Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 522, 2023 г.

**А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, В. А. Рогов**

# КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. X. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

## Введение

Настоящая работа является продолжением серии работ, посвященных исследованию когомологий Хохшильда алгебр диэдрального типа (см. [1–9]). Она посвящена вычислению групп когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^n(R)$ для одной из серий алгебр диэдрального типа из классификации К. Эрдман [10], а именно, для серии исключительных локальных алгебр, появляющихся в случае, когда основное (алгебраически замкнутое) поле имеет характеристику 2.

Пусть $K$ – алгебраически замкнутое поле, $p = \operatorname{char} K$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и, наконец, $c, d \in \{0, 1\}$ – параметры из поля $K$. Рассмотрим $K$-алгебру

$$S_{k,c,d} := K\langle X, Y\rangle/I,$$

где $K\langle X, Y\rangle$ – кольцо многочленов от двух некоммутирующих переменных, а $I$ – двусторонний идеал, порожденный элементами

$$X^2 - c(XY)^k,\ Y^2 - d(XY)^k,\ (XY)^k - (YX)^k,\ Y(XY)^k,\ X(YX)^k.$$

При $c = 0 = d$, т.е. для алгебр $S_{k,0,0}$, алгебра когомологий Хохшильда была вычислена в [2, 3]. Заметим, что если $p \neq 2$, то семейством $\{S_{k,0,0}\}_{k\geqslant 2}$ исчерпываются локальные алгебры диэдрального типа. Но при $p = 2$ (и $(c, d) \neq (0, 0)$) возникают алгебры, которые мы называем “исключительными”. В настоящей работе мы вычисляем группы $\mathrm{HH}^n(R_k)$ для алгебр $R_k := S_{k,1,0}$.

Как и в предыдущих работах, для этой цели строится минимальная проективная бимодульная резольвента для алгебр $R_k$. В изученных ранее случаях матрицы дифференциалов в резольвентах были блочными и одновременно близкими к так называемым “ленточным”, что

---

*Ключевые слова*: группы когомологий Хохшильда, локальные алгебры диэдрального типа, бимодульная резольвента.

Первый из авторов благодарит грант РНФ No. 22-71-10001 за поддержку.

позволяло сравнительно легко обнаруживать закономерности в расположении (довольно малого числа видов) блоков в матрицах дифференциалов.

Для исследуемой здесь серии алгебр “ленточность” матриц дифференциалов в резольвентах не наблюдалась; было трудно отыскать закономерности в изменениях “узора” присутствия или отсутствия блоков на соответствующих местах. Лишь после “ручного подсчёта” вплоть до 64-ого дифференциала резольвенты обнаружилась закономерность так называемого треугольника Серпинского в расположении блоков (этот двоичный узор получается редуцированием биномиальных коэффициентов по модулю 2).

После построения упомянутой бимодульной резольвенты мы используем её для вычисления групп $\mathrm{HH}^n(R_k)$.

Отметим, что, отталкиваясь от результатов настоящей работы, в [15] вычислена алгебра когомологий Хохшильда для второй “подсерии” локальных алгебр, а именно, для $S_{k,1,1}$.

## §1. Предварительные результаты

Пусть $K$ – алгебраически замкнутое поле, $\operatorname{char} K = 2$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Положим $R := R_k = S_{k,1,0}$, и через $x$ и $y$ обозначим образы $X$ и $Y$ при естественном эпиморфизме $K\langle X, Y\rangle \to R$. Множество

$$\{1, x^2\} \cup \{x(yx)^j,\ y(xy)^j\}_{j=0}^{k-1} \cup \{(xy)^j,\ (yx)^j\}_{j=1}^{k-1}$$

является $K$-базисом алгебры $R$, и таким образом, $\dim_K R = 4k$. Введем дополнительно обозначения

$$z_x := x(yx)^{k-1}, \quad z_y := y(xy)^{k-1},$$
$$\widetilde{x} := x + z_y.$$

**Лемма 1.1.** *Минимальной проективной резольвентой единственного простого $R$-модуля ${}_RK$ является следующий комплекс:*

$$K \xleftarrow{\varepsilon} R \xleftarrow{\partial_0} R^2 \xleftarrow{\partial_1} \cdots \longleftarrow R^n \xleftarrow{\partial_{n-1}} \cdots,$$

*где $\varepsilon$ — пополняющее отображение, а для $m \geqslant 0$*

$$\partial_{2m} = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ z_y & 0 & x & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & z_x & 0 & y & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z_y & 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_x & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & z_x & 0 & y \end{pmatrix} : R^{2m+2} \longrightarrow R^{2m+1},$$

$$\partial_{2m+1} = \begin{pmatrix} z_y & \widetilde{x} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ z_x & 0 & y & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & z_y & 0 & \widetilde{x} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z_x & 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_y & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 & \widetilde{x} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & z_x & 0 & y \end{pmatrix} : R^{2m+3} \longrightarrow R^{2m+2}.$$

Доказательство точности построенного комплекса состоит в прямой проверке, и мы оставляем это читателю.

Пусть $\Lambda := R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ — обертывающая алгебра алгебры $R$. Если

$$R \xleftarrow{\eta} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} \cdots \longleftarrow Q_n \xleftarrow{d_n} \cdots$$

– минимальная $\Lambda$-проективная резольвента модуля ${}_\Lambda R$, то по лемме Хаппеля [11] имеем $Q_m \simeq \Lambda^{m+1}$ (см. также [12, лемма 2]). Для нахождения дифференциалов используем следующее утверждение (см. [13]): если последовательность

$$R \xleftarrow{\eta} \Lambda \xleftarrow{d_0} \Lambda^2 \xleftarrow{d_1} \cdots \longleftarrow \Lambda^n \xleftarrow{d_{n-1}} \cdots \tag{1}$$

является комплексом $\Lambda$-модулей и после применения к ней функтора $-\otimes_R K$ получается минимальная $R$-проективная резольвента модуля ${}_R K$, то она сама является минимальной $\Lambda$-проективной резольвентой. Таким образом, осталось лишь подобрать в (1) отображения так, чтобы выполнялись равенства

$$\eta \otimes_R K = \varepsilon,\ d_n \otimes_R K = \partial_n,\ \eta d_0 = 0,\ d^2 = 0.$$

Поскольку дифференциалы $d_n$ действуют между свободными модулями, то мы будем описывать дифференциалы с помощью матриц; при этом компоненты таких матриц рассматриваются как гомоморфизмы умножений справа на соответствующие элементы из $\Lambda$.

## §2. Построение бимодульной резольвенты

Введем дополнительные обозначения:

$$\text{для } r \in R \qquad \Delta r := \Delta(r) := r \otimes 1 + 1 \otimes r;$$

кроме того,

$$L_x := \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^{k-1-i} x \otimes (xy)^i,$$
$$R_x := \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^{k-1-i} \otimes x(yx)^i,$$
$$L_y := \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^{k-1-i} y \otimes (yx)^i,$$
$$R_y := \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^{k-1-i} \otimes y(xy)^i.$$

Полезно заметить, что

$$L_y + R_y = (y \otimes 1 + 1 \otimes y) \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^{k-1-i} \otimes (yx)^i$$

(и аналогичное соотношение имеет место для $L_x + R_x$).

Далее опишем блоки, из которых будем строить матрицы дифференциалов бимодульной резольвенты. Отметим, что блоки $d_0, d_1, \ldots, d_7$ сами являются соответствующими начальными дифференциалами:

$$d_0 = \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} L_y + R_y & \Delta x + L_y & 0 \\ L_x + R_x & R_x & \Delta y \end{pmatrix},$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} \Delta x + y \otimes (xy)^{k-1} & \Delta y & 1 \otimes x & 0 \\ \Delta(z_y) & 0 & \Delta x & 0 \\ (yx)^{k-1} \otimes z_x & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y \end{pmatrix},$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} L_y + R_y & \Delta(\widetilde{x}) & 0 & u_3 & 0 \\ L_x + R_x & v_3 & \Delta y & 1 \otimes z_x + R_x & 0 \\ 0 & \Delta(z_y) & 0 & \widetilde{x} \otimes 1 + 1 \otimes x & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y \end{pmatrix},$$

где

$$u_3 = 1 \otimes x + L_y + z_y \otimes 1, \quad v_3 = 1 \otimes z_x + x \otimes (xy)^{k-1},$$

$$d_4 = \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y & y \otimes (xy)^{k-1} & 0 & 1 \otimes x & 0 \\ \Delta(z_y) & 0 & x \otimes 1 + 1 \otimes \widetilde{x} & 0 & 1 \otimes x & 0 \\ (yx)^{k-1} \otimes z_x & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y \end{pmatrix},$$

$$d_5 = \begin{pmatrix} L_y + R_y & \Delta x + L_y & 0 & u_5 & 0 & 1 \otimes x + L_y + z_y \otimes 1 & 0 \\ L_x + R_x & R_x & \Delta y & v_5 & 0 & 1 \otimes z_x + R_x & 0 \\ 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta(\widetilde{x}) & 0 & 1 \otimes x & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \widetilde{x} \otimes 1 + 1 \otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y \end{pmatrix},$$

где

$$u_5 = L_y + \Delta(z_y), \quad v_5 = 1 \otimes z_x + x \otimes (xy)^{k-1} + R_x,$$

$$d_6 = \begin{pmatrix} \Delta x + y \otimes (xy)^{k-1} & \Delta y & v_6 & 0 & v_6 & 0 & 1 \otimes x & 0 \\ \Delta(z_y) & 0 & \Delta x & 0 & 1 \otimes z_y & 0 & 1 \otimes x & 0 \\ (yx)^{k-1} \otimes z_x & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & u_6 & 0 & 1 \otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y \end{pmatrix},$$

где

$$u_6 = x \otimes 1 + 1 \otimes \widetilde{x}, \quad v_6 = 1 \otimes x + y \otimes (xy)^{k-1},$$

$$d_7 = \begin{pmatrix} L_y+R_y & \Delta(\widetilde{x}) & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & u_3 & 0 \\ L_x+R_x & v_3 & \Delta y & x\otimes(xy)^{k-1} & 0 & x\otimes(xy)^{k-1} & 0 & v_7 & 0 \\ 0 & \Delta(z_y) & 0 & u_7 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta(\widetilde{x}) & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & u_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y \end{pmatrix},$$

где

$$u_7 = \widetilde{x} \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad v_7 = 1 \otimes z_x + R_x,$$

$$
A_0 = \begin{pmatrix}
u_6 & 0 & 1 \otimes \widetilde{x} & 0 & 1 \otimes \widetilde{x} & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & \Delta y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Delta(z_y) & 0 & \Delta x & 0 & 1 \otimes z_y & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & u_6 & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y
\end{pmatrix},
$$

$$
A_1 = \begin{pmatrix}
\Delta(\widetilde{x}) & 0 & 1 \otimes \widetilde{x} & 0 & 1 \otimes \widetilde{x} & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & \Delta y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Delta(z_y) & 0 & u_7 & 0 & 1 \otimes z_y & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta(\widetilde{x}) & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & u_7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y
\end{pmatrix},
$$

$$
l_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & y \otimes (xy)^{k-1} & 0 & 1 \otimes x & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
l_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & u_5 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5 & 0 & v_7 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
l_2 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & y \otimes (xy)^{k-1} & 0 & v_6 & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \otimes z_y & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
l_3 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & u_5 & 0 & 1 \otimes \widetilde{x} & 0 & u_3 & 0 \\
0 & 0 & v_5 & 0 & x \otimes (xy)^{k-1} & 0 & v_7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \otimes z_y & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
l_4 = \begin{pmatrix}
y \otimes (xy)^{k-1} & 0 & 1 \otimes x & 0 & y \otimes (xy)^{k-1} & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & 0 & 1 \otimes z_y & 0 & 1 \otimes \widetilde{x} & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \otimes z_y & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
l_5 = \begin{pmatrix}
u_5 & 0 & u_3 & 0 & u_5 & 0 & u_3 & 0 \\
v_5 & 0 & v_7 & 0 & v_5 & 0 & v_7 & 0 \\
0 & 0 & 1 \otimes z_y & 0 & 1 \otimes \widetilde{x} & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \otimes z_y & 0 & 1 \otimes x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$l_6 = \begin{pmatrix} v_6 & 0 & v_6 & 0 & v_6 & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes \widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$l_6^L = \widetilde{l}_6^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y\otimes (xy)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$l_7 = \begin{pmatrix} 1\otimes \widetilde{x} & 0 & 1\otimes \widetilde{x} & 0 & 1\otimes \widetilde{x} & 0 & u_3 & 0 \\ x\otimes (xy)^{k-1} & 0 & x\otimes (xy)^{k-1} & 0 & x\otimes (xy)^{k-1} & 0 & v_7 & 0 \\ 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes \widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$l_7^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{l}_7^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} \Delta(z_y) & 0 \\ (yx)^{k-1}\otimes z_x & \Delta(z_x) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_i = \begin{pmatrix} 0\ \ldots\ 0 & \Delta(z_y) & 0 \\ 0\ \ldots\ 0 & 0 & \Delta(z_x) \\ 0\ \ldots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \ldots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \ldots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \ldots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \ldots\ 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{i\ \text{штук}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, \ldots, 7).$$

Введем в рассмотрение также нулевые блоки $l_0^L,\ l_1^L, \ldots, l_5^L,\ \widetilde{l}_0^L,\ \widetilde{l}_1^L,$ $\ldots, \widetilde{l}_5^L$, размер которых ясен из контекста. Кроме того, положим $P := P_6,\ A_2 := A_4 := A_6 := A_0,\ A_3 := A_5 := A_7 := A_1$.

Для $n \geqslant 0$ и $0 \leqslant j \leqslant n$ символ $\binom{n}{j}$ обозначает биномиальный коэффициент. Также используем соглашение $\binom{n}{-1} = 0 = \binom{n}{n+1}$.

**Теорема 2.1.** *Сохраняя предыдущие обозначения, рассмотрим последовательность*

$$R \xleftarrow{\eta} \Lambda \xleftarrow{d_0} \Lambda^2 \xleftarrow{d_1} \cdots \longleftarrow \Lambda^t \xleftarrow{d_{t-1}} \cdots, \tag{2}$$

*в которой* $\eta(a \otimes b) = ab$, *а при* $n \geqslant 0$, $0 \leqslant m \leqslant 7$ *матрица гомоморфизма* $d_{8n+m}$ *имеет следующую блочную структуру:*

$$d_{8n+m} = \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix}
d_m+n\tilde{l}^L_m & \binom{n}{n-1}l_m+\binom{n}{n-2}l^L_m & \binom{n}{n-2}l_m+\binom{n}{n-3}l^L_m & \binom{n}{n-3}l_m+\binom{n}{n-4}l^L_m & \dots & \dots & \dots & \binom{n}{1}l_m+l^L_m & l_m \\
P_m & A_m+\binom{n-1}{n-2}B^L & \binom{n-1}{n-2}B+\binom{n-1}{n-3}B^L & \binom{n-1}{n-3}B+\binom{n-1}{n-4}B^L & \dots & \dots & \dots & \binom{n-1}{1}B+B^L & B \\
0 & P & A_m+\binom{n-2}{n-3}B^L & \binom{n-2}{n-3}B+\binom{n-2}{n-4}B^L & \dots & \dots & \dots & \binom{n-2}{1}B+B^L & B \\
0 & 0 & P & A_m+\binom{n-3}{n-4}B^L & \dots & \dots & \dots & \dots & B \\
0 & 0 & 0 & P & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & B^L & B \\
\dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & P & A_m+B^L & B \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & P & A_m
\end{pmatrix},$$

*где справа от блока* $d_m + n\widetilde{l}^L_m$, *расположенного в верхнем левом углу, стоит* $n$ *блоков* (*размера* $8 \times 8$), *и ниже этого блока также стоит* $n$ *блоков* (*размера* $8 \times 8$). *Тогда последовательность* (2) *является минимальной проективной резольвентой модуля* ${}_{\Lambda}R$.

**Замечание 2.2.** Отметим дополнительно, что при $n = 1$ (т.е. в матрице дифференциала $d_{8+m}$) в левом нижнем углу стоит $P_m$.

**Доказательство теоремы** 2.1. Как было отмечено выше, нам надо показать, что

- последовательность (2) является комплексом;
- $\eta \otimes_R K = \varepsilon$, $d_q \otimes_R K = \partial_q$ $(q \geqslant 0)$.

Равенство $\eta \otimes_R K = \varepsilon$ очевидно. Для проверки соотношения $d_q \otimes_R K = \partial_q$ надо заметить, что функтор $- \otimes_R K$ действует на элементы матриц так, что слагаемые вида $a \otimes b$, где $b \in \operatorname{Rad} R$, отображаются в нуль. Поэтому сразу ясно, что этот функтор обнуляет все блоки, за исключением $d_i$, $A_i$, $P_i$. Наконец, для последней группы блоков удается легко обнаружить, что слагаемые вида $a \otimes 1$ из компонент матрицы $d_q$ стоят на тех же позициях, что и элементы $a$ из $\partial_q$.

Ясно, что $\eta d_0 = 0$, и остается проверить, что $d^2 = 0$.

**Лемма 2.3.** *Для блоков, из которых состоят матрицы дифференциалов $d_t$, выполняются следующие соотношения:*

$$d_m d_{m+1} = 0,\ d_m \widetilde{l}^L_{m+1} + \widetilde{l}^L_m d_{m+1} + l_m P_{m+1} = 0,$$
$$\widetilde{l}^L_m \widetilde{l}^L_{m+1} = 0 = l^L_m P_{m+1},$$
$$l^L_m P = 0 = \widetilde{l}^L_m l^L_{m+1} = l^L_m B^L,$$
$$\widetilde{l}^L_m l_{m+1} = l^L_m B,\ d_m l^L_{m+1} + l^L_m A_{m+1} + l_m P = 0,$$
$$l^L_m B + d_m l_{m+1} + l_m A_{m+1} = 0,\ P_m \widetilde{l}^L_{m+1} = 0 = B^L P_{m+1},$$
$$P_m d_{m+1} + A_m P_{m+1} = 0,\ (B^L)^2 = B^L P = P_m l^L_{m+1} = 0,$$
$$P_m l_{m+1} = A_m A_{m+1} = PB,\ A_m A_{m+1} + B^L A_{m+1} + A_m B^L + BP = 0,$$
$$B^2 = BB^L = B^L B,\ A_m A_{m+1} + A_m B + BA_{m+1} + B^2 = 0,$$
$$PP_{m+1} = 0 = PA_{m+1} + A_m P,\ PB^L = B^L P = P^2 = 0.$$

Доказательство леммы состоит в прямых вычислениях, которые мы предоставляем провести читателю.

Пусть $D_{8n+m}$ – матрица, составленная из блоков $d_{8n+m}$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$. Тогда

$$D_{8n+m}[i,j] = \begin{cases} d_m + n\widetilde{l}^L_m, & \text{если}\ \ (i,j) = (0,0), \\ P_m, & \text{если}\ \ (i,j) = (1,0), \\ P, & \text{если}\ \ i-1 = j \geqslant 0, \\ 0, & \text{если}\ \ i-j > 1, \\ A_m + \binom{n-i}{n-i-1} B^L, & \text{если}\ \ i = j \geqslant 1, \\ \binom{n}{n-j} l_m + \binom{n}{n-j-1} l^L_m, & \text{если}\ \ i = 0 < j, \\ \binom{n-i}{n-j} B + \binom{n-i}{n-j-1} B^L, & \text{если}\ \ i > 0,\ 0 < j-i. \end{cases} \tag{4}$$

В силу блочного устройства матриц гомоморфизмов $d_q$ нам надо показать, что при $0 \leqslant m \leqslant 6$

$$\forall i, j \qquad \sum_{t=0}^{n} D_{8n+m}[i,t] D_{8n+m+1}[t,j] = 0. \tag{5}$$

Если же $m = 7$, то мы отделим первый столбец от $d_{8n+7}$: пусть

$$d_7 = \begin{pmatrix} u_7 & d'_7 \end{pmatrix},$$

где

$$u_7 = \begin{pmatrix} L_y + R_y & L_x + R_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Рассмотрим вспомогательную матрицу $\widetilde{D}_{8n+7}$, в которой

$$\widetilde{D}_{8n+7}[i,0] := \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\widetilde{D}_{8n+7}[0,0] := u_7,$$

$$\widetilde{D}_{8n+7}[0,1] := d_7' + nl_7^L,$$

$$\widetilde{D}_{8n+7}[1,1] := P.$$

Кроме того, $\widetilde{D}_{8n+7}[i,1]$ определяется соотношением

$$D_{8n+7}[i,0] = \begin{pmatrix}\widetilde{D}_{8n+7}[i,0] & \widetilde{D}_{8n+7}[i,1]\end{pmatrix} \text{ при } 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Наконец,

$$\widetilde{D}_{8n+7}[i,j] := D_{8n+7}[i,j-1] \text{ при } 2 \leqslant j \leqslant n+1,\ 0 \leqslant i \leqslant n.$$

В этом случае надо доказать, что

$$\forall i,j \qquad \sum_{t=0}^{n+1} \tilde{D}_{8n+7}[i,t] D_{8n+8}[t,j] = 0. \tag{6}$$

Теперь соотношения (5) и (6) устанавливаются с помощью прямых (хотя и утомительных) вычислений, и соответствующие проверки мы предоставляем проделать читателю. □

**Замечание 2.4.** Отметим, что при проверке соотношений (5), (6) довольно часто используются соотношения

$$\text{при } n \geqslant 1 \text{ и } 0 \leqslant j \leqslant n \qquad \sum_{t=1}^{j-1} \binom{n}{n-t}\binom{n-t}{n-j} \equiv 0 \pmod 2.$$

## §3. Вычисление групп когомологий

Применяя $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,R)$ к резольвенте из (2), получим, учитывая стандартные отождествления, следующую последовательность:

$$\mathcal{Q}^\bullet \quad : \quad R \xrightarrow{\delta^0} R^2 \xrightarrow{\delta^1} R^3 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \longrightarrow R^{n+1} \xrightarrow{\delta^n} \cdots,$$

где $\delta^n := \mathrm{Hom}_\Lambda(d_n, R)$. Тогда

$$\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}_\Lambda(R,R) = \mathrm{H}^n(\mathcal{Q}^\bullet).$$

**Замечание 3.1.** Поскольку дифференциалы $\delta^n$ действуют между свободными $R$-модулями, то их вновь можно описывать с помощью матриц. После соответствующих отождествлений матрица $\delta^n$ получается с помощью транспонирования из матрицы $d_n$ (в подходящих базисах). Будет удобно интерпретировать эту связь следующим образом. Мы заменяем действие матрицы $\delta^n$ на элемент $\xi = \bigl(\xi_1, \quad \dots \quad, \xi_{n+1}\bigr) \in R^{n+1}$ действием матрицы $d_n$ с помощью умножения строки $\xi$ на $d_n$ справа: $\xi \mapsto \xi d_n$; при этом слагаемое вида $a \otimes b$ из компоненты $(d_n)_{ij}$ переводит (в соответствии со структурой $\Lambda$-модуля на $R$) компоненту $\xi_i$ в $(a \otimes b) * \xi_i = a \cdot \xi_i \cdot b$. Кроме того, для $\Lambda$-гомоморфизма вида $\varphi\colon \Lambda^k \to \Lambda^\ell$ индуцированный гомоморфизм

$$R^\ell \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^\ell, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^k, R) \simeq R^k$$

обозначим через $\varphi^*$.

В дальнейшем для краткости строка, состоящая из $n$ нулей, будет обозначаться через $\mathrm{O}_n$.

**Предложение 3.2.** *В предыдущих обозначениях*

(а) $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^0 = k + 3,$

(б) $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^1 = \begin{cases} 4k+2, & \textit{если } k \textit{ нечетно,} \\ 4k+3, & \textit{если } k \textit{ четно,} \end{cases}$

(в) $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^2 = 5k + 5,$

(г) $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^3 = 8k + 5,$

(д) для $0 \leqslant q \leqslant 3$

$$\dim_K \operatorname{Ker} \delta^{q+4} - \dim_K \operatorname{Ker} \delta^q = 8k + 5.$$

**Доказательство.** То, что $\dim \operatorname{Ker} \delta^0 = k + 3$, получено в [10, III.1.3].

Далее мы укажем базисы для $\operatorname{Ker} \delta^r$, $1 \leqslant r \leqslant 7$, поскольку их явное описание понадобится также и в дальнейших вычислениях.

Рассуждая аналогично доказательству [14, предложение 4.5], получаем, что при нечётном $k$ следующий набор образует базис $\operatorname{Ker} \delta^1$:

$$
\begin{aligned}
&((xy)^i + (yx)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(x(yx)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(0, y(xy)^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(0, (xy)^i + (yx)^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(x, y),\ ((xy)^{k-1}, 1),\ (y(xy)^{k-1}, 0),\\
&(x^2, 0), (0, x(yx)^{k-1}), (0, x^2).
\end{aligned}
$$

Для получения базиса $\operatorname{Ker}\delta^1$ при чётном $k$ надо элемент $(x, y)$ в указанном выше множестве заменить на пару элементов $(x, 0)$, $(0, y)$.

Аналогичным образом проверяется, что следующий набор образует базис $\operatorname{Ker}\delta^2$:

$$
\begin{aligned}
&((xy)^i + (yx)^i, (xy)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(0, (xy)^i + (yx)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(0, x(yx)^i, 0) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(\mathrm{O}_2, y(xy)^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(\mathrm{O}_2, (xy)^i + (yx)^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2),\ (x^2, \mathrm{O}_2),\ (0, 1, 0),\ (0, y(xy)^{k-1}, 0),\\
&(0, x^2, 0),\ (\mathrm{O}_2, 1),\ (\mathrm{O}_2, x(yx)^{k-1}),\ (\mathrm{O}_2, x^2).
\end{aligned}
$$

Далее, при нечётном $k$ следующий набор образует базис $\operatorname{Ker}\delta^3$:

$$
\begin{aligned}
&((xy)^i + (yx)^i, 0, (xy)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(x(yx)^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(0, y(xy)^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(0, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(\mathrm{O}_2, (xy)^i + (yx)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(\mathrm{O}_2, x(yx)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(\mathrm{O}_3, y(xy)^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(\mathrm{O}_3, (xy)^i + (yx)^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(\widetilde{x}, \mathrm{O}_3),\ (y(xy)^{k-1}, 0, x, 0),\ ((yx)^{k-1}, 1, \mathrm{O}_2),
\end{aligned}
$$

$$(x^2, \mathrm{O}_3),\ (0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2),\ (0, x^2, \mathrm{O}_2),$$
$$(\mathrm{O}_2, y(xy)^{k-1}, 0),\ (\mathrm{O}_2, x^2, 0),\ (\mathrm{O}_3, 1),\ (\mathrm{O}_3, x(yx)^{k-1}),\ (\mathrm{O}_3, x^2).$$

Для $k$ чётного надо в указанном выше множестве вместо элемента $(0, y, \mathrm{O}_2)$ использовать элемент $(x, \mathrm{O}_3)$, а $(\widetilde{x}, \mathrm{O}_3)$ заменить на $(y(xy)^{k-1}, y, \mathrm{O}_2)$.

Далее, следующий набор образует базис $\operatorname{Ker}\delta^4$:

$$((xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_2, (xy)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(0, (xy)^i + (yx)^i, 0, (xy)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(0, x(yx)^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(\mathrm{O}_2, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(\mathrm{O}_2, y(xy)^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(\mathrm{O}_3, (xy)^i + (yx)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(\mathrm{O}_3, x(yx)^i, 0) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(\mathrm{O}_4, (xy)^i + (yx)^i) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(\mathrm{O}_4, y(xy)^i) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(1, 1, \mathrm{O}_3),\ (x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_4),\ (x^2, \mathrm{O}_4),$$
$$(y(xy)^{k-1}, y(xy)^{k-1}),\ (0, x^2, \mathrm{O}_3), (\mathrm{O}_2, 1, \mathrm{O}_2),\ (\mathrm{O}_2, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2),$$
$$(\mathrm{O}_2, x^2, \mathrm{O}_2),\ (\mathrm{O}_3, 1, 0),\ (\mathrm{O}_3, y(xy)^{k-1}, 0),\ (\mathrm{O}_3, x^2, 0),$$
$$(\mathrm{O}_4, 1),\ (\mathrm{O}_4, x(yx)^{k-1}),\ (\mathrm{O}_4, x^2).$$

При нечётном $k$ следующий набор образует базис $\operatorname{Ker}\delta^5$:

$$((xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_3, (xy)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(x(yx)^i, \mathrm{O}_5) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(0, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_4) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(0, y(xy)^i, \mathrm{O}_4) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(\mathrm{O}_2, (xy)^i + (yx)^i, 0, (xy)^i, 0) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(\mathrm{O}_2, x(yx)^i, \mathrm{O}_3) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(\mathrm{O}_3, y(xy)^i, \mathrm{O}_2) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$

$(\mathrm{O}_3, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_2)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_4, (xy)^i + (yx)^i, 0)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_4, x(yx)^i, 0)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_5, y(xy)^i)$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_5, (xy)^i + (yx)^i)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\widetilde{x}, y, \mathrm{O}_4),\ (y(xy)^{k-1}, 0, x, \mathrm{O}_3),\ (x^2, \mathrm{O}_5),$

$((xy)^{k-1}, 1, \mathrm{O}_2, (xy)^{k-1}, 0),\ (0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_4),\ (0, x^2, \mathrm{O}_4),$

$(\mathrm{O}_2, x, 0, x, 0),\ (\mathrm{O}_2, \widetilde{x}, \mathrm{O}_3), (\mathrm{O}_2, x^2, \mathrm{O}_3),$

$(\mathrm{O}_3, 1, \mathrm{O}_2),\ (\mathrm{O}_3, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2),\ (\mathrm{O}_3, x^2, \mathrm{O}_2),$

$(\mathrm{O}_4, y(xy)^{k-1}, 0),\ (\mathrm{O}_4, x^2, 0),\ (\mathrm{O}_5, 1),\ (\mathrm{O}_5, x(yx)^{k-1}),\ (\mathrm{O}_5, x^2).$

При $k$ чётном к этому множеству надо добавить элемент $(x, \mathrm{O}_5)$.

Следующий набор (для любого $k$) образует базис $\operatorname{Ker} \delta^6$:

$((xy)^i + (yx)^i, (yx)^i, 0, (xy)^i, \mathrm{O}_3)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(0, x(yx)^i, \mathrm{O}_5)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(0, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_3, (xy)^i, 0)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_2, y(xy)^i, \mathrm{O}_4)$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_2, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_4)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_3, (xy)^i + (yx)^i, 0, (xy)^i, 0)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_3, x(yx)^i, \mathrm{O}_3)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_4, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_2)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_4, y(xy)^i, \mathrm{O}_2)$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_5, x(yx)^i, 0)$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_5, (xy)^i + (yx)^i, 0)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_6, y(xy)^i)$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_6, (xy)^i + (yx)^i)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_6),\ (x^2, \mathrm{O}_6),\ (0, 1, 0, 1, \mathrm{O}_3),\ (0, x, 0, x, \mathrm{O}_3),$

$(0, y(xy)^{k-1}, 0, y(xy)^{k-1}, \mathrm{O}_3),\ (0, x^2, \mathrm{O}_5),\ (\mathrm{O}_2, 1, \mathrm{O}_4),\ (\mathrm{O}_2, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_4),$

$(\mathrm{O}_2, x^2, \mathrm{O}_4)$, $(\mathrm{O}_3, x^2, \mathrm{O}_3)$, $(\mathrm{O}_4, 1, \mathrm{O}_2)$, $(\mathrm{O}_4, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2)$,
$(\mathrm{O}_4, x^2, \mathrm{O}_2)$, $(\mathrm{O}_5, 1, 0)$, $(\mathrm{O}_5, y(xy)^{k-1}, 0)$, $(\mathrm{O}_5, x^2, 0)$,
$(\mathrm{O}_6, 1)$, $(\mathrm{O}_6, x(yx)^{k-1})$, $(\mathrm{O}_6, x^2)$.

Наконец, с помощью тех же приёмов получаем, что при нечётном $k$ следующий набор образует базис $\operatorname{Ker}\delta^7$:

$((xy)^i + (yx)^i, 0, (yx)^i, 0, (xy)^i, \mathrm{O}_3)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(x(yx)^i, \mathrm{O}_7)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(0, y(xy)^i, \mathrm{O}_6)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(0, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_6)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_2, (xy)^i + (yx)^i, 0, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_3)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_2, x(yx)^i, \mathrm{O}_5)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_3, y(xy)^i, \mathrm{O}_4)$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_3, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_4)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_4, (xy)^i + (yx)^i, 0, (xy)^i, 0)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_4, x(yx)^i, \mathrm{O}_3)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_5, y(xy)^i, \mathrm{O}_2)$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_5, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_2)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_6, (xy)^i + (yx)^i, 0)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_6, x(yx)^i, 0)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_7, y(xy)^i)$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(\mathrm{O}_7, (xy)^i + (yx)^i)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,
$(x, 0, y(xy)^{k-1}, \mathrm{O}_5)$, $(\widetilde{x}, 0, \widetilde{x}, \mathrm{O}_5)$, $(x^2, \mathrm{O}_7)$,
$((yx)^{k-1}, 1, \mathrm{O}_6)$, $(0, y, \widetilde{x}, \mathrm{O}_5)$, $(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_6)$, $(0, x^2, \mathrm{O}_6)$,
$(\mathrm{O}_2, y(xy)^{k-1}, 0, x, \mathrm{O}_3)$, $(\mathrm{O}_2, x^2, \mathrm{O}_5)$, $(\mathrm{O}_3, 1, \mathrm{O}_4)$, $(\mathrm{O}_3, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_4)$,
$(\mathrm{O}_3, x^2, \mathrm{O}_4)$, $(\mathrm{O}_4, \widetilde{x}, \mathrm{O}_3)$, $(\mathrm{O}_4, x, 0, x, 0)$,
$(\mathrm{O}_4, x^2, \mathrm{O}_3)$, $(\mathrm{O}_5, 1, \mathrm{O}_2)$,
$(\mathrm{O}_5, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2)$, $(\mathrm{O}_5, x^2, \mathrm{O}_2)$, $(\mathrm{O}_6, y(xy)^{k-1}, 0)$, $(\mathrm{O}_6, x^2, 0)$,

$(\mathrm{O}_7, 1),\ (\mathrm{O}_7, x(yx)^{k-1}),\ (\mathrm{O}_7, x^2).$

При $k$ чётном для получения базиса $\operatorname{Ker}\delta^7$ надо элементы $(x, 0, y(xy)^{k-1}, \mathrm{O}_5), (\widetilde{x}, 0, \widetilde{x}, \mathrm{O}_5),\ ((yx)^{k-1}, 1, \mathrm{O}_6)$ заменить на элементы

$$(x, \mathrm{O}_7),\ (y(yx)^{k-1}, y, \mathrm{O}_6),\ (y(yx)^{k-1}, 0, x, \mathrm{O}_5).$$

□

**Следствие 3.3.**

(а) $\dim_K \operatorname{Im}\delta^0 = 3k-3,$

(б) $\dim_K \operatorname{Im}\delta^1 = \begin{cases} 4k-2, & \textit{если } k \textit{ нечетно,} \\ 4k-3, & \textit{если } k \textit{ четно,} \end{cases}$

(в) $\dim_K \operatorname{Im}\delta^2 = 7k-5,$

(г) $\dim_K \operatorname{Im}\delta^3 = 8k-5,$

(д) для $0 \leqslant q \leqslant 3$

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^{q+4} - \dim_K \operatorname{Im}\delta^q = 8k-5.$$

**Доказательство.** Утверждение следует из того, что

$$\dim \operatorname{Ker}\delta^q + \dim \operatorname{Im}\delta^q = \dim R^{q+1} = 4k(q+1). \tag{7}$$

□

**Следствие 3.4.** *Пусть $R = R_k$, $k \geqslant 2$. Тогда:*

(а) $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k+3,$

(б) $\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+5, & \textit{если } k \textit{ нечетно,} \\ k+6, & \textit{если } k \textit{ четно,} \end{cases}$

(в) $\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+7, & \textit{если } k \textit{ нечетно,} \\ k+8, & \textit{если } k \textit{ четно,} \end{cases}$

(г) $\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = k+10,$

(д) для $q \in \{0,1,2,3\}$

$$\dim_K \mathrm{HH}^{q+4}(R) - \dim_K \mathrm{HH}^q(R) = 10.$$

**Доказательство.** Утверждение вытекает из предложения 3.2 и следствия 3.3. □

**Замечание 3.5.** Для дальнейшего будет полезно описание базиса пространства $\operatorname{Ker}(d_7+\widetilde{l}_7^L)^*$ в случае нечётного $k$. Для его получения надо в указанном выше базисе для $\operatorname{Ker}\delta^7$ заменить элементы

$$(x,0,y(xy)^{k-1},\mathrm{O}_5),\ (0,y,\widetilde{x},\mathrm{O}_5)$$

на элементы $(x,\mathrm{O}_7)$, $(z_y,y,\mathrm{O}_6)$. Отметим также, что

$$\operatorname{Ker}\delta^6=\operatorname{Ker}(d^6+\widetilde{l}_6^L)^*.$$

В частности,

$$\dim\operatorname{Im}(d_6+\widetilde{l}_6^L)^*=15k-10,\quad \dim\operatorname{Im}(d_7+\widetilde{l}_7^L)^*=16k-10.$$

**Лемма 3.6.**

$$\dim\operatorname{Ker}A_0^*=\dim\operatorname{Ker}A_1^*=16k-10, \tag{8}$$
$$\dim\operatorname{Im}A_0^*=\dim\operatorname{Im}A_1^*=16k+10. \tag{9}$$

**Доказательство.** Прямые вычисления показывают, что следующие элементы из $R^8$ образуют базис $\operatorname{Ker}A_0^*$:

$(x(yx)^i,\mathrm{O}_7)$ для $1\leqslant i\leqslant k-1$,

$((xy)^i+(yx)^i,0,(yx)^i,0,(xy)^i,\mathrm{O}_3)$ для $1\leqslant i\leqslant k-1$,

$(0,(xy)^i+(yx)^i,\mathrm{O}_6)$ для $1\leqslant i\leqslant k-1$,

$(0,y(xy)^i,\mathrm{O}_6)$ для $0\leqslant i\leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_2,x(yx)^i,\mathrm{O}_5)$ для $1\leqslant i\leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_2,(xy)^i+(yx)^i,\mathrm{O}_3,(xy)^i,0)$ для $1\leqslant i\leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_3,y(xy)^i,\mathrm{O}_4)$ для $0\leqslant i\leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_3,(xy)^i+(yx)^i,\mathrm{O}_4)$ для $1\leqslant i\leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_4,x(yx)^i,\mathrm{O}_3)$ для $1\leqslant i\leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_4,(xy)^i+(yx)^i,0,(xy)^i,0)$ для $1\leqslant i\leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_5,y(xy)^i,\mathrm{O}_2)$ для $0\leqslant i\leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_5,(xy)^i+(yx)^i,\mathrm{O}_2)$ для $1\leqslant i\leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_6,(xy)^i+(yx)^i,0)$ для $1\leqslant i\leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_6,x(yx)^i,0)$ для $0\leqslant i\leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_7, y(xy)^i)$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(\mathrm{O}_7, (xy)^i + (yx)^i)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$,

$(x^2, \mathrm{O}_7),\ (0,1,\mathrm{O}_6),\ (0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_6),\ (0, x^2, \mathrm{O}_6),$

$(\mathrm{O}_2, x^2, \mathrm{O}_5),\ (\mathrm{O}_3, 1, \mathrm{O}_4),\ (\mathrm{O}_3, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_4),$

$(\mathrm{O}_3, x^2, \mathrm{O}_4),\ (\mathrm{O}_4, x^2, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_5, 1, \mathrm{O}_2),$

$(\mathrm{O}_5, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2),\ (\mathrm{O}_5, x^2, \mathrm{O}_2),\ (\mathrm{O}_7, 1),$

$(\mathrm{O}_7, y(xy)^{k-1}),\ (\mathrm{O}_7, x(yx)^{k-1}),\ (\mathrm{O}_7, x^2),$

$$\left.\begin{aligned}&(\mathrm{O}_2, 1, 0, 1, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_2, x, 0, x, \mathrm{O}_3),\\ &(\mathrm{O}_2, y(xy)^{k-1}, 0, y(xy)^{k-1}, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_6, 1, 0)\ (\mathrm{O}_6, x^2, 0).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для получения базиса $\operatorname{Ker} A_1^*$ надо в указанном выше базисе для $\operatorname{Ker} A_0^*$ набор элементов из (10) заменить на набор

$$\left.\begin{aligned}&(x, 0, y(xy)^{k-1}, \mathrm{O}_5),\ (y(xy)^{k-1}, 0, x, \mathrm{O}_5),\\ &(\mathrm{O}_2, y(xy)^{k-1}, 0, x, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_4, \widetilde{x}, \mathrm{O}_3)\ (\mathrm{O}_4, x, 0, x, 0).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$\square$

**Замечание 3.7.** Нам понадобится также описание базиса пространства $\operatorname{Ker}(A_1 + B^L)^*$. Легко видеть, что для его получения достаточно в указанном выше базисе для $\operatorname{Ker} A_1^*$ элемент $(x, 0, z_y, \mathrm{O}_5)$ заменить на $(x, \mathrm{O}_7)$.

Мы будем использовать следующее элементарное вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.8.** *Пусть*

$$a = \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & v \end{pmatrix} : X \oplus Y \to X_1 \oplus Y_1$$

*– линейное отображение между прямыми суммами (конечномерных) линейных пространств над полем $K$, имеющее указанный матричный вид относительно данных прямых разложений. Если*

$$w(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Im} v, \tag{12}$$

*то*

$$\dim_K \operatorname{Im} a = \dim_K \operatorname{Im} u + \dim_K \operatorname{Im} v.$$

Введём дополнительные обозначения, связанные с блочной структурой матриц дифференциалов $\delta^r$. Рассмотрим прямое разложение области определения дифференциала

$$\delta^{8n+m}\colon R^{8n+m+1} \to R^{8n+m+2},$$

соответствующее этой блочной структуре:

$$R^{8n+m+1} = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_{n+1},$$

где

$$V_1 = R^{m+1}, \text{ а для } i \geqslant 2 \ \ V_i = R^8.$$

Пусть $\mathcal{C}_{(t)}$, где $1 \leqslant t \leqslant n+1$, обозначает ограничение дифференциала $\delta^{8n+m}$ на пространство $V_{n+2-t}$, иными словами, действие оператора $\mathcal{C}_{(t)}$ описывается $t$-ой снизу строкой блоков матрицы дифференциала $d_{8n+m}$.

**Предложение 3.9.** *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \{0, 1, \ldots, 7\}$*

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^{8n+m} = \dim_K \operatorname{Im} \delta^m + n \dim_K \operatorname{Im}(A_m)^*.$$

**Доказательство.** Строение матрицы дифференциала $\delta^{8n+m}$, где $0 \leqslant m \leqslant 7$, позволяет для каждого фиксированного $m$ проводить в некоторых рассуждениях индукцию по $n$. Мы подробно исследуем случай $m = 7$. Большинство остальных случаев несколько проще его, и мы оставляем читателю проведение детальных рассуждений в них.

Кроме того, случаи $k$ нечётного и $k$ чётного весьма сходны, потому мы подробно проанализируем только случай нечётных $k$ (напомним, что $k$ – параметр, входящий в определяющие соотношения алгебр $R_k$).

Чтобы проверить выполнимость условия (12) в контексте предложения 3.9, сначала убедимся, что при нечётном $n$

$$\mathcal{C}_{(n)}\bigl(\operatorname{Ker} A_1^*\bigr) \subset \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Im} \mathcal{C}_{(i)},$$

а при чётном $n$

$$\mathcal{C}_{(n)}\bigl(\operatorname{Ker}(A_1 + B^L)^*\bigr) \subset \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Im} \mathcal{C}_{(i)}.$$

Предположим, что $n$ нечётно. Для элемента $a$ из базиса $\operatorname{Ker} A_1^*$ (см. доказательство леммы 3.6) положим

$$\alpha_{(n)} = \mathcal{C}_{(n)}(a),$$

а затем будем подбирать элемент $b \in R^8 \simeq V_{n+2-t}$ так, чтобы для

$$\beta_{(t)} = \mathcal{C}_{(t)}(b),\ t < n, \tag{13}$$

выполнялось соотношение

$$\alpha_{(n)} \in {}_K\langle \{\beta_{(t)}\}_{t<n} \rangle. \tag{14}$$

Пусть $a = (x, 0, z_y, \mathrm{O}_5)$. Тогда для $b = (\mathrm{O}_4, x, \mathrm{O}_3)$ прямыми вычислениями получаем, что

$$\alpha_{(n)} = \sum_{t=1}^{n-1} \binom{n}{t-1} \beta_{(t)}. \tag{15}$$

Подобным образом для $a = (\mathrm{O}_4, \widetilde{x}, \mathrm{O}_3)$ и $b = (z_y, 0, z_y, \mathrm{O}_5)$ находим соотношение

$$\alpha_{(n)} = \sum_{t=1}^{n-1} \binom{n-1}{t-1} \beta_{(t)},$$

и это же соотношение выполняется для $a = (\mathrm{O}_4, x, 0, x, 0)$, если в (13) вновь взять $b = (z_y, 0, z_y, \mathrm{O}_5)$.

Для остальных элементов $a$ из рассматриваемого базиса (см. доказательство леммы 3.6) включение (14) проверяется ещё проще.

Предположим, что $n$ чётно. Ввиду замечания 3.7 нам осталось рассмотреть только элемент $a = (x, \mathrm{O}_8)$. В этом случае снова берем $b = (\mathrm{O}_4, x, \mathrm{O}_3)$ и получаем соотношение (15).

Отметим, что предыдущие рассуждения остаются справедливыми для любого нечётного $m$.

Первую (сверху) строку блоков в $\delta^{8n+7}$ надо рассмотреть отдельно (мы по-прежнему предполагаем, что $k$ нечётно). Пусть

$$\gamma_{(n)} = \mathcal{C}_{(n+1)}(a), \tag{16}$$

(где действие оператора $\mathcal{C}_{(n+1)}$ описывается именно верхней строкой блоков в $d_{8n+7}$).

Предположим, что $n$ нечётно; в этом случае элемент $a$ из (16) будет пробегать базис пространства $\mathrm{Ker}(d_7 + \widetilde{l}_7^L)^*$ (см. замечание 3.5). Если $a = (x, \mathrm{O}_7)$ или $a = (z_y, y, \mathrm{O}_6)$, то полагая

$$\beta_{(t)} = \mathcal{C}_{(t)}(b),\ t \leqslant n, \tag{17}$$

где $b = (\mathrm{O}_2, z_y, \mathrm{O}_5)$, приходим к соотношению

$$\gamma_{(n)} = \sum_{t=1}^{n} \binom{n+1}{t-1} \beta_{(t)}.$$

Для $a = (\mathrm{O}_4, \widetilde{x}, \mathrm{O}_3)$ или $a = (\mathrm{O}_4, x, 0, x, 0)$ в (17) возьмём

$$b = (\mathrm{O}_2, x, 0, x, 0, \mathrm{O}_3),$$

и тогда получим соотношение

$$\gamma_{(n)} = \sum_{t=1}^{n} \binom{n}{t-1} \beta_{(t)}.$$

Для остальных элементов из базиса $\mathrm{Ker}(d_7 + \widetilde{l}_7^L)^*$ включение

$$\gamma_{(n)} \in_K \langle \{\beta_{(t)}\}_{t \leqslant n} \rangle \tag{18}$$

проверяется проще.

Наконец, пусть $n$ чётно. Ввиду замечания 3.5 осталось рассмотреть только $a = (x, 0, z_y, \mathrm{O}_5)$ и $a = (0, y, \widetilde{x}, \mathrm{O}_5)$. В обоих случаях

$$\gamma_{(n)} = \sum_{t=1}^{n} \binom{n+1}{t-1} \beta_{(t)},$$

где $\beta_{(t)} = \mathcal{C}_{(t)}(b)$ для $b = (\mathrm{O}_4, x, \mathrm{O}_3)$. □

**Следствие 3.10.** *Для любого* $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(а) $\dim_K \mathrm{Im}\, \delta^{q+4} - \dim_K \mathrm{Im}\, \delta^q = 8k - 5$,

(б) $\dim_K \mathrm{Ker}\, \delta^{q+4} - \dim_K \mathrm{Ker}\, \delta^q = 8k + 5$.

**Доказательство.** Первое утверждение вытекает непосредственно из следствий 3.3 и 3.10, а также из леммы 3.6. Второе утверждение следует из первого ввиду соотношения (7). □

**Теорема 3.11.** *Пусть* $R = R_k$, $k \geqslant 2$. *Тогда:*

(а) $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + 3$,

(б) $\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+5, & \textit{если } k \textit{ нечетно}, \\ k+6, & \textit{если } k \textit{ четно}, \end{cases}$

(в) $\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+7, & \textit{если } k \textit{ нечетно}, \\ k+8, & \textit{если } k \textit{ четно}, \end{cases}$

(г) $\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = k + 10$,

(д) для $q \geqslant 4$

$$\dim_K \mathrm{HH}^q(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{q-4}(R) = 10.$$

**Доказательство.** Для $q \leqslant 4$ соответствующие утверждения уже доказаны (см. следствие 3.4). При $q \geqslant 5$ требуемое утверждение вытекает из следствия 3.10. $\square$

## Список литературы

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике* 2. — Алгебра и анализ, **16**, No. 6 (2004), 53–122.
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 375 (2010), 92–129.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып.1 (2010), 28–38.
4. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IV. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 423 (2014), 67–104.
5. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* V. *Серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **430** (2014), 74–102.
6. А. И. Генералов, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VI. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,1)$. — Алгебра и анализ, т. 27 (2015), № 6, 89–116.
7. А. И. Генералов, М. А. Филиппов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VII. *Серия* $D(3\mathcal{R})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 460 (2017), 53–81.
8. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VIII. *Алгебра когомологий для серии* $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 470 (2018), 50–87.
9. А. И. Генералов, М. А. Качалова, П. А. Мостовский, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IX. *Алгебра когомологий для серии* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 513 (2022), 30–56.
10. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math., v. 1428. Berlin; Heidelberg. 1990.
11. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras.* – Lect. Notes Math., v. 1404 (1989), 108-126.
12. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 321 (2005), 36–66.
13. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* – Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 375 (2010), 61–70.
14. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* V. *Серия* $SD(3\mathcal{K})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 435 (2015), 5–32.
15. М. А. Качалова, *Алгебра когомологий Хохшильда исключительных локальных алгебр диэдрального типа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 513 (2022), 85–109.

Generalov A. I., Zilberbord I. M., Rogov V. A. Hochschild cohomology for algebras of dihedral type. X. Exceptional local algebras.

The Hochschild cohomology groups are computed for “exceptional” local algebras of dihedral type (from the famous K. Erdmann’s classification) which appear when the base field has characteristic 2. In the calculation, we use the beforehand construction of the bimodule resolution for the algebras in question.

С.Петербургский
государственный университет
Университетская наб., д. 7/9
199034 Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: `ageneralov@gmail.com`
*E-mail*: `igorr-5@yandex.ru`

HSBC Service Delivery (Polska) Sp. z o.o.
*E-mail*: `domiquevderevne@yandex.ru`

Поступило 4 мая 2023 г.