Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 522, 2023 г.

В. В. Нестеров

ИЗВЛЕЧЕНИЕ МАЛОРАНГОВЫХ УНИПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В $\mathrm{SO}(2\ell, K)$

§1. Введение

Данная работа продолжает серию работ, посвященных геометрии микровесовых торов в расширенных группах Шевалле [5, 8, 9, 12]. Общий контекст, перспективы этого направления и основные ожидаемые результаты обрисованы в обзорной статье [7] и во введении работы [8].

В настоящей статье мы доказываем, что подгруппа, порожденная парой микровесовых торов, соответствующих микровесу $\overline{\omega}_1$, в расширенной группе Шевалле типа D_ℓ содержит маленькие унипотентные элементы. В стандартном представлении группы Шевалле типа D_ℓ таким микровесовым тором является группа, сопряженная с подгруппой

$$\big\{ \mathrm{diag}(\varepsilon, 1, \ldots, 1, \varepsilon^{-1}),\ \varepsilon \in K^* \big\}.$$

Сама группа Шевалле совпадает со специальной ортогональной группой $\mathrm{SO}(2\ell, K)$ с квадратичной формой $Q(x) = x_1x_{2\ell} + x_2x_{2\ell-1} + \cdots + x_\ell x_{\ell+1}$.

Более точно, основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X и Y – два некоммутирующих микровесовых тора типа $\overline{\omega}_1$ в группе $\mathrm{SO}(2\ell, K)$, являющейся расширением группы Шевалле типа D_ℓ. Предположим, что поле K содержит по крайней мере 19 элементов. Тогда подгруппа $\langle X, Y\rangle$, порождённая группами X и Y, содержит однопараметрическую подгруппу унипотетных элементов, сопряженную группе*

$$\{x_\alpha(\varepsilon)x_\beta(\zeta\varepsilon),\ \varepsilon \in K\},$$

где α и β – ортогональные корни системы корней типа D_3 и $\zeta \in K$ – некоторый фиксированный элемент.

Ключевые слова: группы Шевалле, ортогональные группы, микровесовые торы, унипотентные элементы.

Данный результат следует из работы [9], в которой подобная теорема была доказана для группы $\mathrm{GL}(4, K)$. Действительно, как показано в §3 настоящей работы, произвольная пара микровесовых торов в $\mathrm{SO}(2\ell, K)$ вкладывается одновременным сопряжением в группу $\mathrm{SO}(6, K)$. Поскольку системы корней D_3 и A_3 изоморфны, группы $\mathrm{SO}(6, K)$ и $\mathrm{GL}(4, K)$ устроены одинаково с точностью до диагональных элементов. Но диагональные элементы коммутируют с торами, поэтому не влияют на вычисление по извлечению унипотентов. Аккуратное доказательство этого содержится в §4.

В завершение введения заметим, что впервые вопрос об извлечении унипотентных элементов появился в работах З. И. Боревича и Н. А. Вавилова [1, 2] при описании подгрупп $\mathrm{GL}(n, K)$, содержащих группу диагональных матриц. В дальнейшем эта идея оказалась ключевой при описании подгрупп групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор, см. [4]. Данная задача имеет также большое значение при описании подгрупп, порождённых полупростыми элементами, поскольку сводит задачу к описанию подгрупп, порождённых унипотентными элементами, которое хорошо известно.

§2. Обозначения

Напомним некоторые обозначения и определения, связанные с группами Шевалле. Пусть Φ – система корней типа D_ℓ в ℓ-мерном евклидовом пространстве E. $(\ , \ )$ обозначает скалярное произведение. $Q(\Phi)$ обозначает решётку корней, порождённую всеми $\alpha \in \Phi$. Далее, $P(\Phi)$ обозначает решётку весов, состоящую из векторов $\omega \in E$ таких, что число Картана $\langle \omega, \alpha \rangle = 2(\omega, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Phi$. Пусть P – решётка, лежащая между $Q(\Phi)$ и $P(\Phi)$, тогда $G = G_P(\mathrm{D}_\ell, K)$ – группа Шевалле типа D_ℓ, построенная по P над K.

Для корня $\alpha \in \Phi$ и $t \in K$ через $x_\alpha(t)$ мы обозначаем соответствующий элементарный корневой унипотентный элемент в G. Для фиксированного α положим $X_\alpha = \{x_\alpha(t),\ t \in K\}$, элементарная корневая унипотентная подгруппа.

Далее, для $\alpha \in \Phi$ и $t \in K^*$, пусть $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$ и $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$.

Теперь зафиксируем порядок на Φ. Пусть $B = B(\Phi, K)$ – борелевская подгруппа, соответствующая выбранному порядку. Тогда Φ^+, Φ^- обозначают множества положительных и отрицательных корней, соответственно. Введём подгруппы U, V, H и N группы G:

$$U = U(\Phi, K) = \langle x_\alpha(t),\ \alpha \in \Phi^+,\ t \in K\rangle,$$
$$V = V(\Phi, K) = \langle x_\alpha(t),\ \alpha \in \Phi^-,\ t \in K\rangle,$$
$$H = H(\Phi, K) = \langle h_\alpha(t),\ \alpha \in \Phi,\ t \in K^*\rangle,$$
$$N = N(\Phi, K) = \langle w_\alpha(t),\ \alpha \in \Phi,\ t \in K^*\rangle.$$

Фактор-группа N/H канонически изоморфна группе Вейля $W = W(\Phi)$ системы корней Φ. Поэтому каждый элемент группы Вейля w соответствует своему прообразу $n_w \in N/H$. Обычно мы отождествляем w и n_w и пишем просто w вместо n_w.

Основным соотношением в группах Шевалле является комутационная формула Шевалле:

$$[x_\alpha(t), x_\beta(s)] = \prod x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij} t^i s^j),$$

где произведение берётся по всем корням вида $i\alpha + j\beta$ с положительными целыми i, j, элемент $N_{\alpha\beta ij} \in K$ не зависит от t, s [11, глава 4].

Также мы используем следующие формулы:

$$w_\alpha x_\beta(t) w_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha\beta}(\pm t),$$
$$h_\alpha(s) x_\beta(t) h_\alpha(s)^{-1} = x_\beta(s^{\langle\beta,\alpha\rangle} t),$$

где $\alpha, \beta \in \Phi$.

Каждый элемент $u \in U$ может быть записан в виде $u = \prod x_\alpha(c_\alpha)$, причём произведение берётся в любом фиксированном порядке. Через $\mathrm{Sup}(u) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid c_\alpha \neq 0\}$ обозначим носитель элемента u, т.е. множество корней, соответствующих ненулевым коэффициентам в разложении u.

Зафиксируем некоторый вес $\omega \in P$. Тогда элементарный весовой элемент $h_\omega(t)$, $t \in K^*$, можно определить как элемент, сопряжением с которым реализуется диагональный автоморфизм группы Шевалле, т.е.

$$h_\omega(s) x_\alpha(t) h_\omega(s)^{-1} = x_\alpha(s^{\langle\omega,\alpha\rangle} t),$$

для всех $\alpha \in \Phi$, $t \in K$. Из этой формулы следует, что $h_\omega(t)$ коммутирует со всеми $h_\alpha(t)$.

В этой работе мы имеем дело только со случаем, когда $\omega = \overline{\omega}_1$ является первым фундаментальным весом. Фундаментальные веса образуют базис E, дуальный базису простых корней.

В случае системы корней типа D_ℓ фундаментальные веса $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_{\ell-1}$ и $\overline{\omega}_\ell$ являются микровесами (см. [3, 6]). При этом соответствующие элементы $h_\omega(t)$ имеют наиболее ясную структуру. Для краткости мы положим $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1$.

Назовём элемент $h \in G$ микровесовым элементом, соответствующим фундаментальному весу ω, если он сопряжён элементу $h_{\overline{\omega}}(\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon \in K^*$. Тогда $H_{\overline{\omega}} = \{h_{\overline{\omega}}(\varepsilon),\ \varepsilon \in K^*\}$ называется элементарным микровесовым тором. И для $g \in G$ группа $gH_{\overline{\omega}}g^{-1}$ называется микровесовым тором.

Обычное 2ℓ-мерное представление, соответствующее первому фундаментальному весу, даёт специальную ортогональную группу $\mathrm{SO}(2\ell, K)$. Эта группа порождается всеми X_α, $\alpha \in \Phi$ и $H_{\overline{\omega}}$. Обозначим через $\overline{H} = \overline{H}(\Phi, K)$ расщепимый максимальный тор $\mathrm{SO}(2\ell, K)$.

Напомним, что подмножество корней $S \subset \Phi$ называется *замкнутым*, если из того, что $\alpha+\beta \in \Phi$, где α, $\beta \in S$, следует, что $\alpha+\beta \in S$. Для замкнутого множества корней S, мы положим $E(S) = \langle X_\alpha \mid \alpha \in S\rangle$.

В стандартной реализации систем корней D_ℓ (см. [3]) мы имеем:

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j\}, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant \ell,$$
$$\overline{\omega}_1 = e_1.$$

Здесь e_i обозначают канонический базис евклидова пространства E. Знаки $\pm$ выбираются независимо друг от друга. В дальнейшем, когда не возникает двусмысленности, мы будем просто писать $\pm i \pm j$ для обозначения соответствующих корней.

Приведём матричное представление группы $G(\mathrm{D}_3, K)$. Пусть V – 6-мерное векторное пространство, и пусть Q – квадратичная форма, определённая на V. Выберем базис V такой, что $Q(x) = x_1x_{-1} + x_2x_{-2} + x_3x_{-3}$. Тогда присоединённая группа Шевалле $G_Q(\mathrm{D}_3, K)$ изоморфна коммутанту ортогональной группы $\Omega_6(K, Q)$.

Занумеруем строки и столбцы матриц из $\Omega_6(K, Q)$ следующим образом: 1, 2, 3, -3, -2, -1. Далее, обозначим через $e_{i,j}$, $-3 \leqslant i, j \leqslant 3$, $i, j \neq 0$, матричную единицу, т.е. матрицу, у которой нули стоят во всех позициях, кроме позиции (i, j). В этой позиции коэффициент равен 1. Пусть I – тождественная матрица, и пусть $0 < i < j$. Тогда элементарным корневым элементам и некоторым весовым элементам группы $G(\mathrm{D}_3, K)$ соответствуют следующие матрицы:

$$x_{i-j}(\varepsilon) = I + \varepsilon(e_{i,j} - e_{-j,-i}),$$

$$x_{j-i}(\varepsilon) = I + \varepsilon(e_{j,i} - e_{-i,-j}),$$

$$x_{i+j}(\varepsilon) = I + \varepsilon(e_{i,-j} - e_{j,-i}),$$

$$x_{-i-j}(\varepsilon) = I + \varepsilon(e_{-j,i} - e_{-i,j}),$$

$$h_i(\varepsilon) = I + (\varepsilon - 1)e_{i,i} - (\varepsilon^{-1} - 1)e_{-i,-i}.$$

Положим $H_i = \{h_i(\varepsilon),\ \varepsilon \in K^*\}$. Заметим, что $h_{\overline{\varpi}}(\varepsilon) = h_1(\varepsilon)$, $H_{\overline{\varpi}} = H_1$.

§3. Редукция к $\mathrm{SO}(6, K)$

В этом параграфе мы покажем, что любая пара микровесовых торов в $\mathrm{SO}(2\ell, K)$ вкладывается одновременным сопряжением в $\mathrm{SO}(6, K)$. Конечно, для редуктивной части подгруппы, порождённой парой микровесовых торов, данный результат следует из результатов по разложению Брюа микровесовых элементов [6]. Но мы дадим независимое доказательство, которое описывает также и унипотентную часть.

Положим $\Sigma_{\overline{\varpi}} = \{\alpha \in \Phi^+ | (\alpha, \overline{\varpi}) > 0\}$. При стандартной реализации корней это множество совпадает с $\{e_1 \pm e_i,\ 2 \leqslant i \leqslant \ell\}$. Множество $\Sigma_{\overline{\varpi}}$ является замкнутым абелевым множеством корней. Также обозначим через $\overline{\Sigma}_{\overline{\varpi}} = \Phi \setminus \{\Sigma_{\overline{\varpi}} \cup (-\Sigma_{\overline{\varpi}})\}$. Корни $\overline{\Sigma}_{\overline{\varpi}}$ порождают подсистему корней типа $\mathrm{D}_{\ell-1}$.

В доказательстве следующей теоремы мы будем иметь дело с абелевой группой $E(\Sigma_{\overline{\varpi}})$ и группой $E(\overline{\Sigma}_{\overline{\varpi}})$. Легко видно, что $E(\overline{\Sigma}_{\overline{\varpi}})$ нормализует $E(\Sigma_{\overline{\varpi}})$.

Теорема 2. *Пусть X и Y – пара микровесовых торов типа $\overline{\varpi}_1$ в $G = \mathrm{SO}(2\ell, K)$. Тогда существует элемент $g \in \mathrm{SO}(2\ell, K)$ такой, что $gXg^{-1} = X_0$ и либо $gYg^{-1} = Y_1$, либо $gYg^{-1} = Y_2$, где*

$$X_0 = \{h_1(\varepsilon)x_{1-2}(\theta_1(\varepsilon^{-1} - 1))x_{1+2}(\theta_2(\varepsilon^{-1} - 1))x_{1-3}(\theta_3(\varepsilon^{-1} - 1)) \times x_{1+3}(\theta_4(\varepsilon^{-1} - 1)), \varepsilon \in K^*\},$$

$$Y_1 = \{h_1(\eta)x_{-1+2}(\delta_1(\eta^{-1} - 1))x_{-1-2}(\delta_2(\eta^{-1} - 1)),\ \eta \in K^*\},$$

$$Y_2 = \{h_2(\eta)x_{-1+2}(\delta_3(\eta^{-1} - 1)),\ \eta \in K^*\},$$

и θ_i, $\delta_k \in K$, $i = 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2, 3$.

Доказательство. Предположим, что $X = g_1 H_{\varpi} g_1^{-1}$, $Y = g_2 H_{\varpi} g_2^{-1}$ для некоторых $g_1, g_2 \in G$. Следовательно, пара подгрупп (X, Y) сопряжена паре $(H_{\varpi}, g_1^{-1} g_2 H_{\varpi} g_2^{-1} g_1)$.

Приведенное разложение Брюа показывает, что $g_1^{-1} g_2 = uhwv$, где $u \in U$, $h \in \overline{H}$, $w \in W$, и $v \in U_w^- = U \cap w^{-1} V w$. Поэтому пара $(H_{\varpi}, g_1^{-1} g_2 H_{\varpi} g_2^{-1} g_1)$ сопряжена с

$$(u^{-1} h^{-1} H_{\varpi} h u, wv H_{\varpi} v^{-1} w^{-1}).$$

Из леммы 17 [10] следует, что элементы u и v можно записать в виде $u = u_1 u_2$, $v = v_1 v_2$, где u_2 и v_2 коммутируют с H_{ϖ}. При этом

$$u_1 = \prod_{\alpha \in \Sigma_{\varpi}} x_{\alpha}(t_{\alpha}) = \prod_i x_{1 \pm i}(t_{\pm i}), \quad v_1 = \prod_{\beta \in \Sigma_{\varpi}} x_{\beta}(s_{\beta}) = \prod_j x_{1 \pm j}(s_{\pm j}),$$

где t_{α}, $s_{\beta} \in K$.

Учитывая, что элементы h нормализуют H_{ϖ}, мы приходим к паре

$$(u_1^{-1} H_{\varpi} u_1, wv_1 H_{\varpi} v_1^{-1} w^{-1}).$$

Случай, когда $u_1 = v_1 = 1$ тривиальный. При этом, если $wH_{\varpi}w^{-1} \neq H_{\varpi}$, то дополнительным сопряжением с помощью элемента w' группы Вейля можно получить $w' w H_{\varpi} w^{-1} w'^{-1} = H_2$.

Случай с $u_1 = 1$, $v_1 \neq 1$ приводится к случаю $u_1 \neq 1$, $v_1 = 1$. Следовательно, мы можем считать, что $u_1 \neq 1$.

Ясно, что в случае $\ell = 2$ доказывать нечего. Поэтому с этого момента будем считать $\ell > 2$.

Теперь рассмотрим четыре случая в зависимости от образа $w(e_1)$.

Пусть $w(e_1) = e_1$. Тогда $w\Sigma_{\varpi} \cap \Phi^- = \emptyset$ и $U_w^- = 1$. Следовательно, $v_1 = 1$ и $wvH_{\varpi}v^{-1}w^{-1} = H_{\varpi}$. Предположим, что $\alpha_0 \in \mathrm{Sup}(u_1)$ является наименьшим корнем в множестве $\mathrm{Sup}(u_1)$. Тогда существует элемент группы Вейля $w' \in W$ такой, что $w'(\alpha_0) = \alpha' = e_1 - e_2$.

Далее, заметим, что w' нормализует Σ_{ϖ}, т.е. $w'\Sigma_{\varpi} = \Sigma_{\varpi}$. Теперь сопряжем одновременно нашу пару подгрупп элементом w'. Следовательно, можем считать, что в разложении u_1 коэффициент $t_{\alpha'} \neq 0$.

Для каждого корня $\alpha \in \mathrm{Sup}(u_1) \setminus \{\alpha'\}$ в силу коммутационной формулы Шевалле имеем

$$x_{\alpha-\alpha'}(c) x_{\alpha}(t_{\alpha}) x_{\alpha'}(t_{\alpha'}) x_{\alpha-\alpha'}(-c) = x_{\alpha}(t_{\alpha} \pm c t_{\alpha'}) x_{\alpha'}(t_{\alpha'}).$$

Таким образом, подбирая соответствующее $c \in K$, мы можем при помощи сопряжений элементами $x_{\alpha-\alpha'}(c)$ избавиться от всех $x_{\alpha}(t_{\alpha})$ в разложении u_1, когда $\alpha \in \mathrm{Sup}(u_1) \setminus \{e_1 \pm e_2\}$. Поскольку $(\alpha - \alpha', \overline{\omega}) = 0$

и $x_{\alpha-\alpha'}(c)$ коммутирует с элементами $H_{\overline{\omega}}$, мы получаем пару $(X_0, H_{\overline{\omega}})$, где $\theta_3 = \theta_4 = 0$.

Предположим теперь, что $w(e_1) = -e_1$. Тогда $w\Sigma_{\overline{\omega}} \cap \Phi^- = \{-e_1 \pm e_i,\ 2 \leqslant i \leqslant \ell\}$, при этом $\mathrm{Sup}(wv_1w^{-1}) \subset w\Sigma_{\overline{\omega}} \cap \Phi^-$.

Пусть β_0 – наибольший корень в $\mathrm{Sup}(wv_1w^{-1})$. Существует $w' \in W$ такой, что $w'(\beta_0) = \beta' = -e_1 + e_2$. Вычисляем

$$\begin{aligned}
&w'u_1^{-1}H_{\overline{\omega}}u_1w'^{-1} = \overline{u}_1^{-1}H_{\overline{\omega}}\overline{u}_1,\\
&w'wv_1H_{\overline{\omega}}v_1^{-1}w^{-1}w'^{-1} = w'\prod_{i\geqslant 2}x_{-1\pm i}(s_i)H_{\overline{\omega}}\prod_{i\geqslant 2}x_{-1\pm i}(-s_i)w'^{-1}\\
&\quad = x_{-1+2}(\delta_1)x_{-1-2}(\delta_2)\prod_{j\geqslant 3}x_{-1\pm j}(s'_j)\\
&\qquad\qquad \times H_{\overline{\omega}}\prod_{j\geqslant 3}x_{-1\pm j}(-s'_j)x_{-1-2}(-\delta_2)x_{-1+2}(-\delta_1),
\end{aligned}$$

где $\delta_1 \neq 0$ и $\overline{u}_1 \in E(\Sigma_{\overline{\omega}})$.

Действуя одновременным сопряжением элементами вида $x_{\beta-\beta'}(c_\beta)$, когда $\beta \in \mathrm{Sup}(w'wv_1w^{-1}w'^{-1}) \setminus \{-e_1 \pm e_2\}$ и, выбирая подходящие c_β, как и в предыдущем случае, избавимся от $x_\beta(s_\beta)$. В то же время $u'_1 = \prod\limits_{\beta} x_{\beta-\beta'}(c_\beta)\overline{u}_1 \prod\limits_{\beta} x_{\beta-\beta'}(-c_\beta) \in E(\Sigma_{\overline{\omega}})$.

Запишем разложение $u'_1 = \prod\limits_{\alpha\in\Sigma_{\overline{\omega}}} x_\alpha(t'_\alpha)$. Теперь, выберем наименьший корень α_0 из $\mathrm{Sup}(u'_1) \setminus \{e_1 \pm e_2\}$. Сопряжём пару подгрупп таким элементом $w'' \in W$, что $w''(\alpha_0) = e_1 - e_3$. При этом элементы второй группы переходят в себя с точностью до знаков при коэффициентах корневых унипотентных элементов. В результате имеем

$$w''{u'_1}^{-1}H_{\overline{\omega}}u'_1w''^{-1} = u_0\prod_{k\geqslant 4}x_{1\pm k}(t'_k)H_{\overline{\omega}}\prod_{k\geqslant 4}x_{1\pm k}(t'_k)u_0^{-1},$$

где $u_0 = x_{1-2}(\theta_1)x_{1+2}(\theta_2)x_{1-3}(\theta_3)x_{1+3}(\theta_4)$, $\theta_3 \neq 0$.

Окончательно, избавимся от $x_{1\pm k}(t'_k)$, $k \geqslant 4$, сопрягая элементами вида $x_{3\pm k}(c_k)$ с подходящим c_k.

Предположим, что $w(e_1) = -e_k$, $k > 1$. В этом случае

$$w\Sigma_{\overline{\omega}} \cap \Phi^- = \{-e_k + e_j, k < j \leqslant \ell, -e_k - e_j, 1 \leqslant j \leqslant \ell\}.$$

Представим $wv_1w^{-1} = v_2v_3$, где

$$\mathrm{Sup}(v_2) \subset \{-e_k + e_j, k < j \leqslant \ell, -e_k - e_j, 1 < j \leqslant \ell\},\quad \mathrm{Sup}(v_3) \subset \{-e_1 - e_k\}.$$

Сопряжём рассматриваемую пару подгрупп элементом v_2^{-1}. Мы имеем

$$v_2^{-1}u_1^{-1}H_{\overline{\varpi}}u_1v_2 = \overline{u}_1H_{\overline{\varpi}}\overline{u}_1^{-1},$$
$$v_3w^{-1}H_{\overline{\varpi}}wv_3^{-1} = x_{-1-k}(d_2)H_2x_{-1-2}(-d_2),$$

где $\overline{u}_1 \in E(\Sigma_{\overline{\varpi}})$.

Теперь сопряжём элементом $w' \in W$ таким, что $w'(-e_k) = e_2$. Далее мы действуем аналогичным образом, как и раньше.

Случай, когда $w(e_1) = e_k$, $k > 1$, полностью аналогичен случаю, где $w(e_1) = -e_k$.

Таким образом, доказательство теоремы полностью завершено. □

В следующем следствии мы отождествляем специальные ортогональные группы различных степеней посредством вложения. Другими словами, для $m \leqslant n$, положим

$$\mathrm{SO}(m,K) \longrightarrow \mathrm{SO}(n,K), \qquad g \mapsto g \oplus e = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

где e обозначает единичную матрицу порядка $n-m$.

Следствие 1. *Пусть X и Y – пара микровесовых торов типа $\overline{\varpi}_1$ в $\mathrm{SO}(2\ell,K)$, $\ell \geqslant 3$. Тогда существует элемент $g \in \mathrm{SO}(2\ell,K)$ такой, что $gXg^{-1}, gYg^{-1} \leqslant \mathrm{SO}(6,K)$.*

Следствие 2. *Пусть X и Y – пара некоммутирующих микровесовых торов типа $\overline{\varpi}_1$ в $G = \mathrm{SO}(2\ell,K)$, $\ell \geqslant 3$. Предположим, что подгруппа $\langle X,Y\rangle$, порождённая X и Y, не вкладывается в $B(6,K)$ посредством одновременного сопряжения. Тогда существует элемент $g \in G$ такой, что верно одно из следующих утверждений:*

(I) $gXg^{-1} = \{h_1(\varepsilon)x_{1-2}(\theta_1(\varepsilon^{-1}-1))x_{1+2}(\theta_2(\varepsilon^{-1}-1))x_{1-3}(\lambda(\varepsilon^{-1}-1))$
$\times\, x_{1+3}(\gamma(\varepsilon^{-1}-1)),\ \varepsilon \in K^*\}$,

$gYg^{-1} = \{h_1(\eta)x_{-1+2}(\eta^{-1}-1)x_{-1-2}(\delta(\eta^{-1}-1)),\ \eta \in K^*\}$,

где либо

$\theta_1 = \theta_2 = 0,\ \lambda = 1,\ \delta \neq 0,$ *либо* $\theta_1 \neq 0, \lambda = 0$ *или* $\lambda = 1, \gamma \in K$.

(II) $gXg^{-1} = \{h_1(\varepsilon)x_{1-2}(\theta_1(\varepsilon^{-1}-1))x_{1+2}(\theta_2(\varepsilon^{-1}-1))x_{1-3}(\lambda(\varepsilon^{-1}-1))$
$\times\, x_{1+3}(\gamma(\varepsilon^{-1}-1)),\ \varepsilon \in K^*\}$,

$gYg^{-1} = \{h_2(\eta)x_{-1+2}(\eta^{-1}-1),\ \eta \in K^*\}$, *где* $\theta_1 \in K^*,\ \theta_2 \in K, \lambda = 0$ *или* $\lambda = 1,\ \gamma \in K$.

Доказательство. Во-первых, предположим, что нашёлся такой элемент $g \in G$, что $gXg^{-1} = X_0$ и $gYg^{-1} = Y_2$ и коэффициент $\delta_3 \neq 0$. Тогда $\theta_1 \neq 0$. Иначе, (X_0, Y_1) вкладывается в $B(6, K)$ сопряжением.

Сопрягаем пару подгрупп элементом $h_{2-3}(\delta_3^{-1})$. Если один из коэффициентов θ_3 или θ_4 не равен нулю, можно считать, что $\theta_3 \neq 0$, и тогда мы дополнительно сопрягаем с помощью $h_{1+2}(\theta_3^{-1})$. В результате получаем конфигурацию (II).

Теперь, предположим, что $gXg^{-1} = X_0$ и $gYg^{-1} = Y_1$ при некотором $g \in G$. Ясно, что по крайней мере один из коэффициентов δ_1 или δ_2 отличен от 0.

Если $\theta_1 = \theta_2 = 0$, то $\theta_3\theta_4 \neq 0$ и $\delta_1\delta_2 \neq 0$. Сопряжём элементом $h_{-2+3}(\delta_1^{-1})$. Поэтому можно считать, что $\delta_1 = 1$. Так как $\theta_3 \neq 0$, мы ещё сопрягаем при помощи $h_{1+2}(\theta_3^{-1})$. Следовательно, $\theta_3 = 1$.

Наконец, предположим, что один из коэффициентов θ_1 или θ_2 не равен нулю. Тогда можно считать, что $\theta_1\delta_1 \neq 0$ и $\delta_1 = 1$. Мы получили конфигурацию (I). □

Замечание 1. Заметим, что можно показать, что конфигурация (II) в действительности сопряжена конфигурации (I). И следствие 2 становится полностью аналогичным лемме 4 из [9]. Но для дальнейшего это утверждение не имеет значения.

§4. Редукция к $\mathrm{GL}(4, K)$

В этом параграфе мы сведём вычисления в $\mathrm{SO}(6, K)$ к вычислениям в группе $\mathrm{GL}(4, K)$. Тогда наша теорема 1 будет следовать из теоремы 1 работы [9].

Прежде всего, напомним некоторые необходимые нам обозначения из [9]. Как обычно, $\mathrm{GL}(n, K)$ – полная линейная группа степени n над полем K, $\mathrm{D}(n, K)$ – подгруппа её диагональных матриц. Через $t_{ij}(\varepsilon) = e + \varepsilon e_{i,j}$ для $\varepsilon \in K$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ мы обозначаем элементарную трансвекцию. Аналогично, $d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii}$ обозначает элементарное псевдоотражение. Для фиксированных $i \neq j$ группа $X_{ij} = \{t_{ij}(\varepsilon), \varepsilon \in K\}$ называется элементарной унипотентной корневой подгруппой. Для фиксированного i группа $Q_i = \{d_i(\varepsilon),\ \varepsilon \in K^*\}$ – группа элементарных псевдоотражений.

В матричном представлении элементарный 2-тор является диагональной матрицей с первыми двумя элементами на главной диагонали равными ε:

$$Q = \{\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, 1, \ldots, 1),\ \varepsilon \in K^*\}.$$

Произвольным 2-тором называется подгруппа gQg^{-1}, $g \in \mathrm{GL}(n, K)$, сопряженная элементарному тору Q.

Поскольку системы корней A_3 и D_3 изоморфны, можно построить сюръективный гомоморфизм из $E(\mathrm{A}_3)$ в $E(\mathrm{D}_3)$.

Пусть $\Pi(\mathrm{A}_3) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – простые корни системы корней типа A_3, причём корни α_1 и α_3 ортогональны. Тогда корни $\beta_1 = \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_1$, $\beta_3 = \alpha_3$ можно рассмотреть как простые корни, порождающие систему корней типа D_3.

Далее, зададим отображение $\varphi : E(\mathrm{A}_3) \to E(\mathrm{D}_3)$ на образующих:

$$\begin{aligned}
&t_{12}(\xi) \to x_{2-3}(\xi), \quad t_{21}(\xi) \to x_{-2+3}(\xi),\\
&t_{23}(\xi) \to x_{1-2}(\xi), \quad t_{32}(\xi) \to x_{-1+2}(\xi),\\
&t_{34}(\xi) \to x_{2+3}(\xi), \quad t_{43}(\xi) \to x_{-2-3}(\xi),\\
&t_{13}(\xi) \to x_{1-3}(-\xi), \quad t_{31}(\xi) \to x_{-1+3}(-\xi),\\
&t_{24}(\xi) \to x_{1+3}(\xi), \quad t_{42}(\xi) \to x_{-1-3}(\xi),\\
&t_{14}(\xi) \to x_{1+2}(\xi) \quad t_{41}(\xi) \to x_{-1-2}(\xi).
\end{aligned}$$

Непосредственные вычисления показывают, что знаки структурных констант в коммутационных формулах Шевалле в $E(\mathrm{A}_3)$ и в $E(\mathrm{D}_3)$ согласованы. Следовательно, данное отображение, действительно гомоморфизм.

Рассмотрим действие сопряжением элементарными трансвекциями, соответствующимим простым корням, на элементарном 2-торе Q в $\mathrm{GL}(4, K)$.

$$\begin{aligned}
&t_{12}(\xi)d(\varepsilon)t_{12}(-\xi) = d(\varepsilon),\\
&t_{23}(\xi)d(\varepsilon)t_{23}(-\xi) = d(\varepsilon)t_{23}(\xi/\varepsilon - \xi),\\
&t_{34}(\xi)d(\varepsilon)t_{34}(-\xi) = d(\varepsilon),
\end{aligned}$$

$\varepsilon \in K^*$, $\xi \in K$.

Заметим, что в $\mathrm{SO}(6, K)$ элементарный микровесовой тор $H_{\overline{\omega}}$ в общем случае не принадлежит группе $E(\mathrm{D}_3)$. Он будет принадлежать $E(\mathrm{D}_3)$ только в случае, когда $K^* = K^{*2}$. Вычислим теперь действие сопряжением элементарными корневыми унипотентами, соответствующим простым корням, на H_{ϖ}:

$$
\begin{aligned}
&x_{2-3}(\xi)h_{\varpi}(\varepsilon)x_{2-3}(-\xi) = h_{\varpi}(\varepsilon),\\
&x_{1-2}(\xi)h_{\varpi}(\varepsilon)x_{1-2}(-\xi) = h_{\varpi}(\varepsilon)x_{1-2}(\xi/\varepsilon - \xi),\\
&x_{2+3}(\xi)h_{\varpi}(\varepsilon)x_{2+3}(-\xi) = h_{\varpi}(\varepsilon),
\end{aligned}
$$

$\varepsilon \in K^*$, $\xi \in K$.

Отсюда видно, что действие сопряжениями $\mathrm{E}(\mathrm{A}_3)$ на Q и $E(\mathrm{D}_3)$ на H_{ϖ} согласованы.

Запишем произвольный элемент $g \in \mathrm{GL}(4, K)$ в виде $g = g'd$, где $g \in E(\mathrm{A}_3)$, $d \in D(4, K)$ и $d \notin E(\mathrm{A}_3)$. Тогда произвольному 2-тору $gQg^{-1} = g'Qg'^{-1}$ в $\mathrm{GL}(4, K)$ соответствует микровесовой тор $\varphi(g')H_{\varpi}\varphi(g'^{-1})$ в $\mathrm{SO}(6, K)$.

Обратно, представим произвольный элемент $f \in \mathrm{SO}(6, K)$ в виде $f = f'h$, где $f \in E(\mathrm{D}_3)$, $h \in \overline{H}(6, K)$ и $h \notin E(\mathrm{D}_3)$. Тогда $fH_{\varpi}f^{-1} = f'H_{\varpi}f'^{-1}$ и найдётся такой элемент $g' \in E(\mathrm{A}_3)$, что $\varphi(g') = f'$. Таким образом, каждому микровесовому тору в $SO(6, K)$ соответствует некоторый 2-тор в $\mathrm{GL}(4, K)$.

Таким образом, каждой паре (X, Y) микровесовых торов в $\mathrm{SO}(6, K)$ можно сопоставить некоторую пару 2-торов (X', Y') в $\mathrm{GL}(4, K)$.

Теперь остаётся заметить, что гомоморфизм φ переводит неединичные унипотентные элементы в неединичные унипотентные элементы, сохраняя вид их разложения на элементарные корневые унипотенты. Отсюда следует, что извлеченные маленькие унипотентные элементы в $\langle X', Y'\rangle$ соответствуют маленьким унипотентным элементам в $\langle X, Y\rangle$. Таким образом, теорема 1 доказана.

В завершение статьи заметим, что в работе [9] в тексте доказательства теоремы 4 допущена опечатка. В выражениях для $\varphi_2(\xi)$ и $\varphi_2(\xi')$ числитель и знаменатель надо поменять местами.

Список литературы

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **148** (1978), 43–57.
3. Н. Бурбаки, *Элементы математики. Группы и алгебры Ли*, гл. IV – VI, Мир, М., 1972.

4. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Труды Ленингр. Мат. Общ., **1** (1990), 64–109.
5. Н. А. Вавилов, *Геометрия* 1*-торов в* GL_n. — Алгебра и анализ **19**, No. 3 (2007), 120–151.
6. Н. А. Вавилов, Весовые элементы групп Шевалле. — Алгебра и анализ **20**, No. 1 (2008), 34–85.
7. Н. А. Вавилов, В. В. Нестеров, *Геометрия микровесовых торов.* — Владикавказский мат. журнал **10**, No. 1 (2008), 10–23.
8. Н. А. Вавилов, В. В. Нестеров, *Подгруппы, порождённые парой 2-торов в* $\mathrm{GL}(5,K)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **521** (2023).
9. В. В. Нестеров, *Извлечение малоранговых унипотентных элементов в* $\mathrm{GL}(4,K)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **492** (2020), 134–148.
10. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975.
11. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type.* — Pure Appl. Math. **28**, Sohn Wiley&Sons, London, 1972.
12. V. V. Nesterov, N. A. Vavilov, *Pairs of microweight tori in* GL_n. — Чебышевский сборник **21**, вып. 3 (2020), 257–266.

Nesterov V. V. Extraction of small rank unipotent elements in $\mathrm{SO}(2\ell, K)$.

The paper continues the series of papers of N.A. Vavilov and the author devoted to the geometry of microweight tori in extended Chevalley groups. It is proved that the subgroup, generated by a pair of microweight tori of type $\overline{\varpi}_1$ in a Chevalley group of type D_ℓ, contains unipotent elements of rank less than or equal to 4 provided that the field has at least 19 elements. These unipotent elements are either a root unipotent element or the product of two root unipotent elements corresponding to orthogonal roots.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Петродворец,
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: vl.nesterov@mail.ru

Поступило 5 июня 2023 г.