Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 522, 2023 г.

В. И. Копейко

О СТРУКТУРЕ УНИТАРНЫХ НИЛЬ K_1-ГРУПП

§1. Введение

Одной из классических задач алгебраической и унитарной K-теории является изучение структуры K-групп колец многочленов над кольцами, которая приводит к необходимости изучения нильпотентных (ниль) K-групп. В [1] для произвольного унитарного кольца R была введена и изучалась нильпотентная по Бассу унитарная K_1-группа $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ и, в частности, была описана система (унитарных) представителей группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, при этом оказалось, что, в отличие от линейного случая, эти представители в общем случае не являются унипотентными (унитарными) матрицами. В [2] был введен ряд ниль подгрупп группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, для которых были получены некоторые структурные результаты. Целью данной работы является продолжение изучения структуры группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ и некоторых ее ниль подгрупп. Перейдем к обзору основных результатов работы. В параграфе 2 вводится новое понятие – нильпотента степени 2 Λ-унитарного типа, оказывающееся полезным при изучении унитарных ниль групп. В теореме 1, усиливающей как теорему 2 из [1], так и теорему из [2], дается полное описание (матричных) унитарных двучленов над кольцом многочленов со свободным членом, равным единичной матрице. В параграфе 4, используя полученные в теореме 1 результаты, вводятся и изучаются унитарные ниль группы, значительно расширяющие ниль группы из [2]. В теореме 3, частным случаем которой является теорема 1, дается описание представителей классов одной из построенных ниль групп. В теореме 4 и ее следствиях, используя теорему 3, получен ряд структурных результатов для ниль групп, аналогичных хорошо известным свойствам группы $NK_1(R)$ из алгебраической K-теории (см., например, [3]). В параграфе 3 рассмотрен процесс линеаризации одной унипотентной унитарной матрицы, используя процедуру линеаризации унитарных матриц над кольцами многочленов, описанную

Ключевые слова: унитарное кольцо, унитарная группа, унитарный K_1-функтор, нильпотентная по Бассу унитарная K_1-группа, унипотентные унитарные матрицы.

в [1] при доказательстве теоремы 1. Данный пример показывает, что некоторые классы группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ с не унипотентным (унитарным) представителем могут содержать унипотентные унитарные матрицы.

§2. Унитарная ниль-группа $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$

Напомним ряд стандартных определений и результатов унитарной K-теории (см., например, [4,5]), используемых в данной работе. Пусть (R,λ,Λ) – унитарное кольцо, где R – ассоциативное кольцо с 1, на котором задана инволюция $x \to \bar{x}$, λ – центральный элемент кольца R такой, что $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$ и Λ – аддитивная подгруппа R, удовлетворяющая некоторым условиям. В литературе унитарное кольцо называют также форменным кольцом Бака с системой параметров Λ и симметрией λ. Если положить $\bar{\Lambda} = \{\bar{x}, x \in \Lambda\}$, то получаем еще одно унитарное кольцо $(R,\bar{\lambda},\bar{\Lambda})$. Продолжим инволюцию на кольцо матриц $M_r(R)$ стандартным способом, положив $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$.

Определение 1. *Матрица $a(\in M_r(R))$ называется Λ-эрмитовой, если она является $(-\lambda)$-эрмитовой, то есть $a = -\lambda a^*$, и все ее диагональные элементы содержатся в Λ.*

Очевидно, что матрица a является Λ-эрмитовой тогда и только тогда, когда a^* является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой матрицей.

В работе мы будем использовать блочную форму записи матриц. Более точно, запись $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$ означает, что $a,b,c,d \in M_r(R)$. Для натурального r положим $I_r^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & e_r \\ \lambda e_r & 0 \end{pmatrix}$, где e_r (соответственно 0) обозначает единичную (соответственно нулевую) матрицу порядка r.

Определение 2. *Матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$ называется унитарной, если $\alpha^* I_r^\lambda \alpha = I_r^\lambda$ и называется Λ-унитарной, если, кроме того, диагональные элементы матриц a^*c и b^*d содержатся в Λ.*

Множество $U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$ всех Λ-унитарных матриц порядка $2r$ образует группу, которая называется (гиперболической) Λ-унитарной группой. В дальнейшем слово “гиперболическая” мы будем опускать.

Для произвольного ассоциативного кольца R с 1 и любой $a \in M_r(R)$ положим $T_{12}(a) = \begin{pmatrix} e_r & a \\ 0 & e_r \end{pmatrix}$, $T_{21}(a) = \begin{pmatrix} e_r & 0 \\ a & e_r \end{pmatrix}$. Очевидно, что $T_{12}(a)$, $T_{21}(a) \in E_{2r}(R)$ для любой $a \in M_r(R)$, где $E_{2r}(R)$ обозначает подгруппу $GL_{2r}(R)$, порожденную всеми элементарными матрицами.

Нетрудно показать (см., например, примеры 2 и 3 в [1]), что, если $a \in M_r(R)$, то матрица $T_{12}(a)$ является Λ-унитарной тогда и только тогда, когда матрица a является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой; матрица $T_{21}(a)$ является Λ-унитарной тогда и только тогда, когда матрица a является Λ-эрмитовой. Кроме того, для любой обратимой матрицы $a(\in GL_r(R))$ матрица $H(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^*)^{-1} \end{pmatrix}$ является Λ-унитарной и называется гиперболической.

Обозначим через $EU_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ подгруппу $U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, порожденную всеми Λ-унитарными матрицами вида: $T_{12}(b)$, где b – $\bar{\Lambda}$-эрмитова; $T_{21}(c)$, где c – Λ-эрмитова; $H(a)$, где $a \in E_r(R)$. Группа $EU_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ называется элементарной Λ-унитарной группой.

В работе мы будем использовать следующую операцию над матрицами. Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$, $\beta = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_{2s}(R)$. Положим

$$\alpha \perp \beta = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \in M_{2(r+s)}(R).$$

Очевидно, $I_r^{\lambda} \perp I_s^{\lambda} = I_{r+s}^{\lambda}$, и значит, если $\alpha \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, $\beta \in U_{2s}^{\lambda}(R,\Lambda)$, то $\alpha \perp \beta \in U_{2(r+s)}^{\lambda}(R,\Lambda)$. Определим вложение $U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda) \to U_{2(r+1)}^{\lambda}(R,\Lambda)$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \perp e_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и введем стабильные группы $U^{\lambda}(R,\Lambda) = \cup U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, $EU^{\lambda}(R,\Lambda) = \cup EU_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$.

Напомним унитарный аналог леммы Уайтхеда.

Предложение 1. (см. [5], глава 2, предложение 3.7). *Если* $\alpha \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, *то* $\alpha \perp \alpha^{-1} \in EU_{4r}^{\lambda}(R,\Lambda)$.

Приведем ряд хорошо известных следствий из унитарного аналога леммы Уайтхеда, необходимые нам в дальнейшем.

Следствие 1. *Если* $\alpha, \beta \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, *то* $\alpha\beta \perp e_{2r} \equiv \alpha\perp\beta \bmod EU_{4r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ *и* $[\alpha,\beta]\perp e_{2r} \in EU_{4r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, *где* $[\alpha,\beta]$ *обозначает коммутатор.*

В силу предложения 1, утверждения следуют соответственно из разложений $\alpha\perp\beta \equiv (\alpha\perp\beta)(\beta\perp\beta^{-1}) = \alpha\beta\perp e_{2r} \mod EU_{4r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ и $[\alpha,\beta]\perp e_{2r} = (\alpha\perp\alpha^{-1})(\beta\perp\beta^{-1})((\beta\alpha)^{-1}\perp(\beta\alpha)) \in EU_{4r}^{\lambda}(R,\Lambda)$.

Следствие 2. *В условиях следствия* 1,

$$\alpha\beta\perp e_{2r} \equiv \beta\alpha\perp e_{2r} \mod EU_{4r}^{\lambda}(R,\Lambda)$$

и $(\alpha\beta)^n\perp e_{2r} \equiv \alpha^n\beta^n\perp e_{2r} \mod EU_{4r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ *для любого натурального* n.

Утверждения легко следуют из следствия 1. Докажем, например, второе утверждение. Имеем

$$(\alpha\beta)^n\perp e_{2r} = (\alpha\beta\perp e_{2r})^n \equiv (\alpha\perp\beta)^n = \alpha^n\perp\beta^n \equiv \alpha^n\beta^n\perp e_{2r} \mod EU_{4r}^{\lambda}(R,\Lambda).$$

В силу унитарного аналога леммы Уайтхеда, группа $EU^{\lambda}(R,\Lambda)$ совпадает с коммутантом группы $U^{\lambda}(R,\Lambda)$ и, в частности, корректно определена (абелева) группа $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) = U^{\lambda}(R,\Lambda)/EU^{\lambda}(R,\Lambda)$. Класс матрицы $\alpha \in U^{\lambda}(R,\Lambda)$ в группе $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ будем обозначать через $[\alpha]$. Тогда $[\alpha]+[\beta] = [\alpha\perp\beta]$ для произвольных $\alpha,\beta \in U^{\lambda}(R,\Lambda)$. В результате получаем унитарный K_1-функтор K_1U, действующий из категории унитарных колец в категорию абелевых групп.

Замечание 1. Если $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, то $\alpha_1\alpha_2^{-1} = T_{21}(c_1d_2^* + \lambda d_1c_2^*) \in EU_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ и, следовательно, $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ в группе $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$. Таким образом, любой элемент группы $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ однозначно определяется верхней половиной Λ-унитарной матрицы, представляющей данный элемент.

Продолжим инволюцию на кольцо многочленов $R[X]$, положив $\overline{X}=X$. В результате получаем унитарное кольцо $(R[X],\lambda,\Lambda[X])$.

Определение 3. *Ядро (расщепляющегося) эпиморфизма групп*

$$K_1U^{\lambda}(R[X],\Lambda[X]) \to K_1U^{\lambda}(R,\Lambda),$$

индуцированного унитарной сюръекцией унитарных колец

$$(R[X],\Lambda[X]) \to (R,\Lambda) : X \to 0,$$

обозначим через $NK_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ *и будем называть нильпотентной по Бассу унитарной* K_1*-группой унитарного кольца* R. *В частности,* $K_1U^{\lambda}(R[X],\Lambda[X]) \cong K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) \oplus NK_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ *и значит изучение* *унитарной K_1-группы кольца многочленов сводится к изучению группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, если структура группы $K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ известна.*

Для доказательства следующего результата в работе [1] был построен унитарный аналог линеаризационного трюка Хигмана, при этом, в отличие от линейного случая алгебраической K-теории, линеаризуется только верхняя половина $\Lambda[X]$-унитарной матрицы, что согласуется с замечанием 1. В действительности, аналогичную линеаризацию можно провести для любой из половинок (левой, правой, верхней, нижней) произвольной унитарной матрицы над кольцом многочленов.

Предложение 2. (см. [1], теорема 1). *Любой элемент группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ имеет представителя вида:*

$$\begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX^n & e_r + a^*X + \cdots + (a^*)^n X^n \end{pmatrix} (\in U^\lambda_{2r}(R[X],\Lambda[X])) \qquad (*)$$

при некоторых натуральных r, n и матрицах $a, b, c (\in M_r(R))$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) *матрицы b и ab являются $\bar\Lambda$-эрмитовыми, причем $ab = ba^*$;*
2) *матрицы c и ca являются Λ-эрмитовыми, причем $ca = a^*c$;*
3) *$bc = a^{n+1}$ и $cb = (a^*)^{n+1}$.*

Пример гиперболической матрицы

$$H(e_r - aX) = \begin{pmatrix} e_r - aX & 0 \\ 0 & e_r + a^*X + \cdots + (a^*)^{m-1}X^{m-1} \end{pmatrix},$$

где a нильпотентная матрица степени нильпотентности $m \geqslant 3$, показывает невозможность линеаризации нижней половины унитарной матрицы без увеличения степени верхней половины данной матрицы.

Согласно предложению 5 из [1], условия 1)–3) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы матрица $(*)$ из предложения 2 являлась $\Lambda[X]$-унитарной. Приводимые ниже леммы показывают, что последние равенства в условиях 1)–3) из предложения 2 можно опустить.

Лемма 1. *Если матрицы b и ab являются $\bar\Lambda$-эрмитовыми, то $ab = ba^*$ и в этом случае для любого натурального k матрица a^kb является $\bar\Lambda$-эрмитовой, причем $a^kb = b(a^*)^k$.*

В силу предложения 2 из [1], чтобы доказать лемму, достаточно доказать первое утверждение. По условию, $b = (-\bar\lambda)b^*$, $ab = (-\bar\lambda)(ab)^*$ и значит $ab = (-\bar\lambda)b^*a^* = ba^*$.

Аналогично доказывается следующая лемма, где для доказательства второго утверждения надо воспользоваться предложением 4 из [1].

Лемма 2. *Если матрицы* c *и* ca *являются* Λ*-эрмитовыми, то* $ca = a^*c$ *и в этом случае для любого натурального* s *матрица* ca^s *является* Λ*-эрмитовой, причем* $ca^s = (a^*)^s c$.

Лемма 3. *Если* b *является* $\bar{\Lambda}$*-эрмитовой матрицей,* c *является* Λ*-эрмитовой матрицей и* $bc = a^{n+1}$, *то* $cb = (a^*)^{n+1}$.

В силу условий, имеем $(a^*)^{n+1} = c^*b^* = (-\bar{\lambda})c(-\lambda)b = cb$.

Хорошо известно (см., например, следствие 5.3 из главы 12 в [6]), что для ассоциативного кольца R с 1 любой элемент нильпотентной по Бассу K_1-группы $NK_1(R) = GL(R)/E(R)$ имеет унипотентный представитель вида $e_r - aX$ при некотором натуральном r, где $a(\in M_r(R))$ — нильпотентная матрица. Для нильпотентной по Бассу унитарной K_1-группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ аналогичный результат вообще говоря не имеет места. Более точно, имеет место следующий результат, дающий полное описание унипотентных (унитарных) представителей вида $(*)$.

Предложение 3. (см. [1, теорема 2]). *Пусть матрицы* $a, b, c \in M_r(R)$ *удовлетворяют условиям* 1)–3) *из предложения* 2 *при некоторых натуральных* r, n. *Тогда*

1) *при* $n = 1$ *унитарная матрица*

$$\begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX & e_r + a^*X \end{pmatrix} = e_{2r} - \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix} X$$

является унипотентной, причем матрица $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix}$ *нильпотентна степени нильпотентности* 2;

2) *при* $n \geqslant 2$ *унитарная матрица* $(*)$ *из предложения* 2 *является унипотентной тогда и только тогда, когда матрица* $e_r - aX$ – *унипотентна и в этом случае класс матрицы* $(*)$ *в группе* $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ *совпадает с классом гиперболической матрицы* $H(e_r - aX)$.

В дальнейшем нам необходимо следующее новое понятие.

Определение 4. *Матрица вида* $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix}$, *где* $a, b, c \in M_r(R)$, *называется нильпотентом степени* 2 Λ*-унитарного типа, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *матрицы* b *и* ab *являются* $\bar{\Lambda}$*-эрмитовыми;*

2) *матрицы c и ca являются Λ-эрмитовыми;*
3) $bc = a^2$.

Отметим, что в силу лемм 1–3, матрица из определения 4 является нильпотентной степени нильпотентности 2.

Сформулируем один из основных результатов работы.

Теорема 1. *Пусть k – натуральное число, $\alpha(\in M_{2r}(R))$ – ненулевая матрица. Матрица $e_{2r} - \alpha X^k$ является $\Lambda[X]$-унитарной тогда и только тогда, когда матрица α является нильпотентом степени* 2 *Λ-унитарного типа.*

Необходимость для степени $k = 1$ была доказана в теореме из [2], общий случай для произвольной степени k сводится к рассмотренному частному случаю с помощью замены $Y = X^k$.

Достаточность для степени $k = 1$ справедлива в силу пункта 1) предложения 3, общий случай для произвольной степени k следует из леммы 4 ниже. Справедливость леммы 4 следует из определения $\Lambda[X]$-унитарной матрицы.

Лемма 4. *Пусть $\alpha \in M_{2r}(R)$. Если матрица $e_{2r} - \alpha X^k$ является $\Lambda[X]$-унитарной при некотором натуральном k, то $e_{2r} - \alpha X^s$ является $\Lambda[X]$-унитарной при любом натуральном s.*

§3. Пример линеаризации унитарной матрицы

В этом параграфе опишем процесс линеаризации матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} e_r - aX^2 & bX^2 \\ -cX^2 & e_r + a^*X^2 \end{pmatrix} = e_{2r} - \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix} X^2,$$

где коэффициент при X^2 является нильпотентом степени 2 Λ-унитарного типа. В силу теоремы 1, матрица Γ является $\Lambda[X]$-унитарной.

Процесс линеаризации унитарных матриц над кольцами многочленов был описан в пунктах 2.1–2.5 доказательства теоремы 1 в [1], этой процедуре мы и будем следовать. На каждом шаге мы будем проводить преобразования с помощью матриц из $EU_{2s}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$ со свободным членом равным e_{2s} при некотором натуральном s, что приводит к (унитарным) матрицам, принадлежащим классу матрицы Γ в группе $NK_1U^{\lambda}(R, \Lambda)$.

3.1. Для линеаризации левого верхнего блока матрицы Γ используем классический линеаризационный трюк Хигмана (см., например, [6, глава 12, предложение 5.1]), при котором, чтобы понизить степень матричного многочлена, нужно сначала увеличить в два раза порядок матричного многочлена, путем добавления единичной матрицы того же порядка и только после этого проводить необходимые преобразования с помощью элементарных (унитарных) матриц.

Перейдем от матрицы Γ к матрице $\Gamma\perp e_{2r}$. Умножив матрицу $\Gamma\perp e_{2r}$ слева на (гиперболическую) матрицу $H(T_{12}(aX))$ и справа на $H(T_{21}(e_rX))$, получаем матрицу, у которой левый (соответственно правый) верхний блок имеет вид $e_{2r} - \alpha_1 X$, где $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -e_r & 0 \end{pmatrix}$, (соответственно $\begin{pmatrix} bX^2 & -bX^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$). Обозначим полученную матрицу через Γ_1.

Если матрица a является нильпотентной, то матрица $e_r - aX^2$ является унипотентной, причем, как показано выше, ее линеаризацией является матрица $e_{2r} - \alpha_1 X$. Следовательно, $[\Gamma] = [H(e_r - aX^2)] = [H(e_{2r} - \alpha_1 X)]$, и в этом случае задача линеаризации матрицы Γ решена.

Предположим, что матрица a не является нильпотентной и в этом случае продолжим процесс линеаризации. Для этого нам необходим следующий вспомогательный результат.

Лемма 5. *Пусть $a, b, c \in M_r(R)$, причем a и c являются Λ-эрмитовыми матрицами, а матрица b $(-\lambda)$-эрмитова. Тогда матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ является Λ-эрмитовой.*

В силу условий, имеем $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\lambda)a^* & (-\lambda)b^* \\ (-\lambda)b^* & (-\lambda)c^* \end{pmatrix} = (-\lambda)\alpha^*$ и значит матрица α является $(-\lambda)$-эрмитовой. Кроме того, по условию, диагональные элементы матриц a и c содержатся в Λ и, следовательно, матрица α является Λ-эрмитовой.

3.2. Чтобы перейти к одночлену в правом верхнем блоке, умножим матрицу Γ_1 справа на $T_{12}(\begin{pmatrix} -bX^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$. В результате получаем матрицу, у которой левый верхний блок не изменился, а правый верхний блок имеет вид $\beta_1 X^3$, где $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. Обозначим полученную матрицу через Γ_2. Отметим, что в силу леммы 5 матрицы β_1, $\alpha_1\beta_1 = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_1 & -\alpha_1\beta_1 \end{pmatrix}$ являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми.

3.3. Чтобы линеаризовать правый верхний блок матрицы Γ_2, применим эрмитов аналог линеаризационного трюка Хигмана, описанный в пункте 1.3 доказательства теоремы 1 в [1]. Перейдем от Γ_2 к матрице $\Gamma_2 \perp e_{4r}$. Умножив $\Gamma_2 \perp e_{4r}$ слева на (гиперболическую) матрицу $H(T_{12}(-e_{2r}X))$ и справа на $T_{12}(\beta_2 X^2)$ получаем матрицу, у которой левый (соответственно правый) верхний блок имеет вид $e_{4r} - \alpha_2 X$, где $\alpha_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & e_{2r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (соответственно $\beta_2 X^2$). Обозначим полученную матрицу через Γ_3. Отметим, что в силу леммы 5, матрицы $\alpha_2\beta_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 \\ \beta_2 & -\alpha_2\beta_2 \end{pmatrix}$ являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми.

Еще раз используем эрмитов аналог линеаризационного трюка Хигмана. Перейдем от Γ_3 к матрице $\Gamma_3 \perp e_{8r}$. Умножив $\Gamma_3 \perp e_{8r}$ слева на (гиперболическую) матрицу $H(T_{12}(-e_{4r}X))$ и справа на $T_{12}(\beta_3 X)$, получаем матрицу, у которой левый (соответственно правый) верхний блок имеет вид $e_{8r} - \alpha X$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_2 & e_{4r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (соответственно $\beta_3 X$). Обозначим полученную матрицу через Γ_4 и положим $\beta = \beta_3$. Тогда, в силу леммы 5, матрицы β и $\alpha\beta = \begin{pmatrix} \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми, и линеаризация верхней половины матрицы Γ завершена.

3.4. Перейдем к одночлену в левом нижнем блоке матрицы Γ_4, который имеет вид $f(X) = \gamma_2 X^2 + \gamma_3 X^3 + \gamma_4 X^4 + \gamma_5 X^5$, где $\gamma_i \in M_{8r}(R)$, причем у всех этих блочных матриц только первый блочный столбец ненулевой. Более точно, у матриц γ_2, γ_3, γ_4, γ_5 первый блочный столбец имеет соответственно вид $\begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$, $\begin{pmatrix} 0 & ca & -c & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ca & 0 & ca & -c & 0 \end{pmatrix}^t$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ca \end{pmatrix}^t$, где t означает транспонирование строки (без транспонирования компонент строки). Следуя пункту 1.4 доказательства теоремы 1 в [1], разделим матричный многочлен $f(X)$ слева на линейный матричный многочлен $e_{8r} - \alpha X$, и пусть

$$f(X) = q(X)(e_{8r} - \alpha X) + \delta_5 X^5, \qquad (**)$$

где $q(X) = \delta_2 X^2 + \delta_3 X^3 + \delta_4 X^4$ при некоторых $\delta_i \in M_{8r}(R)$, $2 \leqslant i \leqslant 5$.

Замечание 2. Здесь мы используем обратный алгоритм деления, то есть избавляемся от одночленов степени меньшей 5. Чтобы получить обычный алгоритм деления с остатком, нужно равенство $(**)$ умножить на X^{-5} и сделать замену переменной $Y = X^{-1}$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях равенства $(**)$, получаем, что $\delta_2 = \gamma_2$, $\delta_3 = \gamma_3 + \delta_2 a$, $\delta_4 = \gamma_4 + \delta_3 a$, $\delta_5 = \gamma_5 + \delta_4 a = \gamma_5 + \gamma_4 a + \gamma_3 a^2 + \gamma_2 a^3$. Как доказано в предложении 7 в [1], матрицы $\delta_i, 2 \leqslant i \leqslant 5$ являются Λ-эрмитовыми (можно сделать и непосредственную проверку, выписав указанные матрицы и воспользовавшись леммой 5). Следовательно, $q(X)$ является $\Lambda[X]$-эрмитовой матрицей. Умножив матрицу Γ_4 слева на $T_{21}(-q(X))$, получим матрицу, у которой верхняя половина не изменилась, в левом нижнем блоке стоит матричный одночлен $-\delta_5 X^5$, в правом нижнем блоке стоит матричный многочлен степени 7 со свободным членом равным e_{8r}. Обозначим полученную матрицу через Γ_5.

Нетрудно проверить, что $\delta_5 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ \epsilon_2 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$, где

$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & ca^2 & -ca & 0 \\ ca^2 & 0 & 0 & -ca^2 \\ -ca & 0 & 0 & ca \\ 0 & -ca^2 & ca & 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} -ca & 0 & 0 & ca \\ 0 & -ca^2 & ca & 0 \\ 0 & ca & -c & 0 \\ ca & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$\epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & ca & -c & 0 \\ ca & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрицы $\epsilon_i, 1 \leqslant i \leqslant 3$ являются Λ-эрмитовыми в силу лемм 2 и 5, а матрица δ_5 – Λ-эрмитова в силу леммы 5.

Кроме того, $\delta_5 \alpha = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix}$, где

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} -ca^2 & 0 & 0 & ca^2 \\ 0 & -ca^3 & ca^2 & 0 \\ 0 & ca^2 & -ca & 0 \\ ca^2 & 0 & 0 & -ca^2 \end{pmatrix}, \ \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & ca^2 & -ca & 0 \\ ca^2 & 0 & 0 & -ca^2 \\ -ca & 0 & 0 & ca \\ 0 & -ca^2 & ca & 0 \end{pmatrix},$$

$\tau_3 = \begin{pmatrix} -ca & 0 & 0 & ca \\ 0 & -ca^2 & ca & 0 \\ 0 & ca & -c & 0 \\ ca & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрицы $\tau_i, 1 \leqslant i \leqslant 3$ являются Λ-эрмитовыми в силу лемм 2 и 5, а матрица $\delta_5\alpha$ – Λ-эрмитова в силу леммы 5.

3.5. Согласно пункту 1.5 из доказательства теоремы 1 в [1], чтобы преобразовать правый нижний блок, нужно умножить матрицу Γ_5 слева на $T_{21}(\delta_5 X^5 + \delta_5\alpha X^6)$. В результате мы получаем матрицу

$$\Delta = \begin{pmatrix} e_{8r} - \alpha X & \beta X \\ -\gamma X^7 & e_{8r} + \alpha^* X + \cdots + (\alpha^*)^7 X^7 \end{pmatrix},$$

где $\gamma = \delta_5\alpha^2$, в которой матрицы β и $\alpha\beta$ являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми и, значит, $\alpha\beta = \beta\alpha^*$ в силу леммы 1; матрицы γ и $\gamma\alpha$ являются Λ-эрмитовыми и, значит, $\gamma\alpha = \alpha^*\gamma$ в силу леммы 2; кроме того, $\beta\gamma = \beta\delta_5\alpha^2 = \alpha^8$. Отметим, что матрица Δ входит в число представителей классов группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, описанных в предложении 1.

Покажем, что матрица α является нильпотентной тогда и только тогда, когда матрица a нильпотентна. Для доказательства достаточно отметить, что у матрицы $\alpha^s(\in M_{8r}(R))$ при $s \geqslant 2$ все блочные строки, кроме первых двух, являются нулевыми. Более точно, при $k \geqslant 1$ у матрицы α^{2k} (соответственно α^{2k+1}) первые две блочные строки имеют вид $\begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & -a^k & 0 & -a^k & a^{k-1} & 0 \\ 0 & a^k & -a^{k-1} & 0 & -a^{k-1} & 0 & 0 & a^{k-1} \end{pmatrix}$ (соответственно $\begin{pmatrix} 0 & -a^{k+1} & a^k & 0 & a^k & 0 & 0 & -a^k \\ -a^k & 0 & 0 & a^k & 0 & a^k & -a^{k-1} & 0 \end{pmatrix}$).

По предположению (см. конец пункта 3.1), матрица a не является нильпотентной и, значит, матрица α не является нильпотентной как показано выше. Следовательно, в силу пункта 2) предложения 3, матрица Δ не является унипотентной, но ее класс в группе $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ содержит унипотентную унитарную матрицу Γ. В частности, $[\Delta] = [\Gamma]$.

§4. Структура унитарных ниль K_1-групп

Введем ряд ниль-подгрупп группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$. Обозначим через $\operatorname{Unip} K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ подгруппу $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, порожденную всеми элементами с представителями одного из следующих двух типов:

1) $e_{2r} - \alpha X^k (\in U^\lambda_{2r}(R,\Lambda))$ при некоторых натуральных r, k, где $\alpha(\in M_{2r}(R))$ является нильпотентом степени 2 Λ-унитарного типа;

2) $H(e_r - aX)$ при некотором r, где $a(\in M_r(R))$ — нильпотентная матрица.

Обозначим через $\operatorname{Unip}_1 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ (соответственно $\operatorname{Unip}_2 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$) подгруппу $\operatorname{Unip} K_1U^\lambda(R,\Lambda)$, порожденную всеми элементами с представителями только типа 1) (соответственно типа 2). Ранее в [2] был введен ряд ниль-подгрупп группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ и доказаны некоторые их свойства, при этом $\operatorname{Unip} K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ из [2] является подгруппой $\operatorname{Unip} K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ данной работы, у которой представители типа 1) имеют степень $k=1$ (обозначение мы не изменили); $\operatorname{Unip}_{11} K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ из [2] является подгруппой $\operatorname{Unip}_1 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ данной работы, порожденной элементами с представителями типа 1) степени $k=1$; $\operatorname{Unip}_{12} K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ из [2] совпадает с $\operatorname{Unip}_2 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ данной работы. Следовательно, результаты доказанные для группы $\operatorname{Unip}_{12} K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ в [2], остаются справедливыми и для группы $\operatorname{Unip}_2 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ данной работы. Для полноты изложения, сформулируем эти результаты.

Теорема 2. 1) ([2, следствие 2]). *Если простое число p такое, что $p^k=0$ в кольце R, то $\operatorname{Unip}_2 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является p-группой.*

2) ([2, следствие 4]). *Пусть натуральное число n такое, что $nR=R$. Тогда группа $\operatorname{Unip}_2 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является n-делимой. Если, кроме того, либо гиперболический гомоморфизм $H : NK_1(R) \longrightarrow NK_1U^\lambda(R,\Lambda) : [e_r - aX] \longrightarrow [H(e_r - aX)]$, либо забывающий гомоморфизм*

$$F : NK_1U^\lambda(R,\Lambda) \longrightarrow NK_1(R) : \alpha(X) \bmod EU^\lambda(R[X],\Lambda[X]) \\ \longrightarrow \alpha(X) \bmod E(R[X])$$

является мономорфизмом, то группа $\operatorname{Unip}_2 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является однозначно n-делимой.

Перейдем к изучению группы $\operatorname{Unip}_1 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$. Сформулируем второй основной результат работы, частным случаем которого является теорема 1.

Теорема 3. *Каждый нетривиальный элемент (абелевой) группы $\operatorname{Unip}_1 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ имеет (унитарного) представителя вида $e_{2r}+a_1X+\ldots+a_nX^n$ при некоторых натуральных r и n, где $a_i(\in M_{2r}(R))$ такие, что $a_n \neq 0$, $a_ia_j=0$ при всех $1 \leqslant i,j \leqslant n$, причем, если a_i – ненулевая матрица при некотором $1 \leqslant i \leqslant n$, то a_i – нильпотент степени 2 Λ-унитарного типа, а матрица $\alpha(X)=\sum_{j=1}^n a_jX^{j-1}$ является нильпотентной степени нильпотентности 2. Обратно, если* *матрица* $\gamma(X) = e_{2r} + a_1X^{s_1} + \ldots + a_nX^{s_n}$ *является* $\Lambda[X]$*-унитарной при некоторых натуральных* r, n, s_i*, ненулевых* $a_i \in M_{2r}(R)$ *таких, что* $a_ia_j = 0$ *при всех* $1 \leqslant i, j \leqslant n$*, то матрица* a_i *является нильпотентом степени* 2 Λ*-унитарного типа при всех* $i = 1, \ldots, n$*, а матрица* $\gamma(X)$ *имеет разложение* $\gamma(X) = \prod_{i=1}^{n}(e_{2r}+a_iX^{s_i})$*. В частности,* $[\gamma(X)] \in \operatorname{Unip}_1 K_1U^\lambda(R, \Lambda)$.

Для доказательства теоремы нам необходимы следующие вспомогательные утверждения, при этом утверждение леммы 6 очевидно, а справедливость утверждений лемм 7 и 8 следует из следствия 1 предложения 1 и леммы 6.

Лемма 6. *Если* $\alpha(\in M_{2r}(R))$ *и* $\beta(\in M_{2s}(R))$ *являются нильпотентами степени* 2 Λ*-унитарного типа, то матрица* $\alpha\perp\beta(\in M_{2(r+s)}(R))$ *также является нильпотентом степени* 2 Λ*-унитарного типа.*

Лемма 7. *Пусть* r, k *– натуральные числа,* $\alpha, \beta(\in M_{2r}(R))$ *– нильпотенты степени* 2 Λ*-унитарного типа. Тогда*

$$(e_{2r} + \alpha X^k)(e_{2r} + \beta X^k)\perp e_{2r} \equiv (e_{4r} + (\alpha\perp\beta)X^k) \bmod EU_{4r}^\lambda(R[X], \Lambda[X]),$$

причем матрица $\alpha\perp\beta$ *является нильпотентом степени* 2 Λ*-унитарного типа.*

Лемма 8. *Пусть* s, k *– различные натуральные числа и предположим, что* $s < k$*. Тогда, в условиях леммы* 7*,*

$$\begin{aligned}(e_{2r} &+ \alpha X^s)(e_{2r} + \beta X^k)\perp e_{2r}\\ &\equiv e_{4r} + (\alpha\perp 0_{2r})X^s + (0_{2r}\perp\beta)X^k \bmod EU_{4r}^\lambda(R[X], \Lambda[X]),\end{aligned}$$

причем $(\alpha\perp 0_{2r})(0_{2r}\perp\beta) = 0_{4r}$*, а матрицы* $\alpha\perp 0_{2r}, 0_{2r}\perp\beta$ *являются нильпотентами степени* 2 Λ*-унитарного типа.*

Доказательство теоремы 3. Докажем первое утверждение. Возьмем произвольный нетривиальный элемент $z \in \operatorname{Unip}_1 K_1U^\lambda(R, \Lambda)$ и пусть $z = [\prod_{i=1}^{m}(e_{2k} - \alpha_iX^{s_i})] = \sum_{i=1}^{m}[e_{2k} - \alpha_iX^{s_i}]$ при некоторых натуральных k, s_i, m, причем α_i являются (ненулевыми) нильпотентами степени 2 Λ-унитарного типа. Так как мы проводим вычисления в стабильной группе $U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$, то, добавляя с помощью операции $\perp$ единичную матрицу соответствующего порядка, можем считать, что все матрицы, входящие в разложение элемента z, имеют одинаковый порядок. Сгруппировав слагаемые одинаковой степени и воспользовавшись леммой 7, мы получаем представителя элемента z вида $\prod_{j=1}^{n}(e_{2p}+\beta_j X^j)$ при некоторых натуральных p, n, причем ненулевые коэффициенты β_j, в том числе $\beta_n \neq 0_{2p}$, являются нильпотентами степени 2 Λ-унитарного типа. Положим $a_1 = \beta_1 \perp 0_{2(n-1)p}$, $a_2 = 0_{2p} \perp \beta_2 \perp 0_{2(n-2)p}, \ldots, a_n = 0_{2(n-1)p} \perp \beta_n \neq 0_{2np}$. По построению, ненулевые коэффициенты a_i являются нильпотентами степени 2 Λ-унитарного типа, причем $a_i a_j = 0$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Следовательно, в силу леммы 8, $\prod_{j=1}^{n}(e_{2p}+\beta_j X^j) \perp e_{2(n-1)p} \equiv e_{2r}+a_1X+\ldots+a_nX^n \bmod EU_{2r}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$, где $r = np$, при этом матрица $\alpha(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j X^{j-1}$ является нильпотентной степени нильпотентности 2, что и завершает доказательство первого утверждения теоремы 3.

Замечание 3. Для перестановки сомножителей, чтобы сгруппировать двучлены одинаковой степени, можно было также воспользоваться сравнением из следствия 2 предложения 1.

Доказательство обратного утверждения будем проводить индукцией по n. Если $n = 1$, то утверждение справедливо в силу теоремы 1. Предположим, что $n \geqslant 2$ и матрица $\gamma(X)$ является $\Lambda[X]$-унитарной, удовлетворяющей условиям теоремы. Сравнивая коэффициенты при X^{s_1} в левой и правой частях равенства $\gamma(X)^* I_r^{\lambda} \gamma(X) = I_r^{\lambda}$, получаем, что $a_1^* I_r^{\lambda} + I_r^{\lambda} a_1 = 0$ и, следовательно, $a_1^* I_r^{\lambda} a_1 = -I_r^{\lambda} a_1^2 = 0$ в силу предположения. При доказательстве теоремы в [2] было показано, что, если $a_1^* I_r^{\lambda} + I_r^{\lambda} a_1 = 0$, то матрица a_1 имеет вид $\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{13} & -a_{11}^* \end{pmatrix}$ при некоторых $a_{1j} \in M_r(R)$, причем матрицы a_{13} и a_{12}^* являются $(-\lambda)$-эрмитовыми. Кроме того, было также показано, что если и $a_1^* I_r^{\lambda} a_1 = 0$, то матрицы $a_{13}a_{11}$ и $(a_{11}a_{12})^*$ являются $(-\lambda)$-эрмитовыми, причем $a_{11}a_{12} = a_{12}a_{11}^*$, $a_{13}a_{11} = a_{11}^* a_{13}$ и $a_{12}a_{13} = a_{11}^2$. Таким образом, матрицы a_{13} и $a_{13}a_{11}$ являются $(-\lambda)$-эрмитовыми, а матрицы a_{12} и $a_{11}a_{12}$ являются $(-\bar{\lambda})$-эрмитовыми.

Пусть $a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & -a_{i2} \\ a_{i3} & a_{i4} \end{pmatrix}$ при некоторых $a_{ij} \in M_r(R)$. Так как матрица $\gamma(X)$ является $\Lambda[X]$-унитарной, то, по определению, диагональные элементы матриц $(e_r+a_{11}X^{s_1}+\ldots+a_{n1}X^{s_n})^*(a_{13}X^{s_1}+\ldots+a_{n3}X^{s_n})$ и $(a_{12}X^{s_1}+\ldots+a_{n2}X^{s_n})^*(e_r-a_{11}^*X^{s_1}+\ldots+a_{n4}X^{s_n})$ содержатся в $\Lambda[X]$. В частности, диагональные элементы матриц a_{13}, $a_{11}^*a_{13} = a_{13}a_{11}$, a_{12}^* и $a_{12}^*a_{11}^* = (a_{11}a_{12})^*$ содержатся в Λ. Следовательно, диагональные элементы матриц a_{12} и $a_{11}a_{12}$ содержатся в $\bar{\Lambda}$. Таким образом, мы доказали, что матрицы a_{13} и $a_{13}a_{11}$ являются Λ-эрмитовыми; матрицы a_{12} и $a_{11}a_{12}$ являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми и, кроме того, $a_{12}a_{13} = a_{11}^2$. Следовательно, матрица a_1 является нильпотентом степени 2 Λ-унитарного типа и значит, в силу теоремы 1, матрица $e_{2r} + a_1X^{s_1}$ является $\Lambda[X]$-унитарной, причем $(e_{2r} + a_1X^{s_1})^{-1} = e_{2r} - a_1X^{s_1}$. Так как $(e_{2r} - a_1X^{s_1})a_i = a_i(e_{2r} - a_1X^{s_1}) = a_i$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n$ в силу предположения, то умножая матрицу $\gamma(X)$ слева (или справа) на $e_{2r} - a_1X^{s_1}$, получаем $\Lambda[X]$-унитарную матрицу $(e_{2r} - a_1X^{s_1})\gamma(X) = e_{2r} + a_2X^{s_2} + \ldots + a_nX^{s_n}$ и значит доказательство обратного утверждения теоремы 3 завершается по индукции. $\square$

Дадим применения теоремы 3 к изучению структуры унитарных ниль групп.

Теорема 4. 1) *Пусть натуральное число n такое, что $n = n\cdot 1 = 0$ в кольце R, где 1 обозначает единичный элемент кольца R. Тогда любой элемент группы $\operatorname{Unip}_1 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ имеет конечный порядок, делящий число n.*

2) *Пусть натуральное число n такое, что $nR = R$. Тогда группа $\operatorname{Unip}_1 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является однозначно n-делимой.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $z \in \operatorname{Unip}_1 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ и пусть $e_{2k} - X\alpha(X)$ – некоторый его представитель, описанный в теореме 3. Таким образом, $\alpha(X) = \sum_{i=1}^m a_iX^{i-1}$ при некоторых натуральных k, m, причем, если a_i – ненулевая матрица при некотором $1 \leqslant i \leqslant m$, то a_i – нильпотент степени 2 Λ-унитарного типа и матрица $\alpha(X)$ является нильпотентной степени нильпотентности 2.

Докажем первое утверждение. Так как $n = 0$ в кольце R и матрица $\alpha(X)$ является нильпотентной степени нильпотентности 2, то $(e_{2r} - X\alpha(X))^n = e_{2r} - X\sum_{i=1}^m na_iX^{i-1} = e_{2r}$, и значит, $nz = [(e_{2r} - X\alpha(X))^n] = 0$. Следовательно, элемент z имеет конечный порядок, являющийся делителем числа n.

Докажем второе утверждение. Так как n обратим в кольце R и

$$(e_{2r} - \frac{1}{n}X\alpha(X))^n = e_{2r} - X\alpha(X),$$

то $z = n[e_{2r} - \frac{1}{n}X\alpha(X)]$, и n-делимость группы $\operatorname{Unip}_1 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ доказана.

Чтобы доказать однозначную n-делимость, достаточно показать, что группа $\operatorname{Unip}_1 K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ не имеет n-кручения. Предположим, что

$nz = 0$, и пусть $z = [e_{2r} - X\alpha(X)] \in \mathrm{Unip}_1\, K_1U^\lambda(R,\Lambda)$, где матрица $\alpha(X)$ имеет вид, описанный в теореме 3 и, в частности, является нильпотентной степени нильпотентности 2. Следовательно, $(e_{2r} - X\alpha(X))^n = e_{2r} - nX\alpha(X) \in EU^\lambda_{2r}(R[X],\Lambda[X])$. Рассмотрим гомоморфизм групп $\varphi_* : NK_1U^\lambda(R,\Lambda) \longrightarrow NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, индуцированный гомоморфизмом колец $\varphi : R[X] \longrightarrow R[X] : f(X) \longrightarrow f(\frac{1}{n}X)$. Тогда получаем $z = \varphi_*([e_{2r} - nX\alpha(X)] = \varphi_*(0) = 0$, что и завершает доказательство теоремы 4. $\square$

Следствие 1. *Если простое число p такое, что $p^k = 0$ в кольце R, то $\mathrm{Unip}\, K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является p-группой.*

В силу первого утверждения теоремы 4, $p^kz = 0$ для любого $z \in \mathrm{Unip}_1\, K_1U^\lambda(R,\Lambda)$. С другой стороны, в силу первого утверждения теоремы 2, для любого $z \in \mathrm{Unip}_2\, K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ найдется натуральное s такое, что $p^sz = 0$. Следовательно, любой элемент группы $\mathrm{Unip}\, K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ имеет конечный порядок, являющийся степенью простого числа p, и значит, группа $\mathrm{Unip}\, K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является p-группой.

Следствие 2. *Если R является $\mathbf{Q}$-алгеброй, где $\mathbf{Q}$ обозначает поле рациональных чисел, то $\mathrm{Unip}_1\, K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является $\mathbf{Q}$-векторным пространством. Если, кроме того, хотя бы один из гомоморфизмов F или H из теоремы 2 является мономорфизмом, то $\mathrm{Unip}_2\, K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ также является $\mathbf{Q}$-векторным пространством. В этом случае*

$$\mathrm{Unip}_1\, K_1U^\lambda(R,\Lambda) \quad \textit{и} \quad \mathrm{Unip}_2\, K_1U^\lambda(R,\Lambda)$$

являются делимыми группами и, следовательно, выделяются прямыми слагаемыми как в группе $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, так и в группе $\mathrm{Unip}\, K_1U^\lambda(R,\Lambda)$.

Последнее утверждение справедливо в силу хорошо известного результата из теории абелевых групп (см., например, [7, глава 3]).

Список литературы

1. В. И. Копейко, *Нильпотентная по Бассу унитарная K_1-группа унитарного кольца.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **460** (2017), 134–157.
2. В. И. Копейко, *Об унитарных ниль K_1-группах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **513** (2022), 110–119.
3. C. Weibel, *Meyer-Vietoris sequences and module structures on NK_*.* — Lect. Notes Math. **845** (1981), 466–493.
4. A. Bak, *K-theory of forms.* — Annals Math. Stud. **98**, Princeton university press, Princeton, 1981.

5. H. Bass, *Unitary algebraic K-theory.* — Lect. Notes Math. **343** (1973), 57–265.
6. Х. Басс, *Алгебраическая K-теория.* М., Наука, 1973.
7. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп.* 3-е изд., М., Наука, 1982.

Kopeiko V. I. On the structure of some unitary nil K_1-groups.

Several Nil-subgroups of the Bass' nilpotent unitary K_1-group of a unitary ring are introduced and some properties of these Nil-groups are proved. These properties are unitary analog of the well-known properties of the Bass' nilpotent K_1-group of a ring in algebraic K-theory.

Калмыцкий государственный
университет им. Б. Б.Городовикова
ул. Пушкина, 11, 358000 Элиста, Россия
E-mail: kopeiko52@mail.ru

Поступило 7 ноября 2022 г.