Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 522, 2023 г.

А. А. Осиновская

КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФАКТОРЫ ОГРАНИЧЕНИЙ МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SL_{r+1}(K)$ НА ПОЛУПРОСТЫЕ ПОДГРУППЫ

Памяти моего учителя, Ирины Дмитриевны Супруненко

§1. Введение

Описание неприводимых модулярных представлений — одна из основных проблем теории представлений алгебраических групп. Оно тесно связано с нерешенной проблемой нахождения характеров и размерностей таких представлений, поэтому целесообразно развивать другие методы исследования. Супруненко и Премет в 1983–88 гг. доказали, что система весов p-ограниченного неприводимого представления алгебраической группы типа A_n в положительной характеристике p совпадает с системой весов неприводимого представления комплексной алгебры Ли типа A_n с тем же самым старшим весом [6], и что это верно для других простых алгебраических групп, если $p > 2$ для групп типов B_n и C_n и $p > 3$ для групп типа G_2 [4].

Структура ограничений модулярных представлений алгебраических групп является существенной для описания таких представлений. Данный подход позволяет использовать индукцию по рангу группы. Бранден, Клещев и Супруненко в 1998 г. [7] получили критерий полупростоты ограничения неприводимого рационального $GL(n)$-модуля на подсистемную подгруппу $GL(n-1)$ и описали композиционные факторы ограничения в явном виде. Щиголев в 2009 г. [11] нашел условие, при котором некоторые подмодули Вейля могут быть вложены в ограничения простых модулей специальной линейной группы. Однако пока мы знаем очень мало об ограничениях, даже на "малые" подгруппы. В

Ключевые слова: специальная линейная группа, представления, ограничения на подгруппы, правила ветвления, композиционные факторы.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований "Конвергенция-2025," задание 1.1.01.

то же время, анализируя ограничения представлений простых алгебраических групп на подсистемные подгруппы с двумя простыми компонентами, можно получить информацию, которую нельзя получить, имея дело только с простыми подсистемными подгруппами. Наш опыт показывает, что изучение таких ограничений полезно для исследования поведения некоторых унипотентных элементов в соответствующих представлениях.

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$, G – односвязная алгебраическая группа типа A_r над K, т.е. $G = SL_{r+1}(K)$, $r \geqslant 3$; $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – простые корни группы G, пронумерованные стандартным образом; $\omega_1, \dots, \omega_r$ – соответствующие фундаментальные веса и $\varphi(\omega)$ – неприводимое рациональное представление группы G со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$. Множество весов группы типа $A_1 \times A_1$ можно отождествить с множеством пар целых чисел с помощью следующего отображения $(x_1\omega_1, x_2\omega_1) \mapsto (x_1, x_2)$, а множество всех доминантных весов – с множеством $\mathbb{N}^2$ пар неотрицательных целых чисел. Символ $\operatorname{Irr}\psi$ обозначает множество старших весов композиционных факторов представления ψ группы G, а $\psi|\Pi$ – ограничение представления ψ на подгруппу $\Pi \subset G$.

Если $\beta_1, \dots, \beta_s$ – корни группы G, то $G(\beta_1, \dots, \beta_s)$ – подгруппа в G, порожденная корневыми элементами $x_{\pm\beta_1}(t), \dots, x_{\pm\beta_s}(t)$, связанными с соответствующими корнями, $t \in K$. Здесь корни $\beta_1, \dots, \beta_s$ выбраны таким образом, что они составляют базис системы корней для $G(\beta_1, \dots, \beta_s)$. Такие подгруппы $G(\beta_1, \dots, \beta_s)$ называются подсистемными подгруппами. Положим

$$G(i_1, \dots, i_s) = G(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}).$$

Мы используем и “смешанные” обозначения $G(i_1, \dots, i_k, \beta, i_{k+1}, \dots, i_s)$.

В дальнейшем H является подсистемной подгруппой в G типа $A_1 \times A_1$. Все такие подгруппы сопряжены в G. Поэтому мы можем положить, например, $H = G(1, n)$. Принимая во внимание приведенное выше отождествление, можно написать $\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H) \subset \mathbb{N}^2$. Напомним, что вес ω является p-ограниченным, если $a_i < p$ для всех $1 \leqslant i \leqslant r$. Положим $m = a_1 + \ldots + a_r$, $m' = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{r-1} + a_r$ и

$$S(\omega) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1, x_2 \leqslant m,\ x_1 + x_2 \leqslant m'\}.$$

Напомним, что при $p = 0$ и $r > 3$ справедливо равенство

$$\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H) = S(\omega) \tag{1}$$

(см. [1, теорема 1.2] и [10, теорема 3]). В [3, теорема 1] было доказано, что при $r \geqslant 7$, если на коэффициенты старшего веса ω наложить условия $a_i + a_{i+1} + 1 < p$ для всех $1 \leqslant i \leqslant r-1$ (т.е. если вес является локально малым относительно характеристики поля), то равенство (1) тоже верно. Данный результат можно расширить на произвольные p-ограниченные представления.

Теорема 1. *Пусть $r \geqslant 7$ и вес ω является p-ограниченным. Тогда*

$$\mathrm{Irr}(\varphi(\omega)|H) = S(\omega).$$

Заметим, что эта теорема неверна при $r = 4$, как показано в предложении 1.

§2. Большие композиционные факторы

Введем сначала некоторые обозначения. Как обычно, $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел, а $\mathbb{N}$ – множество всех неотрицательных целых чисел. Пусть S – подсистемная подгруппа группы G, а V – G-модуль. Для группы G через $L(\mu)$ обозначается неприводимый модуль со старшим весом μ, а через $\Delta(\mu)$ – модуль Вейля с таким старшим весом. Ограничение веса ν G-модуля M на подгруппу $S \subset G$ обозначается через ν_S. Для весового вектора $v \in V$ обозначим через $\omega(v)$ и $\omega_S(v)$ его веса для групп G и S соответственно.

Упорядочим простые корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ так, чтобы $x_{\alpha_i}(t) = E + te_{i,i+1}$. Тогда

$$x_{\alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}}(t) = E + te_{i,j}$$

и

$$x_{-\alpha_i - \ldots - \alpha_{j-1}}(t) = E + te_{j,i},$$

где $1 \leqslant i < j \leqslant r+1$. Здесь E – единичная $(r+1) \times (r+1)$-матрица, а $e_{i,j}$ – это $(r+1) \times (r+1)$-матрица, в которой 1 стоит на ij-й позиции, а 0 в других местах. Система корней Φ группы G состоит из корней $\pm(\alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1})$, а множество положительных корней Φ^+ – из корней $\alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$, где $1 \leqslant i < j \leqslant r+1$.

Гипералгебра группы G строится следующим образом. Рассмотрим следующие элементы комплексной алгебры Ли $\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$: $X_{\alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}} = e_{i,j}$, $X_{-\alpha_i - \ldots - \alpha_{j-1}} = e_{j,i}$, где $1 \leqslant i < j \leqslant r+1$. Как в [5, теорема 2], обозначим через $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$ подкольцо универсальной обертывающей алгебры $\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$, порожденное $X_\alpha^k/k!$, где $\alpha \in \Phi$ и $k \in \mathbb{N}$. Гипералгебра группы G – это тензорное произведение $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$. Элементы

$X_{\alpha,k} = (X_\alpha^k/k!) \otimes 1_K$ порождают $\mathcal{U}$ как K-алгебру. Каждый рациональный G-модуль V можно превратить в U-модуль по правилу

$$x_\alpha(t)v = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k X_{\alpha,k} v.$$

Мы будем сокращенно писать $X_\alpha = X_{\alpha,1}$. Если $\alpha = \pm\alpha_i$, то используются обозначения $X_{\pm i,k}$, $x_{\pm i}(t)$ и $X_{\pm i}$.

Вектор $v \in V$ называется примитивным вектором относительно S, если v – ненулевой весовой вектор и $x_\alpha(t)$ оставляет на месте v для каждого положительного корня α из S.

Обозначим через $M(\mu)$ неразложимый G-модуль, порожденный вектором старшего веса μ. Это частное модуля $\Delta(\mu)$ [8, часть II, лемма 2.13(b)]. Зафиксируем вектор старшего веса v^+ в модуле $M(\mu)$. Напомним, что в характеристике 0 мы имеем $L(\mu) = M(\mu) = \Delta(\mu)$.

Пусть $M = M(\mu)$ с p-ограниченным весом $\mu = b_1\omega_1 + \ldots + b_r\omega_r$ и $1 \leqslant i, j \leqslant r$. Для целого числа d с $0 < d \leqslant b_j$ определим вектор $v(i,j,d)$ следующим образом. Положим $d_j = d$. Если $i < j$, то $d_k = b_k + d_{k+1}$ для $i \leqslant k < j$. Если $i > j$, то положим $d_k = b_k + d_{k-1}$ для $i \geqslant k > j$. Теперь положим

$$v(i,j,d) = X_{-i,d_i} \ldots X_{-k,d_k} \ldots X_{-j,d} v^+.$$

При $i = j$ положим $v(i,j,d) = X_{-i,d}v^+$. Тогда вектор $v(i,j,d)$ примитивен относительно подгруппы $G(1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,r)$ по [12, лемма 2.46]. Аналогично доказывается, что если вес μ не является p-ограниченным и $\mu - d\alpha_j$ является весом модуля M, то вектор $v(i,j,d)$ примитивен относительно $G(1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,r)$.

Лемма 1. *Пусть $r \geqslant 3$, $a_1 < p$ и $a_r < p$. Тогда*

$$T = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1, x_2 \leqslant m,\ x_1 + x_2 = m'\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$$

и для любого веса из T существует примитивный относительно H вектор такого веса.

Доказательство. Доказательство можно свести к случаю $r = 3$. Действительно, если $r > 3$, то положим $\Gamma = G(1, \alpha_2+\ldots+\alpha_{r-1}, r) \cong A_3(K)$. Тогда

$$M = K\Gamma v^+ = M(a_1\omega_1 + (a_2 + \ldots + a_{r-1})\omega_2 + a_r\omega_3)$$

является подмодулем в $M(\omega)|\Gamma$ и его старший вес удовлетворяет утверждению леммы.

Итак, пусть $r = 3$. Можно выбрать подгруппу

$$H = G(2) \times G(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

и веса $\mu = \omega - b_1\omega_1 - b_3\omega_3$ с $0 \leqslant b_1 \leqslant a_1$, $0 \leqslant b_3 \leqslant a_3$. Положим $v = X_{-1,b_1}X_{-3,b_3}v^+$. Вектор v отличен от нуля в силу [12, лемма 2.46]. Поскольку $X_2 v = 0$ и $X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}v = 0$, он примитивен относительно H. Вычисляя его вес, получаем искомое. □

Лемма 2. *Пусть* $r \geqslant 4$ *и* $a_i < p$ *при* $i \in \{1, r-1, r\}$. *Тогда* $S \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$, *где*

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 |\ m - a_1 - a_{r-1} - a_r \leqslant x_1, x_2 \leqslant m,\ m' - a_{r-1} - a_r \leqslant x_1 + x_2 \leqslant m'\}.$$

Доказательство. Если $r > 4$, то рассматривая ограничение представления на подгруппу $S = G(1, \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{r-2}, r-1, r)$, мы видим, что его неприводимый фактор со старшим весом $\omega_S(v^+) = a_1\omega_1 + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{r-2})\omega_2 + a_{r-1}\omega_3 + a_r\omega_4$ удовлетворяет условиям леммы.

Поэтому далее будем считать, что $r = 4$. Введем подгруппу $\Gamma = G(1, 2, 3)$ и векторы $w_f = X_{-4,f}v^+$ для $0 \leqslant f \leqslant a_4$. Тогда $\omega_\Gamma(w_f) = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + (a_3 + f)\omega_3$. Заметим, что возможно $a_3 + f \geqslant p$, но во всех случаях мы можем построить векторы $u_e = v(2, 1, e, w_f)$ для $0 \leqslant e \leqslant a_1$. Они примитивны относительно подгруппы $H = G(1) \times G(3)$ и $\omega_H(u_e) = (a_1 + a_2 - e, a_2 + a_3 + e + f)$.

Пусть $G_1 = G(3, 4)$. Поскольку $a_3 < p$, то применяя [11, теорема A(i)] к группе G_1 и модулю KG_1v^+, получаем, что $\Delta(a_3 + f) = KG(3)w_f$ для $0 \leqslant f \leqslant a_4$. Следовательно, мы можем построить векторы $v_d = v(2, 3, d, w_f)$ для $0 \leqslant d \leqslant a_3 + f$. Они примитивны относительно подгруппы H,

$$\omega(v_d) = \omega - (a_2 + d)\alpha_2 - d\alpha_3 - a\alpha_4 \ \text{ и } \ \omega_H(v_d) = (a_1 + a_2 + d, a_2 + a_3 - d + e).$$

Отсюда мы получаем множество S' такое, что

$$S' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_2 \leqslant x_1, x_2 \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\\ a_1 + 2a_2 + a_3 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4\}.$$

Теперь нам нужно получить множество T' такое, что

$$T' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid\ x_1, x_2 \leqslant a_2 + a_3 + a_4,\\ a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4\}.$$

В качестве H мы можем выбрать подгруппу

$$G(\alpha_2+\alpha_3)\times G(\alpha_1+\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4).$$

Возьмем вес $\mu=\omega-b_1\omega_1-b_3\omega_3-b_4\omega_4$, где $0\leqslant b_1\leqslant a_1$, $0\leqslant b_3\leqslant a_3$ и $0\leqslant b_4\leqslant a_4+b_3$. Тогда по теореме Премета–Супруненко [4, 6] об инвариантности систем весов неприводимых представлений алгебраических групп и алгебр Ли типа A_r с p-ограниченными старшими весами при редукции по модулю p, применяемой к группе $G(3,4)$ и модулю $L(\mu_{G(3,4)})$, существует ненулевой весовой вектор v веса μ. Имеем $\mu_H=(a_2+a_3+b_1-b_3+b_4, a_1+a_2+a_3+a_4-b_1-b_4)$. Любой весовой вектор веса μ будет примитивен относительно H. Отсюда следует $T'\subseteq \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$. Значит, $S=S'\cup T'\subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$. □

§3. Композиционные факторы с малыми старшими весами

Лемма 3. *Пусть $r\geqslant 7$ и вес ω является p-ограниченным. Тогда для $3\leqslant l\leqslant r-4$*

$$Z_l\subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H),$$

где

$$Z_l=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2 \mid x_1\leqslant a_1+\ldots+a_l,\ x_2\leqslant a_{l+2}+\ldots+a_r\}$$

и для любого веса из Z_l существует примитивный относительно H вектор такого веса.

Доказательство. Положим $H=G(1)\times G(r)$, $\Gamma_l=G(1,\ldots,l)$ $\times G(l+2,\ldots,r)$. Тогда вектор v^+ примитивен относительно Γ_l и

$$\omega_{\Gamma_l}(v^+)=(a_1\omega_1+\ldots+a_l\omega_l, a_{l+2}\omega_1+\ldots+a_r\omega_{r-l-1}).$$

Используя лемму 7 из [10], мы получаем искомое. □

Лемма 4. *Пусть $r\geqslant 5$ и вес ω является p-ограниченным. Тогда для $i=1$ и 2*

$$S_i\subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H),$$

где

$$S_1=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2 \mid\ x_1\leqslant m-a_1-a_{r-1}-a_r,\ m-a_r\leqslant x_2\leqslant m\}\ \text{и}$$

$$S_2=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2 \mid\ m-a_r\leqslant x_1\leqslant m,\ x_1\leqslant m-a_1-a_{r-1}-a_r\}.$$

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $r \geqslant 6$. Пусть $\Gamma = G(1, 2, \dots, r-1)$, $\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_{r-1}\omega_{r-1}$ и $H = G(1) \times G(r-1) \subset \Gamma$. Тогда $L = K\Gamma_1 v^+ = M(\lambda)$ является подмодулем ограничения $M(\omega)|\Gamma$. По лемме 8 из [10] существуют векторы $w_j \in M(\lambda)$, которые примитивны относительно H и

$$\omega_H(w_j) = (j, m - a_r),$$

$0 \leqslant j \leqslant a_2 + \ldots + a_{r-2}$. Кроме того, из этой леммы следует, что можно выбрать векторы w_j так, что $\omega_{G(r)}(w_j) = a_r$. Следовательно, $w'_j = X_{-r,a}w_j$ с $0 \leqslant a \leqslant a_r$ отличны от нуля и примитивны относительно H и

$$\omega_H(w'_j) = (j, m - a_r + a).$$

Следовательно, $S_1 \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$. По лемме 1 из [10] получаем, что $S_2 \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$.

2) Пусть $r = 5$. Положим $\Gamma' = G(1) \times G(3, 4, 5)$, $H = G(1) \times G(4)$ и $v_d = v(2, 5, d)$ с $0 \leqslant d \leqslant a_5$. Тогда

$$\omega_{\Gamma'}(v_d) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + d, a_2\omega_1 + a_3\omega_2 + (a_4 + a_5 - d)\omega_3).$$

Если $a_4 + a_5 - d < p$, то, применяя теорему 1.2 из [9], получаем

$$\omega_H(v_d) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + d, k),$$

где $0 \leqslant k \leqslant a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - d$. Для $a_4 + a_5 - d \geqslant p$, используя теоремы 1.2 и 1.3 из [9], получаем те же веса с $0 \leqslant k \leqslant a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - d - p$. Поскольку $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - d \geqslant a_2 + a_3$ и $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - d - p \geqslant a_2 + a_3$, в обоих случаях имеем $S_2 \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$. Из леммы 1 из [10] следует, что $S_1 \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$. □

Следствие 1. *Пусть $r \geqslant 5$ и вес ω является p-ограниченным. Тогда*

$$S(\omega) \setminus M \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H),$$

где

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1, x_2 < m - a_r,\ x_1 + x_2 < m' - a_{r-1} - a_r\}.$$

Доказательство. Применяя леммы 2 и 4, получаем, что $S_1 \cup S_2 \cup S = S(\omega) \setminus M \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$. □

Следствие 2. *Пусть $r \geqslant 5$ и вес ω является p-ограниченным. Тогда для любого j, $1 \leqslant j \leqslant r - 3$,*

$$S(\omega) \setminus N \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$$

при

$$N = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1, x_2 < a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + a_{j+3},\\ x_1 + x_2 < a_j + 2a_{j+1} + 2a_{j+2} + a_{j+3}\}.$$

Доказательство. Получается из следствия 1 индукцией по $r \geqslant 5$. $\square$

§4. Доказательство теоремы 1

Лемма 5. *Пусть* $r = 5$, *вес* ω *является* p*-ограниченным и* k *равно* 1 *или* 3. *Тогда*

$$S(\omega) \setminus M' \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H),$$

где

$$M' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1, x_2 < a_k + a_{k+1} + a_{k+2},\\ x_1 + x_2 < a_k + 2a_{k+1} + a_{k+2}\}.$$

Доказательство. По следствию 1, $S(\omega) \setminus M \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$, где

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1, x_2 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\\ x_1 + x_2 < a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4\}.$$

Используя лемму 2 при $r = 4$, получаем, что $N' \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$ при

$$N' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \ a_{k+1} \leqslant x_1, x_2 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\\ a_k + 2a_{k+1} + a_{k+2} \leqslant x_1 + x_2 < a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4\}.$$

Положим $\Gamma = G(1) \times G(3, 4, 5)$, $H = G(1) \times G(4) \subset \Gamma$ и $v_d = v(2, 4, d)$ при $0 \leqslant d \leqslant a_4$. Тогда

$$\omega_\Gamma(v_d) = (a_1 + a_2 + a_3 + d, a_2\omega_1 + (a_3 + a_4 - d)\omega_2 + (a_5 + d)\omega_3).$$

Если $a_3 + a_4 - d < p$ и $a_5 + d < p$, то, применяя теорему 1.2 из [9], получаем веса

$$\omega_H(v_d) = (a_1 + a_2 + a_3 + d, k)$$

при $0 \leqslant k \leqslant a_2 + a_3 + a_4 + a_5$. Для $a_3 + a_4 - d \geqslant p$ и $a_5 + d < p$ или $a_3 + a_4 - d < p$ и $a_5 + d \geqslant p$, используя теоремы 1.2 и 1.3 из [9], получаем те же веса с $0 \leqslant k \leqslant a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - p$. Для $a_3 + a_4 - d \geqslant p$ и $a_5 + d \geqslant p$ из тех же теорем вытекает, что $0 \leqslant k \leqslant a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 2p$. Во всех случаях есть $0 \leqslant k \leqslant a_2$. Следовательно,

$$\mathrm{Irr}(M(\omega)|H) \supset M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_1 + a_2 + a_3\\ \leqslant x_1 \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4, x_2 \leqslant a_2\}.$$

По лемме 1 из [10],

$$\operatorname{Irr}(M(\omega)|H) \supset M_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \ x_1 \leqslant a_2,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 \leqslant x_2 \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4\}.$$

Теперь $M \cup N' \cup M_1 \cup M_2 = S(\omega) \setminus M' \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$. □

Следствие 3. *Пусть $r \geqslant 6$ и вес ω является p-ограниченным. Тогда для любого k, $1 \leqslant k \leqslant r-2$,*

$$S(\omega) \setminus M' \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H),$$

где

$$M' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1, x_2 < a_k + a_{k+1} + a_{k+2},$$
$$x_1 + x_2 < a_k + 2a_{k+1} + a_{k+2}\}.$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 5 и следствия 2. □

Доказательство теоремы 1. Утверждение вытекает из следствия 3 и леммы 3. □

Для некоторых типов представлений можно определить их ограничения при малых r. Положим $\omega_0 = \omega_{r+1} = 0$. Для $0 \leqslant l \leqslant (r+1)(p-1)$ обозначим через Φ_l^r l-ю *усеченную симметрическую степень* стандартного модуля для группы G (см. [2]). Тогда $\Phi_l^r = L(\omega)$ для $\omega = (p-1-a_{i+1})\omega_i + a_{i+1}\omega_{i+1}$, где $0 \leqslant a_{i+1} < p-1$, $l = (p-1)i + a_{i+1}$ [2, предложение 1.2]. Обозначим через ω^* старший вес модуля, дуального к $L(\omega)$, т.е. $\omega^* = a_r\omega_1 + a_{r-1}\omega_2 + \ldots + a_1\omega_r$.

Пусть $G_{\mathbb{C}} = SL_{r+1}(\mathbb{C})$, $H_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$ – подсистемная подгруппа типа $A_1 \times A_1$, и пусть $L(\omega)_{\mathbb{C}}$ – неприводимый модуль над $G_{\mathbb{C}}$ со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$. Напомним, что по теореме 3 из [10] при $r = 3$

$$\operatorname{Irr}(L(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}) = \{(x_1, x_2) \in S(\omega) \mid |a_1 - a_3| \leqslant x_1 + x_2,$$
$$|x_1 - x_2| \leqslant a_1 + a_3, \ x_1 + x_2 \equiv a_1 - a_3 (\operatorname{mod} 2)\},$$

и для $r > 3$

$$\operatorname{Irr}(L(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}) = S(\omega).$$

Предложение 1. *Пусть $r \geqslant 3$, $L(\omega)$ – усеченная симметрическая степень стандартного модуля. Если ω или $\omega^* = (p-1-a_2)\omega_1 + a_2\omega_2$, $0 < a_2 < p-1$, то при $r = 3$*

$$\operatorname{Irr}(L(\omega)|H) = \{(x_1, x_2) \in S(\omega) \mid x_1 + x_2 = p-1+a_2 \ \text{или} \ |x_1 - x_2| = p-1-a_2\},$$

а при $r = 4$

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \{(x_1, x_2) \in S(\omega) \mid x_1 + x_2 \geqslant a_2 \text{ или } |x_1 - x_2| \geqslant p-1-a_2\}.$$

Если $r = 4$ *и* $\omega = (p - 1 - a_3)\omega_2 + a_3\omega_3$ *с* $0 < a_3 < p - 1$, *то*

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \{(x_1, x_2) \in S(\omega) \mid |x_1 - x_2| \leqslant \max(a_3, p - 1 - a_3)\}.$$

Во всех остальных случаях

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \mathrm{Irr}(L(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}).$$

Доказательство. Используя [2, следствие 1.5], заключаем, что при $L(\omega) = \Phi_l^r$

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|G(1, 2, 3)) = \{\Phi_s^3 \mid \max(0, l-(p-1)(r-3)) \leqslant s \leqslant \min(l, 4(-1))\}. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим $G = A_3(K)$ и $H = G(1) \times G(3)$. Применяя [2, предложение 1.4], мы можем представить $\Phi_s^3|H$ в виде прямой суммы модулей $\Phi_c^1 \otimes \Phi_d^1$ и определить, какие пары индексов (c, d) присутствуют. Отсюда следует, что если $L(\omega) = \Phi_s^3$, то

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \{\Phi_c^1 \otimes \Phi_d^1 \mid c+d = s,\ s-(p-1)(r-1) \leqslant c, d \leqslant 2(p-1)\}. \tag{3}$$

Рассмотрим три случая: 1) $\omega = a_1\omega_1$ и $a_1 > 0$; 2) $\omega = (p-1-a_2)\omega_1+a_2\omega_2$ и $0 < a_2 < p-1$; и 3) $\omega = (p-1-a_{i+1})\omega_i+a_{i+1}\omega_{i+1}$ с $1 < i < r-1$ и $0 \leqslant a_{i+1} < p-1$. Все остальные случаи можно свести к этим, рассматривая дуальный модуль и используя лемму 1 из [10].

1) Если $\omega = a_1\omega_1$ и $a_1 > 0$, то для $r = 3$, применяя формулу (3), получаем

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 = a_1\}.$$

По теореме 3 из [10] это множество равно $\mathrm{Irr}(L(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}})$. Используя теперь формулу (2) для $r > 3$, получаем

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|G(1, 2, 3)) = \{b\omega_1, 0 \leqslant b \leqslant a_1\}$$

и

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant a_1\} = S(\omega).$$

2) Пусть $\omega = (p - 1 - a_2)\omega_1 + a_2\omega_2$ и $0 < a_2 < p - 1$. Если $r = 3$, то из формулы (3) следует

$$\begin{aligned}\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = &\{(x_1, x_2) \in S(\omega) \mid x_1 + x_2 \\ &= p - 1 + a_2 \text{ или } |x_1 - x_2| = p - 1 - a_2\}.\end{aligned}$$

Для $r = 4$ формула (2) дает

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|G(1,2,3)) = \{b\omega_1, (p-1-c)\omega_1 + c\omega_2, a_2 \leqslant b \leqslant p-1, 1 \leqslant c \leqslant a_2\}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \{(x_1, x_2) \in S(\omega) \mid x_1 + x_2 \geqslant a_2 \text{ или } |x_1 - x_2| \geqslant p-1-a_2\}.$$

Для $r > 4$ из этой же формулы следует $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = S(\omega)$, поскольку в этом случае $0 \leqslant b \leqslant p-1$.

3) Наконец, предположим, что $\omega = (p-1-a_{i+1})\omega_i + a_{i+1}\omega_{i+1}$ с $1 < i < r-1$ и $0 \leqslant a_{i+1} < p-1$. Если $r = 3$, то $\omega = (p-1)\omega_2$. Из формулы (3) получаем

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant p-1,\ x_1 = x_2\} = \mathrm{Irr}(L(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}).$$

Для $r = 4$ из формулы (2) следует, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Irr}(L(\omega)|G(1,2,3))7 = \{&(p-1-b)\omega_1 + b\omega_2, (p-1-c)\omega_2 \\ &+ c\omega_3, a_3 \leqslant b \leqslant p-1, 1 \leqslant c \leqslant a_3\}.\end{aligned}$$

Из приведенных выше результатов для $r = 3$ следует, что

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \{(x_1, x_2) \in S(\omega) \mid |x_1 - x_2| \leqslant \max(a_3, p-1-a_3)\}.$$

В частности, $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = \mathrm{Irr}(L(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}})$ для $\omega = (p-1)\omega_2$. Наконец, для $r > 4$ имеем $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = S(\omega)$. Это завершает доказательство. $\square$

Список литературы

1. Т. М. Железная, *Об ограничениях неприводимых представлений алгебраических групп типа A_n в характеристике 0 на подгруппы типа $A_1 \times A_1$*. — Труды Института математики, **15**, No. 1 (2007), 56–67.
2. А. Е. Залесский, И. Д. Супруненко, *Усеченные симметрические степени естественных реализаций групп $SL_m(P)$ и $Sp_m(P)$ и их ограничения на подгруппы*. — Сибирский математический журнал, **31**, No. 4 (1990), 33–46.
3. А. А. Осиновская, *Ограничения модулярных представлений специальных линейных групп на подгруппы типа $A_1 \times A_1$*. — Сибирский математический журнал, **51**, No. 5 (2010), 1120–1128
4. А. А. Премет, *Веса инфинитезимально неприводимых представлений над полем простой характеристики*. — Матем. сборник **133**, No. 2 (1987), 167–183.
5. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*. М.: Мир (1975).
6. И. Д. Супруненко, *Сохранение систем весов неприводимых представлений алгебраической группы и алгебры Ли типа A_l с ограниченными весами при редукции по модулю p*. — Изв. АН БССР, серия физ.-мат. наук, No. 2 (1983), 18–22.

7. J. Brundan, A. S. Kleshchev, I. D. Suprunenko, *Semisimple restrictions from $GL(n)$ to $GL(n-1)$.* — J. für die reine und angew. Math., **500** (1998), 83–112.
8. J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups. Second edition.* — Amer. Math. Soc., Providence (2003).
9. A. A. Osinovskaya, *Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root A_1-subgroups.* — Commun. in Algebra, **31** (2003), 2357–2379.
10. A. A. Osinovskaya, *The restrictions of representations of special linear groups to subsystem subgroups of type $A_1 \times A_1$.* — Труды Института математики, **29**, No. 1–2 (2021), 175–187.
11. V. Shchigolev, *Weyl submodules in restrictions of simple modules.* — J. Algebra, **321** (2009), 1453–1462.
12. I. D. Suprunenko, *The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic.* — Memoirs of the AMS, **200**, No. 939 (2009).

Osinovskaya A. A. Composition factors of the restrictions of modular representations of $SL_{r+1}(K)$ to semisimple subgroups.

The restrictions of irreducible representations of the special linear group over an algebraically closed field of positive characteristic p to subsystem subgroups of type $A_1 \times A_1$ are studied. Under some minor restrictions on a group rank, the composition factors for such restrictions are described.

Институт математики НАН Беларуси
ул. Сурганова 11, 220072, Минск, Беларусь
E-mail: anna@im.bas-net.by

Поступило 11 марта 2023 г.