i < j$, то $N_{\alpha_i \alpha_j} = 1$ по N4, а если $i > j$, то $N_{\alpha_i \alpha_j} = -N_{\alpha_j \alpha_i}$ по N1, что, по N4, равно -1. Поэтому можно считать, что β не является простым корнем. Далее, пусть α_j – простой корень с наименьшим индексом, который можно вычесть из корня $\alpha_i + \beta$. Если $j = i$, то, по свойству N4, $N_{\alpha_i \beta} = 1$ и утверждение теоремы выполняется. Пусть $j \neq i$. Если в свойство N3" подставить $\alpha = \alpha_i$, $\beta = \beta - \alpha_j$ и $\gamma = \alpha_j$, то получится равенство $N_{\beta-\alpha_j,\alpha_j}N_{\alpha_i\beta} = N_{\alpha_i+\beta-\alpha_j,\alpha_j}N_{\alpha_i,\beta-\alpha_j}$. Отсюда $N_{\alpha_i\beta} = N_{\alpha_i+\beta-\alpha_j,\alpha_j}N_{\alpha_i,\beta-\alpha_j}N_{\beta-\alpha_j,\alpha_j}$, что, по свойству N1, равно $N_{\alpha_j,\alpha_i+\beta-\alpha_j}N_{\alpha_i,\beta-\alpha_j}N_{\alpha_j,\beta-\alpha_j}$. По определению α_j и по свойству N4 первый сомножитель равен 1.

Рассмотрим последний сомножитель, $N_{\alpha_j,\beta-\alpha_j}$. Заметим, что если в предыдущую лемму подставить $\gamma = \beta + \alpha_i$, то ее условие будет выполняться. Это означает, что, либо α_j является простым корнем с наименьшим индексом, который можно вычесть из β, либо $\Phi = \mathrm{E}_8$, $\gamma = \beta + \alpha_i = \genfrac{}{}{0pt}{}{2454321}{3}$, $j = 2$ и $i = 3$. Первый из этих случаев, по N4, означает, что $N_{\alpha_j,\beta-\alpha_j} = 1$, откуда $N_{\alpha_i\beta} = N_{\alpha_i,\beta-\alpha_j}$. Таким образом, мы можем спокойно из корня β вычитать простой корень с наименьшим индексом, который из него вычитается – структурная константа при этом не меняется. Эта процедура остановится либо когда мы придем к вышеуказанному исключительному случаю, либо к случаю простого корня $\beta = \alpha_j$, либо к случаю, когда $\alpha_j = \alpha_i$. Отметим также, что при переходе от β к $\beta - a_j$ условие из формулировки теоремы не меняется: если i было больше номера любого простого корня, входящего в разложение β, то это верно и для $\beta - \alpha_j$, и наоборот. Поэтому во втором и третьем случае теорема выполняется.

Заметим, что $N_{\alpha_j,\beta-\alpha_j} = 1$ при $\beta = \genfrac{}{}{0pt}{}{2354321}{3}$ и $j = 2$. В самом деле, для этого достаточно к этой структурной константе применить только что полученный результат (то есть подставить в первоначальные расуждения $\beta = \genfrac{}{}{0pt}{}{2354321}{2}$ и $i = 2$) – то, что мы не попадем в исключительный случай, очевидно. Это означает, что исключительный случай можно было и не исключать, так как в нем тоже $N_{\alpha_i\beta} = N_{\alpha_i,\beta-\alpha_j}$. Поэтому утверждение теоремы всегда верно. □

3. Перейдем к подсчету произведений структурных констант, которые нам понадобятся в дальнейшем. У нас будут два отдельных подсчета для систем $\Phi = \mathrm{D}_4$ и $\Phi = \mathrm{D}_l, l > 4$. В рассуждениях мы будем использовать свойства N1, N2', N4 и результат теоремы без подробных записей, а N3" придется расписывать поподробнее в силу неоднозначности выбора корней и порядка использования этого свойства. Отметим, что N4, разумеется, является частным случаем теоремы, но где это возможно, для простоты, мы будем ссылаться именно на N4. Начнем со случая $\Phi = \mathrm{D}_4$.

Лемма 2. *Пусть* $\Phi = \mathrm{D}_4$, *и положим* $\lambda = {}^{0}_{0}10$, $\rho = {}^{0}_{1}11$, $\sigma = {}^{1}_{0}11$, $\tau = {}^{1}_{1}10$. *Тогда*

(1) $N_{\lambda-\delta,\delta}N_{\lambda-\delta,\rho}N_{\sigma-\delta,\delta}N_{\sigma-\delta,\tau} = 1$;
(2) $N_{\lambda-\delta,\delta}N_{\lambda-\delta,\sigma}N_{\rho-\delta,\delta}N_{\rho-\delta,\tau} = 1$.

Доказательство. $N_{\lambda-\delta,\delta} \overset{N2'}{=} N_{-\lambda,\lambda-\delta} \overset{N1}{=} -N_{\lambda,\delta-\lambda}$. Так как $\lambda+(\delta-\lambda)=\delta$ – максимальный корень, а $\lambda = \alpha_3$ – единственный простой корень, который из него вычитается, то по N4 это выражение равно -1.

Далее, $N_{\lambda-\delta,\rho} \overset{N1}{=} -N_{\rho,\lambda-\delta} \overset{N2'}{=} -N_{\delta-\lambda-\rho,\rho}$. Так как $\delta-\lambda-\rho = \alpha_1$, то по N4 это выражение снова равно -1.

Считаем третью константу: $N_{\sigma-\delta,\delta} \overset{N2'}{=} N_{-\sigma,\sigma-\delta} \overset{N1}{=} N_{\delta-\sigma,\sigma}$. Заметим, что $\delta-\sigma = \alpha_2+\alpha_3$, то есть $N_{\delta-\sigma,\sigma} = N_{\alpha_2+\alpha_3,\sigma}$. Подставим в N3" $\alpha = \alpha_3$, $\beta = \alpha_2$ и $\gamma = \sigma$. Тогда получим $N_{\alpha_2\sigma}N_{\alpha_3,\alpha_2+\sigma} = N_{\alpha_3+\alpha_2,\sigma}N_{\alpha_3\alpha_2}$. При этом $N_{\alpha_2\sigma} = 1$ по теореме, $N_{\alpha_3,\alpha_2+\sigma} = 1$ по свойству N4, а $N_{\alpha_3\alpha_2} = -1$ снова по теореме. Поэтому третья константа тоже равна -1.

Четвертая константа: $N_{\sigma-\delta,\tau} \overset{N2'}{=} N_{\delta-\sigma-\tau,\sigma-\delta} \overset{N1}{=} -N_{\sigma+\tau-\delta,\delta-\sigma}$. Так как $\sigma+\tau-\delta = \alpha_1$, то по N4 это выражение снова равно -1. Таким образом, все четыре константы в левой части первого пункта равны -1, а их произведение, соответственно, 1. Это завершает доказательство первого пункта.

Далее, $N_{\lambda-\delta,\sigma} \overset{N1}{=} -N_{\sigma,\lambda-\delta} \overset{N2'}{=} -N_{\delta-\lambda-\sigma,\sigma}$. Так как $\delta-\lambda-\sigma = \alpha_2$, то это выражение есть $-N_{\alpha_2\sigma}$, что по теореме, как мы уже говорили, равно -1.

Затем, $N_{\rho-\delta,\delta} \overset{N2'}{=} N_{-\rho,\rho-\delta} \overset{N1}{=} N_{\delta-\rho,\rho}$. Заметим, что $\delta-\rho = \alpha_1+\alpha_3$, то есть $N_{\delta-\rho,\rho} = N_{\alpha_1+\alpha_3,\rho}$. Подставим в N3" $\alpha = \alpha_3$, $\beta = \alpha_1$ и $\gamma = \rho$. Тогда получим $N_{\alpha_1\rho}N_{\alpha_3,\alpha_1+\rho} = N_{\alpha_3+\alpha_1,\rho}N_{\alpha_3\alpha_1}$. При этом $N_{\alpha_1\rho} = 1$ по свойству N4, $N_{\alpha_3,\alpha_1+\rho} = 1$ тоже по свойству N4, а $N_{\alpha_3\alpha_1} = -1$ по теореме. Поэтому эта константа также равна -1.

Наконец, $N_{\rho-\delta,\tau} \overset{N2'}{=} N_{\delta-\rho-\tau,\rho-\delta} \overset{N1}{=} -N_{\rho+\tau-\delta,\delta-\rho}$. Так как $\rho+\tau-\delta = \alpha_2$, то по теореме это выражение снова равно -1. Таким образом, все четыре константы в левой части второго пункта также равны -1, а их произведение, соответственно, 1. Это завершает доказательство второго пункта. □

Отметим, что пункты 1 и 2 этой леммы получаются перестановкой выбранных корней. Более того, на самом деле для случая $\Phi = \mathrm{D}_4$ для любых четырех попарно ортогональных корней, образующих угол $\pi/3$ с корнем δ, аналогичное произведение будет равно 1. Однако для общего случая $\Phi = \mathrm{D}_l$ это не так, знак произведения меняется в зависимости от выбора корней. Посчитаем этот знак для одной из четверок.

Лемма 3. *Пусть* $\Phi = \mathrm{D}_l$, $l > 4$, *и положим* $\lambda = {}^{0}_{0}0\ldots0010$, $\rho = {}^{1}_{1}2\ldots2210$, $\sigma = {}^{0}_{0}0\ldots0111$, $\tau = {}^{1}_{1}2\ldots2111$. *Тогда*

$$N_{\lambda-\delta,\delta}N_{\lambda-\delta,\rho}N_{\sigma-\delta,\delta}N_{\sigma-\delta,\tau} = 1.$$

Доказательство. Первая из структурных констант считается также, как и в лемме 2: $N_{\lambda-\delta,\delta} \overset{N2'}{=} N_{-\lambda,\lambda-\delta} \overset{N1}{=} -N_{\lambda,\delta-\lambda}$. Так как $\lambda+(\delta-\lambda) = \delta$ – максимальный корень, а λ – единственный простой корень, который из него вычитается, то по N4 это выражение равно -1.

Далее, $N_{\lambda-\delta,\rho} \overset{N2'}{=} N_{\rho,\delta-\lambda-\rho} \overset{N1}{=} -N_{\delta-\lambda-\rho,\rho}$. Так как $\delta-\lambda-\rho = {}^{0}_{0}0\ldots0001 = \alpha_l$, а $\rho = {}^{1}_{1}2\ldots2210$, то, по теореме, $N_{\delta-\lambda-\rho,\rho} = -1$, а искомая константа, соответственно, равна 1.

Считаем третью константу: $N_{\sigma-\delta,\delta} \overset{N2'}{=} N_{-\sigma,\sigma-\delta} \overset{N1}{=} -N_{\sigma,\delta-\sigma}$. По условию, $\sigma = \alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n$. Подставим в N3” $\alpha = \alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}$, $\beta = \alpha_n$ и $\gamma = \delta-\sigma$. Тогда получим: $N_{\alpha_n,\delta-\sigma}N_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1},\alpha_n+\delta-\sigma} = N_{\sigma,\delta-\sigma}N_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1},\alpha_n}$. При этом $N_{\alpha_n,\delta-\sigma} = -1$ и $N_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1},\alpha_n} \overset{N1}{=} -N_{\alpha_n,\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}} = 1$ по теореме. Чтобы посчитать оставшийся коэффициент, $N_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1},\alpha_n+\delta-\sigma}$, еще раз воспользуемся $N3''$: подставим $\alpha = \alpha_{n-1}$, $\beta = \alpha_{n-2}$ и $\gamma = \alpha_n+\delta-\sigma$. Тогда получим

$$N_{\alpha_{n-2},\alpha_n+\delta-\sigma}N_{\alpha_{n-1},\alpha_{n-2}+\alpha_n+\delta-\sigma} = N_{\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2},\alpha_n+\delta-\sigma}N_{\alpha_{n-1},\alpha_{n-2}}.$$

Здесь $N_{\alpha_{n-2},\alpha_n+\delta-\sigma}$ и $N_{\alpha_{n-1},\alpha_{n-2}+\alpha_n+\delta-\sigma}$ равны 1 по теореме, и также по теореме $N_{\alpha_{n-1},\alpha_{n-2}} = -1$. Таким образом, $N_{\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2},\alpha_n+\delta-\sigma} = -1$, откуда $N_{\sigma,\delta-\sigma} = 1$ и, наконец, $N_{\sigma-\delta,\delta} = -1$.

Считаем четвертую константу:

$$N_{\sigma-\delta,\tau} \overset{N1}{=} -N_{\delta-\sigma,-\tau} \overset{N2'}{=} -N_{\sigma+\tau-\delta,\delta-\sigma}.$$

Заметим, что $\sigma+\tau-\delta = \alpha_n$, поэтому $N_{\sigma+\tau-\delta,\delta-\sigma} = -1$ по теореме. Следовательно, $N_{\sigma-\delta,\tau} = 1$. Осталось собрать все четыре найденные константы: $N_{\lambda-\delta,\delta}N_{\lambda-\delta,\rho}N_{\sigma-\delta,\delta}N_{\sigma-\delta,\tau} = (-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1 = 1$, что и требовалось. □

§3. Необходимые результаты из работы [18]

4. Так как настоящая работа является переносом результатов статьи [18] со случаев $\Phi = \mathrm{E}_6$, E_7 и E_8 на случаи A_l и D_l, стоит напомнить основные моменты той статьи. Мы рассматриваем орбиты действия группы $G_0 = G_{\mathrm{sc}}(\Phi_0, K)$ на пространстве $V_1 = \langle e_\alpha; \alpha \in \Phi_1\rangle$. Пусть $x \in V_1$. В начале мы доказали, что можно считать, что $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; здесь $\lambda, \mu, \nu, \xi \in \Phi_1$ – некоторые попарно ортогональные корни и $\lambda + \mu + \nu + \xi = 2\delta$. Далее мы доказывали, что для систем $\Phi = \mathrm{E}_6$, E_7 и E_8 корни λ, μ, ν и ξ могут быть выбраны произвольно (в случаях, рассматриваемых в настоящей статье, это, как мы увидим, не совсем так). После этого мы заметили, что любой $x \in V_1$ приводится к одному из следующих типов.

I. $x = 0$.

II. $x = x^\lambda e_\lambda$; $x^\lambda \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1.

III. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^\mu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1 и A_2.

IV. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

V. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

VI. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda}$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda} \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1.

VII. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda}, x^\mu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1 и A_2.

VIII. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda}, x^\mu, x^\nu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

IX. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda}, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

От случаев VII и VIII мы избавились сразу же. Далее, от случая VI мы избавлялись при $\Phi \neq \mathrm{A}_l$ и $|K| > 2$, а от случая IX – при $\operatorname{char} K \neq 2$. Кроме того, мы доказали следующую несложную лемму.

Лемма 4 ([18, лемма 1]). *Пусть*

$$w_\alpha(a) = x_{-\alpha}(-a^2 + a)x_\alpha(-\frac{1}{a})x_{-\alpha}(a-1)x_\alpha(1)$$

при $\alpha \in \Phi_0$ *и* $a \in K^*$. *Тогда* $w_\alpha(a)e_\beta = \frac{1}{a}e_\beta$ *при* $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$; $w_\alpha(a)e_\beta = e_\beta$ *при* $\angle(\alpha, \beta) = \pi/2$ *и* $w_\alpha(a)e_\beta = ae_\beta$ *при* $\angle(\alpha, \beta) = 2\pi/3$.

С помощью этой леммы мы избавлялись от большинства коэффициентов в оставшихся случаях и приходили к искомому списку орбит.

5. Далее мы доказывали, что все описанные случаи дают разные орбиты. Во-первых, была доказана следующая лемма.

Лемма 5 ([18, лемма 3]). *Пусть* $\Phi \neq \mathrm{A}_l$, $\operatorname{char} K \neq 2$ *и* $x = \sum_{\alpha \in \Phi_1} x^\alpha e_\alpha$. *Тогда существует и единственен корневой элемент* $y = \sum_{\alpha \in \Phi} y^\alpha e_\alpha + y^h$, *в котором* $y^\alpha = x^\alpha$ *при* $\alpha \in \Phi_1$, $y^\delta = 1$ *и* $y^h \in \langle h_\alpha; \alpha \in \Phi_0 \cap \Pi \rangle$.

Во-вторых, мы вводили следующие определения: элемент x называется темным, если угол между соответствующим ему y и e_δ равен π (иначе говоря, $y^{-\delta} \neq 0$). Далее, x называется светящимся, если этот угол равен $2\pi/3$; блестящим, если угол равен $\pi/2$ и сингулярным, если он равен $\pi/3$. Как несложно видеть, последнее условие равносильно тому, что x – корневой элемент. Названия взяты из работы [29] для случая $\Phi = \mathrm{E}_8$. Их определения в [29] другие, но, на самом деле, равносильные.

Затем мы заметили, что при умножении на $g \in G_0$ элементу gx соответствует корневой элемент gy. При этом угол между y и e_δ при таком умножении также не меняется, значит, определения темного, светящегося, блестящего и сингулярного элементов можно расширить на орбиты. Более того, если x темный, то коэффициент $y^{-\delta}$ также не меняется при умножении на $g \in G_0$, то есть тоже является инвариантом. Наконец, мы проверяли, что в случае II вектор x получается сингулярным, в случае III – блестящим, в случае IV – светящимся, а в случае V – темным. При этом в случае V инвариант $y^{-\delta}$ равнялся произведению нескольких структурных констант и $x^\lambda x^\mu x^\nu x^\xi$, поэтому произведение всех коэффициентов $x^\lambda x^\mu x^\nu x^\xi$ также постоянно. Для $\Phi = \mathrm{E}_l$, рассматриваемого в статье [18], этого хватало для классификации. Для рассматриваемых в настоящей работе $\Phi = \mathrm{A}_l$ и D_l это также будет очень полезным, но, к сожалению, для полной классификации этого не хватит.

§4. Случай $\Phi = \mathrm{A}_l$

6. Вернемся к уже упомянутому ранее вопросу существования и произвольности выбора четырех попарно ортогональных корней λ, μ, ν и ξ для разных систем Φ. В рассматриваемом в этом разделе случае $\Phi = \mathrm{A}_l$ может быть только два ортогональных корня, так что корни ν и ξ точно отсутствуют. Мы перечислим орбиты этих корней

под действием группы Вейля системы Φ_0; так как корни выбирались в теореме по порядку, то порядок нам тоже важен. Таким образом, для определения корня λ мы можем пользоваться всей группой Вейля, а для корня μ – только подгруппой, оставляющей уже выбранный λ неподвижным.

- Пусть $\Phi = \mathrm{A}_1$. В этом случае Φ_1 пустое.
- Пусть $\Phi = \mathrm{A}_2$. В этом случае Φ_1 состоит из двух корней с углом $2\pi/3$ между ними, а Φ_0 пустое. Поэтому у корня λ получается две орбиты по одному корню в каждой, а корней μ, ν и ξ в этом случае нет. Для удобства обозначим корень 10 через ρ. Тогда $\lambda = \rho$ или $\delta - \rho$.
- Пусть $\Phi = \mathrm{A}_l$, $l > 2$. В этом случае Φ_1 состоит из корней, имеющих 1 при первом фундаментальном корне и 0 при последнем, или наоборот. Таким образом, Φ_1 распадается на две части (по $l-1$ корню в каждой), причем корни из одной части имеют угол $\pi/3$ между собой, а корни из разных частей – угол $\pi/2$ или $2\pi/3$. В этом случае у корня λ получается две орбиты, у μ одна орбита (если λ в одной части, то μ точно в другой), а корней ν и ξ в этом случае тоже нет. Обозначим корень $10\cdots00$ через ρ, а корень $00\cdots01$ через σ. Тогда можно считать, что $\lambda = \rho$ и $\mu = \sigma$, или наоборот, $\lambda = \sigma$ и $\mu = \rho$.

7. Как известно, для случая $\Phi = \mathrm{A}_l$ элементы алгебры V можно представить в виде матриц размера $(l+1)\times(l+1)$. В естественной нумерации максимальному корню δ соответствует единица в правом верхнем углу. При этом элементы из V_1 имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots & a_{l-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{l-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть им соответствует пара из ковектора и вектора $((a_1,\dots,a_{l-1}),$ $(b_1,\dots,b_{l-1})^T)$. Каждому корню соответствует своя координата в векторе или ковекторе. Если двум различным корням соответствуют координаты в векторе (или ковекторе), то угол между ними равен $\pi/3$; если одному соответствует координата в векторе, а другому в ковекторе, причем эти координаты с различным номером, то угол между ними равен $\pi/2$; если же эти координаты окажутся с одним номером, то угол будет равен $2\pi/3$.

Далее, $g \in G_0$ представляется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & * & \dots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где центральная подматрица из $\mathrm{SL}(l-1, K)$; обозначим эту подматрицу g'. При этом действие G_0 на V_1 соответствует сопряжению. Как несложно видеть, при таком действии пара из ковектора и вектора (u^T, v) переходит в $(u^T(g')^{-1}, g'v)$.

На таком языке, разумеется, можно разобрать целиком весь случай $\Phi = \mathrm{A}_l$. Однако там, где это возможно и не приводит к большим трудностям, мы сохраним взгляд и терминологию из предыдущей статьи (и следующего параграфа).

8. Теперь посмотрим, как можно упростить перечень типов из пункта 4 с помощью леммы 4 для систем корней типа A_l:

- Пусть $\Phi = \mathrm{A}_1$. Тогда Φ_1 пустое, V_1 состоит из одного нуля и, соответственно, есть ровно одна нулевая орбита.
- Пусть $\Phi = \mathrm{A}_2$. Тогда Φ_1 состоит из двух векторов ρ и $\delta - \rho$, Φ_0 пустое, значит все векторы $x^\rho e_\rho + x^{\delta-\rho} e_{\delta-\rho}$, при $x^\rho, x^{\delta-\rho} \in K$, образуют орбиты из одного элемента.
- Пусть $\Phi = \mathrm{A}_3$. Тогда Φ_1 состоит из четырех векторов ρ, σ, $\delta - \rho$ и $\delta - \sigma$, а $\Phi_0 = \{\delta - \rho - \sigma, \rho + \sigma - \delta\} = \mathrm{A}_1$. Из 9 случаев, перечисленных в пункте 4, у нас остались типы I, II, III и VI:

  I. $x = 0$.
  II. $x = x^\lambda e_\lambda$; $x^\lambda \neq 0$.
  III. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^\mu \neq 0$.
  VI. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda}$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda} \neq 0$.

  В случае I, разумеется, остается 0. В случае II, по лемме и описанным ранее особенностям выбора корней λ в системах A_l, все элементы приводятся к одному из двух подтипов $x = e_\rho$ и $x = e_\sigma$. В случае III по лемме получается избавиться лишь от одного коэффициента, и получается серия типов $x = e_\rho + x^\sigma e_\sigma$, $x^\sigma \neq 0$. В случае VI – тоже лишь от одного коэффициента, и получается серия типов $x = e_\rho + x^{\delta-\rho}e_{\delta-\rho}$, $x^{\delta-\rho} \neq 0$. Во всех случаях в лемме 4 полагаем $\alpha = \delta - \rho - \sigma$ и выбираем подходящий коэффициент a. Из этого следует, что при $\Phi = \mathrm{A}_3$ любой $x \in V_1$ приводится к одному из следующих типов:

I. $x = 0$.

II. а) $x = e_\rho$;

б) $x = e_\sigma$.

III. $x = e_\rho + x^\sigma e_\sigma$, $x^\sigma \neq 0$.

VI. $x = e_\rho + x^{\delta-\rho}e_{\delta-\rho}$, $x^{\delta-\rho} \neq 0$.

- Пусть $\Phi = \mathrm{A}_l$, $l > 3$. Как и в прошлый раз, у нас остались типы I, II, III и VI:

I. $x = 0$.

II. $x = x^\lambda e_\lambda$; $x^\lambda \neq 0$.

III. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^\mu \neq 0$.

VI. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda}$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda} \neq 0$.

В случае I, разумеется, остается 0. В случае II, как и в предыдущем пункте, все элементы приводятся к одному из двух подтипов $x = e_\rho$ и $x = e_\sigma$. В случае III с помощью леммы удается избавиться от обоих коэффициентов: после перехода к $x = e_\rho + x^\sigma e_\sigma$, $x^\sigma \neq 0$, аналогичного предыдущему пункту, положим $\alpha = 00\cdots 10$ и выберем подходящий коэффициент a. Тогда в этом случае получается один тип $x = e_\rho + e_\sigma$. В случае VI, как и в предыдущем пункте, получается избавиться лишь от одного коэффициента, и получается серия типов $x = e_\rho + x^{\delta-\rho}e_{\delta-\rho}$, $x^{\delta-\rho} \neq 0$. Из этого следует, что при $\Phi = \mathrm{A}_l$, $l > 3$, любой $x \in V_1$ приводится к одному из следующих типов:

I. $x = 0$.

II. а) $x = e_\rho$;

б) $x = e_\sigma$.

III. $x = e_\rho + e_\sigma$.

VI. $x = e_\rho + x^{\delta-\rho}e_{\delta-\rho}$, $x^{\delta-\rho} \neq 0$.

9. Докажем, что все полученные типы лежат в различных орбитах. Случаи $\Phi = \mathrm{A}_1$ и $\Phi = \mathrm{A}_2$ очевидны. Рассмотрим случай $\Phi = \mathrm{A}_3$. Тип I с нулевым вектором, как и для всех других систем, образует одну орбиту. Для разделения остальных типов воспользуемся рассуждениями из пункта 7. В II а) пара из ковектора и вектора – это $((1,0),(0,0)^T)$; в II б) – $((0,0),(0,1)^T)$; в III – $((1,0),(0,x^\sigma)^T)$; в VI – $((1,0),(x^{\delta-\rho},0)^T)$.

Как несложно видеть, нулевой вектор (и ковектор) остаются нулевыми, значит в II а) и II б) получаются две отдельные орбиты. Таким образом, остались типы III и VI. Если $(1,0)(g')^{-1} = (1,0)$, то первая строка $(g')^{-1}$ тоже состоит из 1 и 0. Тогда первая строка g' такая же, поэтому умножение на g' оставляет первую координату вектора неизменной. Это означает, что для типа VI для каждого $x^{\delta-\rho}$ действительно получается своя орбита. Более того, так как $g' \in \mathrm{SL}(2,K)$, то матрица g' будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому если первая координата вектора равна 0, то вторая координата тоже остается неизменной. Это доказывает, что в типе III также при каждом x^{σ} будет получаться своя орбита.

Для случая $\Phi = \mathrm{A}_l$ при $l > 3$ все рассуждения точно такие же, только отсутствуют три последних предложения, так как здесь в типе III получалась одна орбита.

§5. Случай $\Phi = \mathrm{D}_l$

10. Прежде чем разбирать серию D_l, докажем следующую несложную лемму.

Лемма 6. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & s \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) *Предположим, что $pq = k \neq 0$. Тогда A и B сопряжены матрицей из $\mathrm{SL}(2,K)$ тогда и только тогда, когда $st = k$ и существуют $x, y \in K$, такие, что $x^2 - ky^2 = ps$.*

(2) *Предположим, что $q = 0 = t$. Тогда A и B сопряжены матрицей из $\mathrm{SL}(2,K)$ тогда и только тогда, когда существует $x \in K^*$, такой, что $x^2 p = s$.*

Доказательство. A и B сопряжены матрицей из $\mathrm{SL}(2,K)$ тогда и только тогда, когда существует $G \in \mathrm{SL}(2,K)$, такая, что $GA = BG$. Расписывая это равенство, получаем

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Перемножая и приравнивая обе части, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} g_{12}q &= g_{21}s \\ g_{22}q &= g_{11}t \\ g_{11}p &= g_{22}s \\ g_{21}p &= g_{12}t \end{cases}.$$

Докажем пункт 1. Пусть A и B сопряжены. Тогда равенство $st = k = pq$ очевидно из равенства определителей и, в частности, $p, q, s, t \neq 0$. Так как $G \in \mathrm{SL}(2, K)$, то $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1$. Из первого и третьего уравнений получаем $g_{21} = g_{12}q/s$ и $g_{22} = g_{11}p/s$ (второе и четвертое уравнение им равносильны в силу того, что $st = pq$). Подставляя эти выражения в предыдущее равенство, получаем $g_{11}^2 p/s - g_{12}^2 q/s = 1$. Умножая полученное на ps, получаем нужное: $(g_{11}p)^2 - g_{12}^2 pq = ps$. Доказательство в другую сторону уже практически очевидно: полагая $g_{12} = y$, $g_{11} = x/p$, $g_{21} = g_{12}q/s$ и $g_{22} = g_{11}p/s$, получаем, как несложно видеть, требуемое.

Докажем пункт 2. Понятно, что достаточно разобрать случай, когда p и s не равны 0. Пусть A и B сопряжены. Тогда из первого уравнения системы получаем, что $g_{21} = 0$. При этом из всех уравнений системы остается лишь третье: $g_{11}p = g_{22}s$. Так как $G \in \mathrm{SL}(2, K)$, то $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1$, откуда $g_{22} = 1/g_{11}$. Подставляя в третье уравнение, получаем $g_{11}p = s/g_{11}$, откуда следует нужное равенство. Доказательство в другую сторону тоже очевидно: полагая $g_{11} = x$, $g_{22} = 1/g_{11}$, $g_{21} = 0$, а g_{12} любым, получим требуемое. $\square$

11. Объясним, где будет использоваться эта лемма. Пусть $\Phi = \mathrm{D}_4$ и $x \in V_1$. По лемме 5, этому элементу соответствует корневой элемент $y = \sum_{\alpha\in\Phi} y^\alpha e_\alpha + y^h$, причем $y^\alpha = x^\alpha$ при

$$\alpha \in \Phi_1, \quad y^\delta = 1 \ \text{ и } y^h \in \langle h_\alpha; \quad \alpha \in \Phi_0 \cap \Pi\rangle.$$

Как следует из утверждения 2 работы [17],

$$y = x_{-\delta}(\,\cdot\,)x_{\lambda-\delta}(N_{\lambda-\delta,\delta}x^\lambda)x_{\rho-\delta}(N_{\rho-\delta,\delta}x^\rho)x_{\sigma-\delta}(N_{\sigma-\delta,\delta}x^\sigma) \\ \times x_{\tau-\delta}(N_{\tau-\delta,\delta}x^\tau)e_\delta.$$

При этом, как несложно видеть, коэффициент при $x_{-\delta}$ должен быть равен 0 (чтобы $y^h \in \langle h_\alpha; \alpha \in \Phi_0 \cap \Pi \rangle$), и y^h будет равно 0. Тогда

$$\begin{aligned} y^{\lambda+\rho-\delta} &= N_{\lambda-\delta,\delta} N_{\lambda-\delta,\rho} x^\lambda x^\rho, & y^{\delta-\lambda-\rho} &= N_{\sigma-\delta,\delta} N_{\sigma-\delta,\tau} x^\sigma x^\tau, \\ y^{\lambda+\sigma-\delta} &= N_{\lambda-\delta,\delta} N_{\lambda-\delta,\sigma} x^\lambda x^\sigma, & y^{\delta-\lambda-\sigma} &= N_{\rho-\delta,\delta} N_{\rho-\delta,\tau} x^\rho x^\tau, \\ y^{\lambda+\tau-\delta} &= N_{\lambda-\delta,\delta} N_{\lambda-\delta,\tau} x^\lambda x^\tau, & y^{\delta-\lambda-\tau} &= N_{\rho-\delta,\delta} N_{\rho-\delta,\sigma} x^\rho x^\sigma. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, при умножении на $g \in G_0$ элементу gx соответствует элемент gy, поэтому можно вместо элемента x изучать y.

Положим $V_0 = \langle e_\alpha, \alpha \in \Phi_0; h_\alpha, \alpha \in \Phi_0 \cap \Pi \rangle$. Далее, пусть $z \in V_0$, $z^\alpha = y^\alpha$ при $\alpha \in \Phi_0$ и $z^h = y^h = 0$. Как несложно видеть, при умножении на $g \in G_0$ элементу gy соответствует элемент gz. Так как в нашем случае $\Phi_0 = \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1$, то z можно представить в виде $z_1 + z_2 + z_3$, где каждый z_i берется из своей подалгебры типа A_1; при этом $z_1^h + z_2^h + z_3^h = z^h = 0$, поэтому все $z_i^h = 0$. Наконец, $g \in G_0$ можно разложить схожим образом в произведение $g_1 g_2 g_3$, где каждый g_i принадлежит своей группе $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{A}_1, K) \cong \mathrm{SL}(2, K)$; при этом каждый элемент g_i действует только на “своем” z_i: $g_1 g_2 g_3 (z_1 + z_2 + z_3) = g_1 z_1 + g_2 z_2 + g_3 z_3$. Отметим, что элементы g_i друг с другом никак не связаны и могут подбираться независимо. В естественном представлении элементы z_i представляются матрицами 2×2, а $g_i \in \mathrm{SL}(2, K)$ действуют на них сопряжением. Для подсчитанного ранее элемента y получаем:

$$\begin{aligned} z_1 &= \begin{pmatrix} 0 & N_{\lambda-\delta,\delta} N_{\lambda-\delta,\rho} x^\lambda x^\rho \\ N_{\sigma-\delta,\delta} N_{\sigma-\delta,\tau} x^\sigma x^\tau & 0 \end{pmatrix}, \\ z_2 &= \begin{pmatrix} 0 & N_{\lambda-\delta,\delta} N_{\lambda-\delta,\sigma} x^\lambda x^\sigma \\ N_{\rho-\delta,\delta} N_{\rho-\delta,\tau} x^\rho x^\tau & 0 \end{pmatrix}, \\ z_3 &= \begin{pmatrix} 0 & N_{\lambda-\delta,\delta} N_{\lambda-\delta,\tau} x^\lambda x^\tau \\ N_{\rho-\delta,\delta} N_{\rho-\delta,\sigma} x^\rho x^\sigma & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь можно воспользоваться леммой 6. Подробно для каждого случая мы рассмотрим ее в пункте 16; отметим лишь, что коэффициент k, возникающий в лемме, для z_1 равен

$$(N_{\lambda-\delta,\delta} N_{\lambda-\delta,\rho} x^\lambda x^\rho) \cdot (N_{\sigma-\delta,\delta} N_{\sigma-\delta,\tau} x^\sigma x^\tau),$$

что равно $x^\lambda x^\rho x^\sigma x^\tau$ по лемме 2. Для z_2, аналогичными рассуждениями, получается то же самое выражение. Нужно также обратить внимание, что если переход от x к y обратим, то от y к z – уже нет: в один z могут переходить разные y (и, соответственно, разные x).

Если $\Phi = \mathrm{D}_l$, $l > 4$, то рассуждение похожее. Так как сейчас $\Phi_0 = \mathrm{A}_1 \times \mathrm{D}_{l-2}$ (для простоты будем полагать $\mathrm{D}_3 = \mathrm{A}_3$, чтобы не рассматривать случай $l = 5$ отдельно), то z можно представить в виде $z_1 + z_2$, где z_1 берется из подалгебры типа A_1, а z_2 – типа D_{l-2}; при этом z^h также представится в виде $z_1^h + z_2^h$, и все они будут равны 0. Продолжая рассуждения, мы обнаруживаем, что матрица z_1, как и в прошлый раз, попадает в условие леммы. С z_2 ситуация получается другой, больше схожей с рассмотренными в [18] случаями $\Phi = \mathrm{E}_6$, E_7 и E_8.

Использоваться это будет, в первую очередь, для доказательства того, что два элемента не лежат в одной орбите. В самом деле, если $x, x' \in V_1$ переходят друг в друга, то и соответствующие им корневые элементы $y, y' \in V$ тоже, а значит, и соответствующие им элементы $z, z' \in V_0$ тоже. При этом z и z' распадаются на более простые части, и эти части также будут переходить друг в друга. Соответственно, если, скажем, z_1 и z_1' друг в друга не переходят, то x и x' лежат в разных орбитах.

12. Продолжим изучение вопроса существования и произвольности выбора четырех попарно ортогональных корней λ, μ, ν и ξ для разных систем корней, сейчас для $\Phi = \mathrm{D}_l$. Как и прежде, мы перечислим орбиты этих корней под действием группы Вейля системы Φ_0; так как корни выбирались в теореме по порядку, то порядок нам тоже важен. Таким образом, для определения корня λ мы можем пользоваться всей группой Вейля, для корня μ – только подгруппой, оставляющей уже выбранный λ неподвижным, для корня ν – подгруппой, оставляющей λ и μ неподвижными. Корень ξ определяется по корням λ, μ и ν однозначно, поэтому про него можно и не говорить (к слову, подгруппа, оставляющая на месте λ, μ и ν, будет единичной).

- Пусть $\Phi = \mathrm{D}_4$. В этом случае Φ_1 состоит из 8 корней ${}^{0}_{0}10$, ${}^{0}_{0}11$, ${}^{0}_{1}10$, ${}^{0}_{1}11$, ${}^{1}_{0}10$, ${}^{1}_{0}11$, ${}^{1}_{1}10$ и ${}^{1}_{1}11$; при этом у корня λ получается одна орбита; можно считать, что $\lambda = {}^{0}_{0}10$. С корнями μ, ν и ξ ситуация интереснее – множество $\{\mu, \nu, \xi\}$ однозначно определяется выбором λ, но друг в друга корни μ, ν и ξ не переводятся; поэтому у корня μ получается три орбиты, у ν две орбиты, а у ξ – одна орбита. Обозначим корень ${}^{0}_{1}11$ через ρ, ${}^{1}_{0}11$ – через σ, а ${}^{1}_{1}10$ – через τ. Тогда $\{\mu, \nu, \xi\} = \{\rho, \sigma, \tau\}$, и возможны все 6 перестановочных вариантов.

- Пусть $\Phi = \mathrm{D}_l$, $l > 4$. В этом случае Φ_1 состоит из $4l-8$ корней вида ${}^{*}_{*}{*}\cdots{*}{*}1{*}$. Несложно видеть, что все эти корни переводятся друг в друга, то есть у корня λ одна орбита; можно считать, что $\lambda = {}^{0}_{0}0\ldots0010$. Корни из Φ_1, ортогональные λ – это либо ${}^{1}_{1}2\ldots2210$, либо корни вида ${}^{*}_{*}{*}\cdots{*}\,111$; при этом первый корень ортогонален всем остальным. Корни вида ${}^{*}_{*}{*}\cdots{*}\,111$ переводятся друг в друга, поэтому из них можно выбирать любой; к корню ${}^{0}_{0}0\ldots0111$, скажем, в этом множестве есть ровно один ортогональный ${}^{1}_{1}2\ldots2111$. Итого, получается, что у корня μ есть две орбиты, причем в одной из них у ν и ξ по одной орбите, а в другой у ν две орбиты, а у ξ одна; у множества $\{\lambda,\mu,\nu,\xi\}$ одна орбита. Обозначим корень ${}^{1}_{1}2\ldots2210$ через ρ, ${}^{0}_{0}0\ldots0111$ – через σ, а ${}^{1}_{1}2\ldots2111$ – через τ. Тогда можно считать, что либо $\mu=\rho$, $\nu=\sigma$ и $\xi=\tau$, либо $\mu=\sigma$, $\nu=\rho$ и $\xi=\tau$, либо $\mu=\sigma$, $\nu=\tau$ и $\xi=\rho$.

13. На самом деле, однако, нас интересуют немного другие орбиты, а именно, орбиты множеств $\{\lambda\}$, $\{\lambda,\mu\}$, $\{\lambda,\mu,\nu\}$ и $\{\lambda,\mu,\nu,\xi\}$. Иначе говоря, порядок корней нам не важен. Это, разумеется, более слабое условие и некоторые орбиты могут объединиться. Для рассмотренных ранее случаев $\Phi = \mathrm{E}_l$ (в [18]) и $\Phi = \mathrm{A}_l$ этого не происходило, но в рассматриваемом случае это кое-где происходит.

- Пусть $\Phi = \mathrm{D}_4$. Тогда из изложенного в предыдущем пункте получается:
  1) у корня λ одна орбита;
  2) пару корней $\{\lambda,\mu\}$ можно перевести в $\{\lambda,\rho\}$, $\{\lambda,\sigma\}$ или $\{\lambda,\tau\}$;
  3) тройку корней $\{\lambda,\mu,\nu\}$ можно перевести в $\{\lambda,\rho,\sigma\}$, $\{\lambda,\rho,\tau\}$ или $\{\lambda,\sigma,\tau\}$;
  4) у четверки корней $\{\lambda,\mu,\nu,\xi\}$ одна орбита.

  Оказывается, в случае 3) у нас всего одна орбита, и в этом несложно убедиться непосредственно. А именно, тройка $\{\lambda,\rho,\sigma\}$ под действием элемента группы Вейля, соответствующего корню $\lambda+\rho-\delta$, переходит в $\{\delta-\rho,\delta-\lambda,\delta-\tau\}$; полученная тройка под действием элемента группы Вейля, соответствующего корню $\lambda+\tau-\delta$, переходит в $\{\sigma,\tau,\lambda\}$. Для оставшейся тройки рассуждение аналогичное.

- Пусть $\Phi = \mathrm{D}_l$, $l > 4$. Тогда из изложенного в предыдущем пункте получается:
  1) у корня λ одна орбита;
  2) пару корней $\{\lambda,\mu\}$ можно перевести в $\{\lambda,\rho\}$ или $\{\lambda,\sigma\}$;
  3) тройку корней $\{\lambda,\mu,\nu\}$ можно перевести в $\{\lambda,\rho,\sigma\}$ или $\{\lambda,\sigma,\tau\}$;
  4) у четверки корней $\{\lambda,\mu,\nu,\xi\}$ одна орбита.

  Повторяя дословно рассуждение из случая $\Phi = \mathrm{D}_4$, мы снова обнаруживаем, что в 3), на самом деле, одна орбита.

14. Пусть $\Phi = \mathrm{D}_4$. Тогда Φ_1 состоит из восьми векторов λ, ρ, σ, τ, $\delta-\lambda$, $\delta-\rho$, $\delta-\sigma$ и $\delta-\tau$, образующих куб (к слову, он уже обсуждался в статье [18]); $\Phi_0 = \{\pm(\delta-\lambda-\rho), \pm(\delta-\lambda-\sigma), \pm(\delta-\lambda-\tau)\} = \mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_1$. В этом случае у нас остались первые пять типов:

I. $x=0$.
II. $x=x^\lambda e_\lambda$; $x^\lambda\neq 0$.
III. $x=x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^\mu \neq 0$.
IV. $x=x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu \neq 0$.
V. $x=x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$.

Как мы доказывали в [18] (и уже упоминали в пункте 5), в случае II вектор x получается сингулярным, в случае III – блестящим, в случае IV – светящимся, а в случае V – темным. Кроме того, в случае V произведение всех коэффициентов $x^\lambda x^\mu x^\nu x^\xi$ является неизменным. Это означает, что элементы x из разных типов точно лежат в различных орбитах. Осталось понять, как обстоят дела внутри каждого типа.

По пункту 13 мы получаем, что при переходе к конкретным корням тип III распадается на три подтипа.

I. $x=0$.
II. $x=x^\lambda e_\lambda$; $x^\lambda\neq 0$.
III. а) $x=x^\lambda e_\lambda + x^\rho e_\rho$; $x^\lambda, x^\rho \neq 0$;
б) $x=x^\lambda e_\lambda + x^\sigma e_\sigma$; $x^\lambda, x^\sigma \neq 0$;
в) $x=x^\lambda e_\lambda + x^\tau e_\tau$; $x^\lambda, x^\tau \neq 0$.
IV. $x=x^\lambda e_\lambda + x^\rho e_\rho + x^\sigma e_\sigma$; $x^\lambda, x^\rho, x^\sigma \neq 0$.
V. $x=x^\lambda e_\lambda + x^\rho e_\rho + x^\sigma e_\sigma + x^\tau e_\tau$; $x^\lambda, x^\rho, x^\sigma, x^\tau \neq 0$.

Отметим, однако, что пока мы еще не доказали, что элементы из разных подтипов лежат в разных орбитах. Это будет сделано чуть позднее.

15. Как несложно видеть, если взять вектор $x = x^\lambda e_\lambda + x^\rho e_\rho + x^\sigma e_\sigma + x^\tau e_\tau$ (будем считать, что $x^\lambda \neq 0$, а остальные коэффициенты произвольные), то при применении к нему любого $w_\alpha(a)$ из леммы 4, $\alpha \in \Phi_0$, два его коэффициента умножатся на a, а два других – на $\frac{1}{a}$. Тогда, применяя это действие три раза для трех ортогональных корней из Φ_0, из вектора x можно получить $x^\lambda abce_\lambda + \frac{x^\rho a}{bc}e_\rho + \frac{x^\sigma b}{ac}e_\sigma + \frac{x^\tau c}{ab}e_\tau$. Если положить $c = \frac{1}{x^\lambda ab}$, чтобы коэффициент при e_λ стал равен 1, то $x^\lambda abce_\lambda + \frac{x^\rho a}{bc}e_\rho + \frac{x^\sigma b}{ac}e_\sigma + \frac{x^\tau c}{ab}e_\tau = e_\lambda + x^\lambda x^\rho a^2 e_\rho + x^\lambda x^\sigma b^2 e_\sigma + \frac{x^\tau}{x^\lambda a^2 b^2}e_\tau$. Таким образом, x^λ можно сделать равным 1, а два других можно умножать на произвольные ненулевые квадраты.

16. Рассмотрим классификацию из пункта 14. С типом I все понятно. В типе II по пункту 15 всего одна орбита, поэтому с ним тоже нет никаких проблем. В типе III из матриц z_1, z_2 и z_3 две матрицы нулевые, а одна имеет ненулевой коэффициент над диагональю, то есть подпадает под условие леммы 6, 2): в III а) это z_1, в III б) – z_2, а в III в) – z_3. Так как нулевая матрица при сопряжении переходит в нулевую, а ненулевая нет, то все три подтипа действительно разные. По лемме 6, 2) и виду z_i, если два вектора из одного подтипа лежат в одной орбите, то произведение коэффициентов у них лежат в одном классе $K^*/(K^*)^2$. А из пункта 15 следует обратное: если произведение коэффициентов у них лежат в одном классе $K^*/(K^*)^2$, то векторы лежат в одной орбите. Таким образом, эти два утверждения равносильны. Если при выборе представителя каждой орбиты сделать x^λ равным 1, то оставшийся коэффициент можно выбирать из $K^*/(K^*)^2$.

Аналогично, в типе IV матрицы z_1, z_2 и z_3^T имеют ненулевой коэффициент над диагональю, то есть подпадают под условие леммы 6, 2) (отметим, что если матрицы сопряжены, то и транспонированные к ним матрицы также сопряжены). Соответственно, по лемме 6, 2), виду z_i и пункту 15, если при выборе представителя каждой орбиты сделать x^λ равным 1, то два оставшихся коэффициента можно выбирать из $K^*/(K^*)^2$.

Осталось рассмотреть случай, когда вектор x имеет тип V. До сих пор мы использовали переход к матрицам z_i и лемму 6 для доказательства лишь в одну сторону – что если элементы x и $\tilde{x}$ сопряжены, то соответствующие z_i также сопряжены, и выполняется условие на коэффициенты из леммы 6. Для доказательства в другую сторону нам хватало пункта 15. В данном случае ситуация иная – лемма 6 и пункт 15 дают различные оценки. Поэтому вместо рассуждений из пункта 15 мы докажем, что если соответствующие z_i сопряжены, то и изначальные элементы также сопряжены.

В типе V все матрицы z_i имеют ненулевые коэффициенты как над, так и под диагональю, то есть подпадают под условие леммы 6, 1). Предположим, что мы сумели матрицы z_1 и z_2 перевести сопряжением, как в лемме 6, 1), в матрицы

$$\tilde{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \pm a \\ \pm b & 0 \end{pmatrix}, \tilde{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \pm c \\ \pm d & 0 \end{pmatrix},$$

где знак плюс или минус в каждой позиции совпадает с соответствующим знаком в матрицах z_1 и z_2 в пункте 11; a, b, c и d при этом будут отличны от 0. Докажем, что тогда вектор x можно перевести в вектор $e_\lambda + ae_\rho + ce_\sigma + \frac{b}{c}e_\tau$.

Когда мы перевели, как в лемме 6, 1), матрицы z_1 и z_2 в $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$, вектор x перешел в некоторый вектор $\tilde{x} = \tilde{x}^\lambda e_\lambda + \tilde{x}^\rho e_\rho + \tilde{x}^\sigma e_\sigma + \tilde{x}^\tau e_\tau + \tilde{x}^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda} + \tilde{x}^{\delta-\rho}e_{\delta-\rho} + \tilde{x}^{\delta-\sigma}e_{\delta-\sigma} + \tilde{x}^{\delta-\tau}e_{\delta-\tau}$. Как и раньше, обозначим через $\tilde{y}$ соответствующий ему по лемме 5 элемент из V. Напомним, что соответствующий, в свою очередь, этому $\tilde{y}$ элемент $\tilde{z}$ распадается на те самые $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ и $\tilde{z}_3$, поэтому $a = \pm\tilde{y}^{\lambda+\rho-\delta}$, $b = \pm\tilde{y}^{\delta-\lambda-\rho}$, $c = \pm\tilde{y}^{\lambda+\sigma-\delta}$ и $d = \pm\tilde{y}^{\delta-\lambda-\sigma}$. Заметим, что действия корневыми элементами $x_{\lambda+\tau-\delta}(\cdot)$ и $x_{\delta-\lambda-\tau}(\cdot)$ не меняют коэффициенты в разложении $\tilde{y}$ при элементах $e_{\lambda+\rho-\delta}, e_{\delta-\lambda-\rho}, e_{\lambda+\sigma-\delta}$ и $e_{\delta-\lambda-\sigma}$ и, соответственно, коэффициенты a, b, c и d, как и все матрицы $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ в целом. Можно также отметить, что Φ_0 состоит из трех пар корней, и соответствующие каждой паре корневые элементы меняют только одну $\tilde{z}_i$ из трех; в частности, $x_{\lambda+\tau-\delta}(\cdot)$ и $x_{\delta-\lambda-\tau}(\cdot)$ меняют $\tilde{z}_3$.

Как несложно видеть, $0 \neq a = \pm\tilde{y}^{\lambda+\rho-\delta} = \pm\tilde{x}^\lambda\tilde{x}^\rho \pm \tilde{x}^{\delta-\sigma}\tilde{x}^{\delta-\tau}$, поэтому $\tilde{x}^\lambda$ или $\tilde{x}^{\delta-\tau}$ отличен от 0. Действуя, при необходимости, $x_{\delta-\lambda-\tau}(\cdot)$, можно считать, что $\tilde{x}^{\delta-\tau} \neq 0$. Далее, действуя $x_{\lambda+\tau-\delta}(\cdot)$, можно добиться того, чтобы $\tilde{x}^\lambda = 1$ и, снова действуя $x_{\delta-\lambda-\tau}(\cdot)$, чтобы $\tilde{x}^{\delta-\tau} = 0$. В силу вышеуказанной формулы $a = \pm\tilde{x}^\lambda\tilde{x}^\rho \pm \tilde{x}^{\delta-\sigma}\tilde{x}^{\delta-\tau}$ и выбора знака при определении a, получаем, что $\tilde{x}^\rho = a$. Тогда, действуя корневым элементом $x_{\lambda+\tau-\delta}(\cdot)$, можно добиться того, что $\tilde{x}^{\delta-\sigma} = 0$. Таким образом, $\tilde{x} = e_\lambda + ae_\rho + \tilde{x}^\sigma e_\sigma + \tilde{x}^\tau e_\tau + \tilde{x}^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda} + \tilde{x}^{\delta-\rho}e_{\delta-\rho}$. Аналогично, так как $c = \pm\tilde{x}^\lambda\tilde{x}^\sigma \pm \tilde{x}^{\delta-\rho}\tilde{x}^{\delta-\tau}$, мы получаем, что $\tilde{x}^\sigma = c$. Наконец, действуя корневым элементом $x_{\delta-\lambda-\rho}(\cdot)$, можно также добиться того, что $\tilde{x}^{\delta-\rho} = 0$; выбранные ранее коэффициенты $\tilde{x}^{\lambda}$, $\tilde{x}^{\rho}$, $\tilde{x}^{\sigma}$ (так как $\tilde{x}^{\delta-\tau} = 0$), $\tilde{x}^{\delta-\tau}$ и $\tilde{x}^{\delta-\sigma}$ при этом не меняются. Матрица $\tilde{z}_1$ изменится, но она нам уже не нужна.

Таким образом, теперь $\tilde{x} = e_{\lambda} + ae_{\rho} + ce_{\sigma} + \tilde{x}^{\tau}e_{\tau} + \tilde{x}^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda}$. Для того чтобы избавиться от последнего слагаемого, сошлемся на вычисления из [18], пункт 7, упрощение случая IX. Они проходят дословно, только в той статье элемент записывался в виде $x = x^{\lambda}e_{\lambda} + x^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda} + x^{\mu}e_{\mu} + x^{\nu}e_{\nu} + x^{\xi}e_{\xi}$, поэтому нужно сделать замены $\mu := \rho$, $\nu := \tau$, $\xi := \sigma$ и, соответственно, $x^{\lambda} := 1$, $x^{\delta-\lambda} := \tilde{x}^{\delta-\lambda}$, $x^{\mu} := a$, $x^{\nu} := \tilde{x}^{\tau}$ и $x^{\xi} := c$. В [18] требовалось, чтобы все коэффициенты были не равны 0, но, на самом деле, в тех рассуждениях x^{τ} вполне может равняться 0, так как он нигде не оказывается в знаменателе. После выполнения вычислений из [18] получался вектор $\frac{x^{\lambda}}{x^{\mu}}e_{\lambda} + e_{\mu} + (x^{\nu}x^{\mu} + \frac{x^{\lambda}(x^{\delta-\lambda})^2}{4x^{\xi}})e_{\nu} + x^{\xi}x^{\mu}e_{\xi}$; если же на полученный вектор подействовать элементом $w_{\delta-\lambda-\mu}(x^{\mu})$ (из леммы 4), то получится вектор $x^{\lambda}e_{\lambda} + x^{\mu}e_{\mu} + (x^{\nu} + \frac{x^{\lambda}(x^{\delta-\lambda})^2}{4x^{\xi}x^{\mu}})e_{\nu} + x^{\xi}e_{\xi}$. Возвращаясь к нашим изначальным обозначениям, получаем вектор $e_{\lambda} + ae_{\rho} + (\tilde{x}^{\tau} + \frac{(\tilde{x}^{\delta-\lambda})^2}{4ac})e_{\tau} + ce_{\sigma}$. Осталось заметить, что произведение коэффициентов, как мы отмечали в пункте 5, остается неизменным. Так как, по выбору a, b, c и d, $x^{\lambda}x^{\rho}x^{\sigma}x^{\tau} = ab = cd$, то коэффициент при e_{τ} равен $\frac{b}{c}$, что и требовалось.

Объединяя полученное с леммой 6, 1) и пунктом 11, получаем, что два элемента $x = e_{\lambda} + x^{\rho}e_{\rho} + x^{\sigma}e_{\sigma} + x^{\tau}e_{\tau}$ и $\tilde{x} = e_{\lambda} + \tilde{x}^{\rho}e_{\rho} + \tilde{x}^{\sigma}e_{\sigma} + \tilde{x}^{\tau}e_{\tau}$ лежат в одной орбите тогда и только тогда, когда $k := x^{\rho}x^{\sigma}x^{\tau} = \tilde{x}^{\rho}\tilde{x}^{\sigma}\tilde{x}^{\tau}$ и существуют $x, y, x', y' \in K$, такие, что $x^2 - ky^2 = x^{\rho}\tilde{x}^{\rho}$ и $x'^2 - ky'^2 = x^{\sigma}\tilde{x}^{\sigma}$.

17. Полученные результаты можно объединить в теорему:

Теорема 2. *Пусть* $\Phi = \mathrm{D}_4$ *и* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Обозначим, для определенности,* $\lambda = {}^{0}_{0}10$, $\rho = {}^{0}_{1}11$, $\sigma = {}^{1}_{0}11$ *и* $\tau = {}^{1}_{1}10$. *Далее, пусть* $a \sim_k b \Leftrightarrow \exists x, y \in K : x^2 - ky^2 = ab$ *– отношение эквивалентности на* K^* *и* $K_k = K^*/\sim_k$ *– множество классов по этому отношению. Тогда векторы из* V_1 *под действием* G_0 *образуют следующие орбиты:*

I. *Нулевая орбита,* $x = 0$.

II. *Одна орбита из сингулярных векторов. Ее элементы можно привести к виду* $x = e_{\lambda}$.

III. *Три серии орбит из блестящих векторов. Их элементы можно привести к одному из следующих видов:*

   a) $x = e_{\lambda} + x^{\rho}e_{\rho}$; $x^{\rho} \in K^*/(K^*)^2$;

б) *$x = e_\lambda + x^\sigma e_\sigma$; $x^\sigma \in K^*/(K^*)^2$;*
в) *$x = e_\lambda + x^\tau e_\tau$; $x^\tau \in K^*/(K^*)^2$.*

IV. *Одна серия орбит из светящихся векторов. Их элементы можно привести к виду $x = e_\lambda + x^\rho e_\rho + x^\sigma e_\sigma$; $x^\rho, x^\sigma \in K^*/(K^*)^2$.*

V. *Одна серия орбит из темных векторов. Их элементы можно привести к виду $x = e_\lambda + x^\rho e_\rho + x^\sigma e_\sigma + x^\tau e_\tau$, где $k \in K^*$, $x^\rho, x^\sigma \in K_k$, $x^\tau = \frac{k}{x^\rho x^\sigma}$.*

18. Пусть $\Phi = \mathrm{D}_l$, $l > 4$. Этот случай, разумеется, похож на $\Phi = \mathrm{D}_4$, но есть некоторые отличия. Здесь Φ_1 состоит из $4l - 8$ векторов вида ${}^{*}_{*}{*}\cdots{*}{*}1{*}$, $\Phi_0 = \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_{l-2}$. В обозначениях из пункта 12 $\lambda = {}^{0}_{0}0\ldots0010$, $\rho = {}^{1}_{1}2\ldots2210$, $\sigma = {}^{0}_{0}0\ldots0111$ и $\tau = {}^{1}_{1}2\ldots2111$, A_1 из разложения Φ_0 совпадает с $\{\pm(\delta-\lambda-\rho)\}$. У нас снова остались первые пять типов:

I. $x = 0$.
II. $x = x^\lambda e_\lambda$; $x^\lambda \neq 0$.
III. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^\mu \neq 0$.
IV. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu \neq 0$.
V. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$.

Как уже говорилось, в случае II вектор x получается сингулярным, в случае III – блестящим, в случае IV – светящимся, а в случае V – темным. Кроме того, в случае V произведение всех коэффициентов $x^\lambda x^\mu x^\nu x^\xi$ является неизменным. Это означает, что элементы x из разных типов точно лежат в различных орбитах. Осталось понять, как обстоят дела внутри каждого типа.

По пункту 13 мы получаем, что при переходе к конкретным корням тип III распадается на два подтипа.

I. $x = 0$.
II. $x = x^\lambda e_\lambda$; $x^\lambda \neq 0$.
III. а) $x = x^\lambda e_\lambda + x^\rho e_\rho$; $x^\lambda, x^\rho \neq 0$;
б) $x = x^\lambda e_\lambda + x^\sigma e_\sigma$; $x^\lambda, x^\sigma \neq 0$.
IV. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\rho e_\rho + x^\sigma e_\sigma$; $x^\lambda, x^\rho, x^\sigma \neq 0$.
V. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\rho e_\rho + x^\sigma e_\sigma + x^\tau e_\tau$; $x^\lambda, x^\rho, x^\sigma, x^\tau \neq 0$.

19. Пункт 15 выполняется и для случая $\Phi = \mathrm{D}_l$, $l > 4$, то есть из элемента $x = x^\lambda e_\lambda + x^\rho e_\rho + x^\sigma e_\sigma + x^\tau e_\tau$ можно получить $x^\lambda abc e_\lambda + \frac{x^\rho a}{bc} e_\rho + \frac{x^\sigma b}{ac} e_\sigma + \frac{x^\tau c}{ab} e_\tau$. Однако в рассматриваемом случае появляются и другие возможные изменения. А именно, как несложно видеть,

корень $\alpha = \alpha_{l-3}$ ортогонален корням λ и ρ, а также образует угол $2\pi/3$ с σ и $\pi/3$ с τ; поэтому при применении к x элемента $w_\alpha(a)$ из леммы 4 получится $x^\lambda e_\lambda + x^\rho e_\rho + x^\sigma a e_\sigma + \frac{x^\tau}{a} e_\tau$. Аналогично, корень $\beta = {}^1_1 1 \ldots 1100$ будет ортогонален корням σ и τ, а также будет образовывать угол $2\pi/3$ с λ и $\pi/3$ с ρ; поэтому при применении к x элемента $w_\beta(a)$ из леммы 4 получится $x^\lambda a e_\lambda + \frac{x^\rho}{a} e_\rho + x^\sigma e_\sigma + x^\tau e_\tau$.

20. Так как $\Phi_0 = \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_{l-2}$, то, как и для случая D_4, элементу x можно сопоставить матрицу z_1, соответствующую подсистеме A_1. Как и прежде, если элементы $x, x' \in V_1$ переходят друг в друга, то и соответствующие им элементы $z_1, z_1' \in V_0$ тоже.

Наконец, заметим, что корни λ, ρ, σ и τ порождают подсистему типа D_4, и для нее верны проделанные выше рассуждения. То есть, если элементы x и x' лежали в одной орбите в случае $\Phi = \mathrm{D}_4$, то в случае $\Phi = \mathrm{D}_l$, $l > 4$, они тоже будут лежать в одной орбите. Наоборот, разумеется, это не верно – различные орбиты из D_4 могут “склеиться” в D_l, так как действующая группа там будет больше.

21. Рассмотрим классификацию из 18 пункта. С типом I все понятно. В типе II по пункту 19 всего одна орбита, поэтому с ним тоже нет никаких проблем. В подтипе III а) матрица z_1 имеет ненулевой коэффициент над диагональю, то есть подпадает под условие леммы 6, 2), а в III б) матрица z_1 нулевая, поэтому элементы из этих подтипов лежат в разных орбитах. В III а), по лемме 6, 2) и пункту 19, два вектора лежат в одной орбите тогда и только тогда, когда произведение коэффициентов у них лежат в одном классе $K^*/(K^*)^2$. Если при выборе представителя каждой орбиты сделать x^λ равным 1, то оставшийся коэффициент можно выбирать из $K^*/(K^*)^2$. Что касается подтипа III б), то по пункту 19, в нем всего одна орбита.

В типе IV матрица z_1 опять имеет ненулевой коэффициент над диагональю, то есть подпадает под условие леммы 6, 2). Соответственно, по лемме 6, 2) и пункту 19, если при выборе представителя каждой орбиты сделать x^λ равным 1, то x^ρ можно выбирать из $K^*/(K^*)^2$. При этом коэффициент x^σ, тоже по пункту 19, можно сделать любым.

Осталось разобраться с типом V. Пользуясь, как мы говорили в пункте 20, результатом для D_4, мы получаем, что любой темный вектор можно привести к виду $x = e_\lambda + x^\rho e_\rho + x^\sigma e_\sigma + x^\tau e_\tau$, где $k \in K^*$, $x^\rho, x^\sigma \in K_k$, $x^\tau = \frac{k}{x^\rho x^\sigma}$. По пункту 19 можно x^σ сделать произвольным ненулевым числом, меняя лишь коэффициент x^τ; мы положим x^σ равным 1. Таким образом, темный вектор можно привести к виду

$x = e_\lambda + x^\rho e_\rho + e_\sigma + x^\tau e_\tau$, где $k \in K^*$, $x^\rho \in K_k$, $x^\tau = \frac{k}{x^\rho}$. Докажем, что все такие элементы лежат в разных орбитах. Прежде всего напомним, что число k, равное произведению всех коэффициентов, является инвариантом. Далее, матрица z_1 подпадает под условие леммы 6, 1), причем коэффициент над диагональю равен $N_{\lambda-\delta,\delta} N_{\lambda-\delta,\rho} x^\rho$, а число k совпадает с также обозначенным числом из леммы. Поэтому $x^\rho \in K_k$, что и требовалось.

22. Полученные результаты можно объединить в следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi = \mathrm{D}_l$, $l > 4$, *и* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Положим, для определенности,* $\lambda = {}^{0}_{0}0\ldots0010$, $\rho = {}^{1}_{1}2\ldots2210$, $\sigma = {}^{0}_{0}0\ldots0111$ *и* $\tau = {}^{1}_{1}2\ldots2111$. *Далее, пусть* $a \sim_k b \Leftrightarrow \exists x, y \in K : x^2 - ky^2 = ab$ *– отношение эквивалентности на* K^* *и* $K_k = K^*/\sim_k$ *– множество классов по этому отношению. Тогда векторы из* V_1 *под действием* G_0 *образуют следующие орбиты:*

I. *Нулевая орбита,* $x = 0$.

II. *Одна орбита из сингулярных векторов. Ее элементы можно привести к виду* $x = e_\lambda$.

III. *Одна серия орбит и одна отдельная орбита из блестящих векторов. Их элементы можно привести к одному из следующих видов:*

  а) $x = e_\lambda + x^\rho e_\rho$; $x^\rho \in K^*/(K^*)^2$;

  б) $x = e_\lambda + e_\sigma$.

IV. *Одна серия орбит из светящихся векторов. Их элементы можно привести к виду* $x = e_\lambda + x^\rho e_\rho + e_\sigma$; $x^\rho \in K^*/(K^*)^2$.

V. *Одна серия орбит из темных векторов. Их элементы можно привести к виду* $x = e_\lambda + x^\rho e_\rho + e_\sigma + x^\tau e_\tau$, *где* $k \in K^*$, $x^\rho \in K_k$, $x^\tau = \frac{k}{x^\rho}$.

Список литературы

1. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле*, Семинар по алгебраическим группам, Мир, М. (1973), 9–59.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Главы IV–VI, Мир, М. (1972).
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Главы VII–VIII, Мир, М. (1978).
4. Н. А. Вавилов, *Как увидеть знаки структурных констант?* — Алгебра и анализ **19**, No. 4 (2007), 34–68.
5. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_7, Алгебра и анализ **27**, No. 6 (2015), 57–88.

6. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **338**, 5–68 (2006).
7. Н. А. Вавилов, И. М. Певзнер, *Тройки длинных корневых подгрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343**, 54–83 (2007).
8. Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, *Длинные корневые торы в группах Шевалле.* — Алгебра и анализ **24**, No. 3 (2012), 22–83.
9. А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Некоторые факты из жизни* $\mathrm{GL}(5,\mathbb{Z})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **305**, 153–163 (2003).
10. О. О'Мира, *Лекции о линейных группах*, Автоморфизмы классических групп, Мир, М. (1976), 57–167.
11. О. О'Мира, *Лекции о симплектических группах*, Мир, М. (1979).
12. И. М. Певзнер, *Геометрия корневых элементов в группах типа* E_6. — Алгебра и анализ **23**, No. 3 (2011), 261–309.
13. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, I. — Алгебра и анализ **23**, No. 5 (2011), 155–198.
14. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386**, 242–264 (2011).
15. И. М. Певзнер, *Ширина группы* $\mathrm{GL}(6,K)$ *относительно множества квазикорневых элементов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **423**, 183–204 (2014).
16. И. М. Певзнер, *Ширина экстраспециального унипотентного радикала относительно множества корневых элементов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **435**, 168–177 (2015).
17. И. М. Певзнер, *Существование корневой подгруппы, которую данный элемент переводит в противоположную.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **460**, 190–202 (2017).
18. И. М. Певзнер, *Орбиты векторов некоторых представлений.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **484**, 149–164 (2019).
19. Т. А. Спрингер, *Линейные алгебраические группы.* — Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. проблемы мат. Фундам. направления **55**, ВИНИТИ, М. (1989), 5–136.
20. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М. (1975).
21. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М. (1980).
22. Дж. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М. (2003).
23. M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for* E_6. I. — Invent. Math **89**, No. 1 (1987), 159–195.
24. M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for* E_6. II. — J. London Math. Soc. **37**, 275–293 (1988).
25. M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for* E_6. III. — Trans. Amer. Math. Soc. **321**, 45–84 (1990).
26. M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for* E_6. IV. — J. Algebra **131**, 23–39 (1990).
27. M. Aschbacher, *Some multilinear forms with large isometry groups.* — Geom. Dedicata **25**, No. 1–3 (1988), 417–465.
28. M. Aschbacher, *The geometry of trilinear forms*, Finite Geometries, Buildings and Related topics, Oxford: Oxford Univ. Press (1990), 75–84.

29. B. N. Cooperstein, *The fifty-six-dimensional module for E_7. I. A four form for E_7*. — J. Algebra **173**, No. 2 (1995), 361–389.
30. S. Krutelevich, *Jordan algebras, exceptional groups, and Bhargava composition.* — J. Algebra **314**, No. 2 (2007), 924–977.
31. T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser Boston Inc., Boston (1998).
32. J. Tits, *Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples.* — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 31 (1966), 21–58.
33. N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **104**, 201–250 (2000).
34. N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations.* — Acta Applicandae Math. **45**, 73–115 (1996).

Pevzner I. M. Orbits of vectors in some representations. II.

Let Φ be a root system of type A_l or D_l. Let K be a field of characteristic other than 2. Let δ be the maximal root of Φ and $\Phi_0 = \{\alpha \in \Phi; \delta \perp \alpha\}$. The orbits of the group $G_{\mathrm{sc}}(\Phi_0, K)$ acting on the set $\langle e_\alpha; \angle(\alpha, \delta) = \pi/3\rangle$ are described.

РГПУ им. А. И. Герцена
наб. реки Мойки, д. 48
191186 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: pevzner_igor@mail.ru

Поступило 1 декабря 2022 г.