Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 522, 2023 г.

**Е. Ю. Воронецкий**

# ДРУГОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП СТЕЙНБЕРГА

## §1. Введение

В статье [10] В. ван дер Каллен доказал, что линейная группа Стейнберга $\mathrm{St}(n, K)$ над коммутативным кольцом $K$ является центральным расширением элементарной линейной группы $\mathrm{E}(n, K)$ при $n \geqslant 4$. Точнее, он показал, что группа Стейнберга допускает более инвариантное представление и на самом деле является скрещенным модулем над полной линейной группой $\mathrm{GL}(n, K)$. Это было обобщено М. Туленбаевым в [3] на линейные группы над почти коммутативными кольцами.

Для симплектических групп такой результат был доказан А. Лавреновым в [5]. Он использовал тот же подход: существует другое представление симплектической группы Стейнберга $\mathrm{StSp}(2\ell, K)$ над коммутативным кольцом $K$ при $\ell \geqslant 3$ такое, что эта группа очевидным образом является центральным расширением элементарной симплектической группы $\mathrm{ESp}(2\ell, K)$. Вместе с С. Синчуком он также доказал центральность соответствующих $K_2$-функторов для групп Шевалле типов $\mathsf{D}_\ell$ при $\ell \geqslant 3$ и $\mathsf{E}_\ell$ в [6, 9], используя другой метод.

Другое представление для ортогональных группы было доказано С. Бёге в [4], но только для полей характеристики отличной от 2. Она также рассмотрела достаточно изотропные ортогональные группы вместо расщепимых.

В [11] мы передоказали, что $\mathrm{St}(n, K)$ является скрещенным модулем над $\mathrm{GL}(n, K)$, используя про-группы. Этот более мощный метод позволил обобщить результат на изотропные линейные группы над почти коммутативными кольцами и на матричные линейные группы над

*Ключевые слова*: нечётные унитарные группы, относительные группы Стейнберга.

Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и программой социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпром нефть”.

некоммутативными кольцами, удовлетворяющими условию на локальный стабильный ранг. Вместе с Лавреновым и Синчуком мы применили в [7] метод про-групп к простым односвязным группам Шевалле ранга по крайней мере 3. Такой же результат для изотропных нечётных унитарных групп (включающих в себя группы Шевалле типов $\mathsf{A}_\ell$, $\mathsf{B}_\ell$, $\mathsf{C}_\ell$ и $\mathsf{D}_\ell$ ) был доказан в [12] и в [1]. Для групп Шевалле ранга 2 существуют контрпримеры, их можно найти в [14].

Сам по себе метод про-групп не даёт «другое представление» соответствующей группы Стейнберга. В этой статье мы докажем следующее:

**Теорема.** *Пусть $K$ – это коммутативное кольцо с единицей, $M$ – $K$-модуль конечного представления с квадратичной формой $q$ и попарно ортогональными гиперболическими парами $(e_{-1}, e_1), \ldots, (e_{-\ell}, e_\ell)$ при $\ell \geqslant 3$. Тогда ортогональная группа Стейнберга $\mathrm{StO}(M, q)$ изоморфна абстрактной группе $\mathrm{StO}^*(M, q)$ с образующими $X^*(u, v)$, где $u, v \in M$ являются векторами, и лежит в орбите $e_1$ действия ортогональной группы и $u \perp v$. Соотношениями являются*

- $X^*(u, v + v') = X^*(u, v)\, X^*(u, v')$ ;
- $X^*(u, v)\, X^*(u', v')\, X^*(u, v)^{-1} = X^*(T(u, v)\, u', T(u, v)\, v')$, *где $T(u, v)$ – это соответствующая ESD-трансвекция;*
- $X^*(u, va) = X^*(v, -ua)$, *если $(u, v)$ лежит в орбите $(e_1, e_2)$ ;*
- $X^*(u, ua) = 1$.

Используя этот вариант "другого представления", очевидным образом получаем, что $\mathrm{StO}(M, q)$ является скрещенным модулем над $\mathrm{O}(M, q)$.

В процессе доказательства мы также дадим общее определение ESD-трансвекций $X(u, v) \in \mathrm{StO}(M, q)$, где $u$ является членом гиперболической пары и $v \perp u$. Такие элементы переходят в обычные ESD-трансвекции $T(u, v) \in \mathrm{O}(M, q)$ и удовлетворяют разным тождествам, но их существование для любых таких $u$ мы не доказываем.

Автор хочет выразить благодарность Н. А. Вавилову, С. Синчуку и А. Лавренову за мотивацию и полезные обсуждения. Также он хочет поблагодарить П. Гвоздевского за полезные комментарии.

## §2. Ортогональные про-группы Стейнберга

Мы будем использовать теоретико-групповые обозначения ${}^g h = ghg^{-1}$ и $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Если группа $G$ действует автоморфизмами на группе $H$, то действие будет обозначаться через ${}^g h$.

Рассмотрим коммутативное кольцо $K$ с единицей, $K$-модуль $M$ конечного представления с квадратичной формой $q\colon M \to K$ и соответствующую симметричную билинейную форму $\langle m, m' \rangle = q(m + m') - q(m) - q(m)$. Ортогональная группа $\mathrm{O}(M, q)$ состоит из линейных автоморфизмов $g \in \mathrm{GL}(M)$ таких, что $q(gm) = q(m)$ для всех $m$. Гиперболическая пара $(u, v)$ в $M$ – это пара векторов со свойствами $\langle u, v \rangle = 1$ и $q(u) = q(v) = 0$.

Возьмём векторы $u, v \in M$ со свойствами $q(u) = \langle u, v \rangle = 0$. Тогда оператор

$$T(u, v)\colon M \to M,\ m \mapsto m + u\,\langle v, m \rangle - v\,\langle u, m \rangle - u\,q(v)\,\langle u, m \rangle$$

называется трансвекцией Эйхлера–Зигеля–Диксона (или ESD-трансвекцией) с параметрами $u$ и $v$, в [2] эти операторы описаны в более общем контексте. Следующая лемма перечисляет известные свойства таких операторов, все они могут быть проверены прямым вычислением.

**Лемма 1.** *Каждая ESD-трансвекция лежит в ортогональной группе* $\mathrm{O}(M, q)$. *Кроме того,*

- $T(u, v)\,T(u, v') = T(u, v + v')$ *при* $q(u) = \langle u, v \rangle = \langle u, v' \rangle = 0$;
- $T(ua, v) = T(u, va)$ *при* $q(u) = \langle u, v \rangle = 0$ *и* $a \in K$;
- ${}^g T(u, v) = T(gu, gv)$ *при* $q(u) = \langle u, v \rangle = 0$ *и* $g \in \mathrm{O}(M, q)$;
- $T(u, v) = T(v, -u)$ *при* $q(u) = q(v) = \langle u, v \rangle = 0$;
- $T(u, ua) = 1$ *при* $q(u) = 0$ *и* $a \in K$.

С этого момента предположим, что в $M$ имеются попарно ортогональные гиперболические пары $(e_{-1}, e_1), \ldots, (e_{-\ell}, e_\ell)$ при $\ell \geqslant 3$. Обозначим ортогональное дополнение к линейной оболочке этих векторов через $M_0$.

Напомним, что элементарные ортогональные трансвекции длинного корневого типа – это элементы $t_{ij}(a) = T(e_i, e_{-j}a) = T(e_{-j}, -e_i a)$ при $i \neq \pm j$ и $a \in K$, элементарные ортогональные трансвекции короткого корневого типа – это $t_j(m) = T(e_{-j}, -m)$ при $m \in M_0$. Эти элементы являются в точности элементарными трансвекциями группы

$\mathrm{O}(M,q)$, рассматриваемой как изотропная нечётная унитарная группа, но с несколько другими параметризациями. Подробности можно найти в [2] или [13]. Ясно, что

$$T(e_i,m)=t_{-i}(-m_0)\prod_{j\neq\pm i}t_{i,-j}(m_j)$$

при условии $\langle e_i,m\rangle=0$, где $m=m_0+\sum_{1\leqslant|j|\leqslant\ell}e_jm_j$ и $m_0\in M_0$.

Ортогональная группа Стейнберга $\mathrm{StO}(M,q)$ – это абстрактная группа с образующими $x_{ij}(a)$ и $x_j(m)$ при $a\in K$, $m\in M_0$ и $i\neq\pm j$. Соотношения между ними имеют следующий вид:

- $x_{ij}(a+b)=x_{ij}(a)\,x_{ij}(b)$;
- $x_{ij}(a)=x_{-j,-i}(-a)$;
- $x_i(m+m')=x_i(m)\,x_i(m')$;
- $[x_{ij}(a),x_{kl}(b)]=1$ при $j\neq k\neq -i\neq -l\neq j$;
- $[x_{ij}(a),x_{j,-i}(b)]=1$;
- $[x_{ij}(a),x_{jk}(b)]=x_{ik}(ab)$ при $i\neq\pm k$;
- $[x_i(m),x_j(m')]=x_{-i,j}(-\langle m,m'\rangle)$ при $i\neq\pm j$;
- $[x_i(m),x_{jk}(a)]=1$ при $j\neq i\neq -k$;
- $[x_i(m),x_{ij}(a)]=x_{-i,j}(-q(m)\,a)\,x_j(ma)$.

Имеется гомоморфизм групп

$$\mathrm{st}\colon\ \mathrm{StO}(M,q)\to\mathrm{O}(M,q),\ \ x_{ij}(a)\mapsto t_{ij}(a),\ \ x_j(m)\mapsto t_j(m).$$

Его образ – это элементарная ортогональная группа $\mathrm{EO}(M,q)$, то есть подгруппа $\mathrm{O}(M,q)$, порождённая элементарными ортогональными трансвекциями.

Мы хотим найти аналог ESD-трансвекций в группе Стейнберга $\mathrm{StO}(M,q)$. Для этого воспользуемся результатами [12] или [1] (если $q$ расщепимая чётного ранга, то достаточно использовать случай $\mathsf{D}_\ell$, рассмотренный в [7]). В дальнейшем будем предполагать, что читатель знаком с понятием про-пополнения категории. Напомним, что имеется «забывающий» функтор из категории про-групп $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$ в категорию групповых объектов в категории про-множеств $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Этот функтор вполне строгий, так что будем отождествлять про-группы с соответствующими про-множествами. Проективные пределы в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ будем обозначать через $\varprojlim^{\mathrm{Pro}}$, а различные про-множества будем указывать с верхним индексом $(\infty)$, например, как $X^{(\infty)}$. Обе категории $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$, $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ полны и кополны.

Также будем использовать следующее соглашение из [7, 11, 12]: если морфизм между про-множествами задаётся термом первого порядка (возможно, многосортным), то будем добавлять верхний индекс $(\infty)$ к формальным переменным. Например, $[g^{(\infty)}, h^{(\infty)}]$ обозначает коммутатор $G^{(\infty)} \times G^{(\infty)} \to G^{(\infty)}$ для про-группы $G^{(\infty)}$, а $m^{(\infty)} a^{(\infty)}$ обозначает умножение $M^{(\infty)} \times K^{(\infty)} \to M^{(\infty)}$ для про-кольца $K^{(\infty)}$ и про-модуля $M^{(\infty)}$ над ним. Области таких переменных обычно ясны из контекста.

Для любого $s \in K$ можно ввести коммутативную $K$-алгебру без единицы $K^{(s)} = \{a^{(s)} \mid a \in K\}$, называемую $s$-гомотопом $K$. Операции в ней задаются как

$$a^{(s)} + b^{(s)} = (a+b)^{(s)}, \quad a^{(s)} b = (ab)^{(s)}, \quad a^{(s)} b^{(s)} = (abs)^{(s)}.$$

Аналогично, $M^{(s)} = \{m^{(s)} \mid m \in M\}$ является неунитальным $K^{(s)}$-модулем и унитальным $K$-модулем относительно операций

$$m^{(s)} + m'^{(s)} = (m+m')^{(s)}, \quad m^{(s)} a = (ma)^{(s)}, \quad m^{(s)} a^{(s)} = (mas)^{(s)}.$$

Формы на $M$ можно продолжить на $M^{(s)}$ как

$$q\big(m^{(s)}\big) = (q(m)\, s)^{(s)}, \quad \big\langle m^{(s)}, m'^{(s)} \big\rangle = (\langle m, m' \rangle\, s)^{(s)}.$$

Заметим, что в определении $\mathrm{StO}(M, q)$ не используется единица кольца $K$. Так что можно определить $\mathrm{StO}^{(s)}(M, q) = \mathrm{StO}(M^{(s)}, q)$ такими же образующими и соотношениями, но с параметрами из $K^{(s)}$ и $M_0^{(s)}$. Если $s, s' \in K$, то есть гомоморфизмы

$$K^{(ss')} \to K^{(s)}, a^{(ss')} \mapsto (as')^{(s)},$$
$$M^{(ss')} \to M^{(s)}, m^{(ss')} \mapsto (ms')^{(s)},$$

и очевидный гомоморфизм $\mathrm{StO}^{(ss')}(M, q) \to \mathrm{StO}^{(s)}(M, q)$ между группами Стейнберга.

Зафиксируем мультипликативное подмножество $S \subseteq K$. Формальный проективный предел $K^{(\infty,S)} = \varprojlim^{\mathrm{Pro}}_{s \in S} K^{(s)}$ на самом деле является про-$K$ -алгеброй без единицы, $M^{(\infty,S)} = \varprojlim^{\mathrm{Pro}}_{s \in S} M^{(s)}$ – про-$K$ -модулем. Аналогично, про-группа Стейнберга

$$\mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M, q) = \varprojlim_{s \in S}^{\mathrm{Pro}} \mathrm{StO}^{(s)}(M, q)$$

на самом деле является про-группой. Если $S = K \setminus \mathfrak{p}$ для простого идеала $\mathfrak{p}$, то мы будем писать $K^{(\infty,\mathfrak{p})}$, $M^{(\infty,\mathfrak{p})}$ и $\mathrm{StO}^{(\infty,\mathfrak{p})}(M, q)$ вместо

$K^{(\infty,S)}$, $M^{(\infty,S)}$ и $\mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M,q)$. Аналогично, если $S=\{1,f,f^2,\ldots\}$ для $f\in K$, то внутри индексов будем писать $f$ вместо $S$. Наконец, конструкции $K^{(\infty,S)}$, $M^{(\infty,S)}$ и $\mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M,q)$ являются контравариантными функторами по $S$, в случае $S=\{1\}$ получаются $K$, $M$ и $\mathrm{StO}(M,q)$ с точностью до канонических изоморфизмов. Имеются корректно определённые морфизмы про-групп

$$x_{ij}\colon K^{(\infty,S)}\to \mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M,q) \text{ и } x_j\colon M_0^{(\infty,S)}\to \mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M,q),$$

они порождают про-группу Стейнберга в категорном смысле в силу [12, лемма 5] или [1, начало §3.3].

Чтобы применить основные результаты [12] или [1], нам понадобится лемма.

**Лемма 2.** *Пусть* $(R,\Delta)$ *– это нечётная форменная* $K$*-алгебра, построенная по* $(M,q)$ *как в* [13] *или* [1, §1.1]. *Тогда* $R$ *локально конечна, то есть любое конечное подмножество* $R$ *порождает конечную подалгебру. Конструкция* $(R,\Delta)$ *перестановочна с локализацией.*

**Доказательство.** Здесь мы будем использовать конечную представимость модуля $M$. Так как $M$ имеет конечный тип, $K$-алгебра $\mathrm{End}_K(M)$ локально конечна, являясь факторалгеброй подалгебры $\{x\in \mathrm{M}(n,K)\mid xN\leqslant N\}$ у $\mathrm{M}(n,K)$, где $0\to N\to K^n\to M\to 0$ – короткая точная последовательность. Тогда $R$ тоже локально конечно, по определению это алгебра

$$\{(x^{\mathrm{op}},y)\in \mathrm{End}_K(M)^{\mathrm{op}}\times \mathrm{End}_K(M)\mid \langle xm,m'\rangle=\langle m,ym'\rangle \\ \text{для всех } m,m'\in M\}.$$

Теперь вспомним, что $M$ конечного представления. Это значит, что конструкция $\mathrm{End}_K(M)$ перестановочна с локализацией, то есть отображение $S^{-1}\mathrm{End}_K(M)\to \mathrm{End}_{S^{-1}K}(S^{-1}M)$ является изоморфизмом для всех мультипликативных подмножеств $S\subseteq K$. Тогда конструкция $R$ также перестановочна с локализацией. Наконец,

$$\Delta=\big\{(x^{\mathrm{op}},y;z^{\mathrm{op}},w)\in R\times R\mid xy+z+w=0, q(ym)+\langle m,wm\rangle=0 \\ \text{для всех } m\in M\}.$$

Его локализация относительно $S\subseteq K$ – это

$$S^{-1}\Delta=\big\{\big(\tfrac{r}{s},\tfrac{r'}{s^2}\big)\mid (r,r')\in\Delta\big\}\subseteq S^{-1}R\times S^{-1}R$$

по определению из [12] или [1, §2.2], так что конструкция $\Delta$ также перестановочна с локализацией. Заметим, что в определении $\Delta$ достаточно брать $m$ из множества образующих $M$. $\square$

Теперь возьмём мультипликативное подмножество $S \subseteq K$. Каждый $\frac{b}{s} \in S^{-1}K$ задаёт эндоморфизм про-групп $K^{(\infty,S)}$ и $M^{(\infty,S)}$ формулами $a^{(ss')} \mapsto (ab)^{(s')}$ и $m^{(ss')} \mapsto (mb)^{(s')}$. Аналогично, каждый $\frac{m'}{s} \in S^{-1}M$ задаёт морфизмы $K^{(\infty,S)} \to M^{(\infty,S)}, a^{(ss')} \mapsto (m'a)^{(s')}$ и $M^{(\infty,S)} \to K^{(\infty,S)}, m^{(ss')} \mapsto \langle m, m'\rangle^{(s')}$. Эти морфизмы будем обозначать термами $a^{(\infty)}\frac{b}{s} = \frac{b}{s}a^{(\infty)}, m^{(\infty)}\frac{b}{s}, \frac{m'}{s}a^{(\infty)}$ и $\langle m^{(\infty)}, \frac{m'}{s}\rangle = \langle \frac{m'}{s}, m^{(\infty)}\rangle$ со свободными переменными $a^{(\infty)}$ и $m^{(\infty)}$. Согласно [12, начало §10] или [1, лемма 26], локальная группа Стейнберга $\mathrm{StO}(S^{-1}M, q)$ действует автоморфизмами на соответствующей про-группе Стейнберга $\mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M, q)$. Это действие задаётся очевидными формулами на образующих, когда имеется подходящее соотношение Стейнберга:

- ${}^{x_{ij}(a/s)}x_{kl}\big(b^{(\infty)}\big) = x_{kl}\big(b^{(\infty)}\big)$ при $i \neq l \neq -j \neq -k \neq i$ ;
- ${}^{x_{ij}(a/s)}x_{j,-i}\big(b^{(\infty)}\big) = x_{j,-i}\big(b^{(\infty)}\big)$ ;
- ${}^{x_{ij}(a/s)}x_{jk}\big(b^{(\infty)}\big) = x_{ik}\big(\frac{a}{s}b^{(\infty)}\big)\, x_{jk}\big(b^{(\infty)}\big)$ при $i \neq \pm k$ ;
- ${}^{x_{ij}(a/s)}x_{k}\big(m^{(\infty)}\big) = x_{k}\big(m^{(\infty)}\big)$ при $i \neq k \neq -j$ ;
- ${}^{x_{ij}(a/s)}x_{i}\big(m^{(\infty)}\big) = x_{-i,j}\big(q\big(m^{(\infty)}\big)\,\frac{a}{s}\big)\, x_j\big(-m^{(\infty)}\frac{a}{s}\big)\, x_i\big(m^{(\infty)}\big)$ ;
- ${}^{x_{i}(m/s)}x_{j}\big(m'^{(\infty)}\big) = x_{-i,j}\big(-\big\langle \frac{m}{s}, m'^{(\infty)}\big\rangle\big)\, x_j\big(m'^{(\infty)}\big)$ при $i \neq \pm j$ ;
- ${}^{x_{i}(m/s)}x_{jk}\big(a^{(\infty)}\big) = x_{jk}\big(a^{(\infty)}\big)$ при $j \neq i \neq -k$ ;
- ${}^{x_{i}(m/s)}x_{ij}\big(a^{(\infty)}\big) = x_{-i,j}\big(-q\big(\frac{m}{s}\big)\, a^{(\infty)}\big)\, x_j\big(\frac{m}{s}a^{(\infty)}\big)\, x_{ij}\big(a^{(\infty)}\big)$.

Заметим, что у нас получился не морфизм

$$\mathrm{StO}(S^{-1}M, q) \times \mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M, q) \to \mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M, q)$$

про-множеств, а гомоморфизм

$$\mathrm{StO}(S^{-1}M, q) \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})}\big(\mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M, q)\big)$$

абстрактных групп.

Такое действие сверхъестественно по $S$. А именно, если даны мультипликативные подмножества $S \subseteq S'$, $g \in \mathrm{StO}(S^{-1}M, q)$, а $g'$ – это его образ в $\mathrm{StO}(S'^{-1}M, q)$, то следующая диаграмма с каноническими вертикальными стрелками коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{StO}^{(\infty,S')}(M,q) & \xrightarrow{g'(-)} & \mathrm{StO}^{(\infty,S')}(M,q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M,q) & \xrightarrow{g(-)} & \mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M,q). \end{array}$$

По лемме 2 и [12, теорема 2] (или [1, лемма 26]), для любого простого идеала $\mathfrak{p} \leqslant K$ действие $\mathrm{StO}(M_{\mathfrak{p}}, q)$ на $\mathrm{StO}^{(\infty,\mathfrak{p})}(M,q)$ продолжается до действия $\mathrm{O}(M_{\mathfrak{p}}, q)$. Также в силу [12, теорема 3] или [1, теорема 7] имеется действие $\mathrm{O}(M,q)$ на $\mathrm{StO}(M,q)$ такое, что $\mathrm{st}\colon \mathrm{StO}(M,q) \to \mathrm{O}(M,q)$ является скрещенным модулем. Это действие также сверхъестественно: если $g \in \mathrm{O}(M,q)$, то индуцированные автоморфизмы $\mathrm{StO}(M,q)$ и $\mathrm{StO}^{(\infty,\mathfrak{p})}(M,q)$ тоже дают коммутативный квадрат.

## §3. Другое представление

Напомним один хорошо известный результат.

**Лемма 3.** *Предположим, что $K$ локальное. Тогда группа $\mathrm{O}(M,q)$ транзитивно действует на множестве членов гиперболических пар и на множестве пар $(u,v)$ таких, что $u, v$ – члены ортогональных гиперболических пар.*

**Доказательство.** На самом деле ортогональная группа транзитивно действует на множестве гиперболических пар и на множестве из пар ортогональных гиперболических пар. Это теорема Витта о сокращении, доказательство в нужной общности можно найти в [8, следствие 8.3]. □

Возьмём мультипликативное подмножество $S \subseteq K$ и член гиперболической пары $u \in S^{-1}M$. Тогда имеется корректно определённый расщепляющийся эпиморфизм про-групп $\langle u, v^{(\infty)}\rangle\colon M^{(\infty,S)} \to K^{(\infty,S)}$, то есть его ядро $M_u^{(\infty,S)}$ имеет прямое дополнение, изоморфное $K^{(\infty,S)}$. Если $g \in \mathrm{O}(S^{-1}M, q)$, то оно естественно действует на $M^{(\infty,S)}$ (так как $M$ конечного представления) и переводит прямое слагаемое $M_u^{(\infty,S)}$ в $M_{gu}^{(\infty,S)}$. Мы хотим построить морфизмы про-групп

$$X\big(u, v^{(\infty)}\big)\colon M_u^{(\infty,S)} \to \mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M,q),$$

удовлетворяющие естественным требованиям.

**Лемма 4.** *Пусть* $\mathfrak{p}$ *– это простой идеал* $K$*. Тогда для всех членов и гиперболических пар в* $M_{\mathfrak{p}}$ *найдутся единственные морфизмы прогрупп* $X\bigl(u, v^{(\infty)}\bigr)\colon M_u^{(\infty,\mathfrak{p})} \to \mathrm{StO}^{(\infty,\mathfrak{p})}(M, q)$ *такие, что*

(1) ${}^{g}X\bigl(u, v^{(\infty)}\bigr) = X\bigl(gu, gv^{(\infty)}\bigr)$ *при* $g \in \mathrm{O}(M_{\mathfrak{p}}, q)$*;*
(2) $X\bigl(u, ua^{(\infty)}\bigr) = 1$*;*
(3) $X\bigl(ua, v^{(\infty)}\bigr) = X\bigl(u, v^{(\infty)}a\bigr)$ *при* $a \in K_{\mathfrak{p}}^*$*;*
(4) $X\bigl(u, va^{(\infty)}\bigr) = X\bigl(v, -ua^{(\infty)}\bigr)$*, если* $u, v$ *являются членами ортогональных гиперболических пар;*
(5) $X\bigl(e_i, e_j a^{(\infty)}\bigr) = x_{i,-j}\bigl(a^{(\infty)}\bigr)$ *при* $i \neq \pm j$*;*
(6) $X\bigl(e_i, m^{(\infty)}\bigr) = x_{-i}\bigl(-m^{(\infty)}\bigr)$ *при* $m^{(\infty)}$*, где формальный параметр имеет область* $M_0^{(\infty,\mathfrak{p})}$*.*

**Доказательство.** Заметим, что $M_{e_\ell}^{(\infty,\mathfrak{p})} = M_0^{(\infty,\mathfrak{p})} \oplus \bigoplus_{i \neq -\ell} e_i K^{(\infty,\mathfrak{p})}$. Положим

$$X\bigl(e_\ell, v^{(\infty)}\bigr) = x_{-\ell}\bigl(v_0^{(\infty)}\bigr) \prod_{0<i<\ell} \bigl(x_{\ell,-i}\bigl(v_i^{(\infty)}\bigr)\, x_{\ell i}\bigl(v_{-i}^{(\infty)}\bigr)\bigr)\colon \\ M_{e_\ell}^{(\infty,\mathfrak{p})} \to \mathrm{StO}^{(\infty,\mathfrak{p})}(M, q),$$

где переменные $v_0^{(\infty)}$ и $v_i^{(\infty)}$ являются компонентами $v^{(\infty)}$ в разложении $M_{e_\ell}^{(\infty,\mathfrak{p})}$. Это единственный возможный выбор, удовлетворяющий условиям (2), (5) и (6).

Параболическая подгруппа $P = \{g \in \mathrm{O}(M_{\mathfrak{p}}, q) \mid g e_\ell \in e_\ell K_{\mathfrak{p}}\}$ порождается диагональной подгруппой

$$\mathrm{D}(M_{\mathfrak{p}}, q) = \{g \in \mathrm{O}(M_{\mathfrak{p}}, q) \mid g e_i \in e_i K_{\mathfrak{p}}^* \text{ для всех } 0 < |i| \leqslant \ell\},$$

унипотентным радикалом

$$U = \langle t_{\ell i}(K_{\mathfrak{p}}), t_{-\ell}(M_{0,\mathfrak{p}}) \mid 0 < |i| < \ell\rangle$$

и меньшей ортогональной группой

$$\mathrm{O}\bigl(M_{0,\mathfrak{p}} \oplus \textstyle\bigoplus_{0<|i|<\ell} e_i K_{\mathfrak{p}}, q\bigr)$$

с тривиальным действием на $e_{-\ell}$ и $e_\ell$. В силу [2, теорема 5], эта меньшая ортогональная группа порождается своими элементарными ортогональными трансвекциями, её пересечением с диагональной подгруппой, а также ортогональной группой

$$O = \mathrm{O}(M_{0,\mathfrak{p}} \oplus e_{-1} K_{\mathfrak{p}} \oplus e_1 K_{\mathfrak{p}}, q)$$

с тривиальным действием на $e_i$ при $|i| > 1$.

Теперь покажем, что
$$ {}^{g}X\bigl(e_\ell, v^{(\infty)}\bigr) = X\bigl(e_\ell, gv^{(\infty)}\tfrac{ge_\ell}{e_\ell}\bigr) $$
для любого образующего $g \in P$, где $\frac{ge_\ell}{e_\ell}$ – это элемент $K_\mathfrak{p}^*$ такой, что $ge_\ell = e_\ell \frac{ge_\ell}{e_\ell}$. Действительно, диагональная подгруппа действует при помощи корней на обеих частях (согласно [12, формулы (Ad1)–(Ad6)]), для $O$ это следует из такого же аргумента, если воспользоваться [12, предложение 2] или [1, теорема 5] для исключения гиперболической пары $(e_{-1}, e_1)$ и увеличения $M_0$, а для элементарных трансвекций утверждение можно проверить прямо по определению.

Возьмём элеметн $u \in M_\mathfrak{p}$, являющийся членом гиперболической пары. В силу леммы 3, найдётся $g \in \mathrm{O}(M_\mathfrak{p}, q)$ такой, что $u = ge_\ell$. Положим $X\bigl(u, v^{(\infty)}\bigr) = {}^{g}X\bigl(e_\ell, g^{-1}v^{(\infty)}\bigr)$, этот морфизм не зависит от $g$ и удовлетворяет (1) и (2). Чтобы проверить (3), заметим, что найдётся $h \in \mathrm{D}(M_\mathfrak{p}, q)$ такой, что $he_\ell = e_\ell a$. Так что
$$ X\bigl(e_\ell a, v^{(\infty)}\bigr) = {}^{h}X\bigl(e_\ell, h^{-1}v^{(\infty)}\bigr) = X\bigl(e_\ell, v^{(\infty)}\tfrac{he_\ell}{e_\ell}\bigr) = X\bigl(e_\ell, v^{(\infty)}a\bigr), $$
а для остальных векторов $u$ свойство (3) следует из определения $X\bigl(u, v^{(\infty)}\bigr)$.

Свойства (5) и (6) можно получить, применяя разные матрицы перестановок из $\mathrm{O}(M_\mathfrak{p}, q)$ к $x_{\ell,\ell-1}\bigl(a^{(\infty)}\bigr)$ и $x_\ell\bigl(m^{(\infty)}\bigr)$. Наконец, чтобы доказать (4) мы опять используем лемму 3. Не умаляя общности, $u = e_\ell$ и $v = e_{\ell-1}$. Тогда
$$ \begin{aligned} X\bigl(e_\ell, e_{\ell-1}a^{(\infty)}\bigr) = x_{\ell,1-\ell}\bigl(a^{(\infty)}\bigr) &= x_{\ell-1,-\ell}\bigl(-a^{(\infty)}\bigr) \\ &= X\bigl(e_{\ell-1}, -e_\ell a^{(\infty)}\bigr). \end{aligned} $$
□

Чтобы глобализовать такие трансвекции, нам понадобится лемма, похожая на [1, лемма 27].

**Лемма 5.** *Пусть $S \subseteq K$ – это мультипликативное подмножество, $N$ – произвольный $K$-модуль. Рассмотрим семейство $\pi_\mathfrak{p}\colon N^{(\infty,\mathfrak{p})} \to N^{(\infty,S)}$ естественных морфизмов про-групп, где $\mathfrak{p}$ пробегает все простые идеалы $K$, не пересекающие $S$. Тогда это семейство порождает $N^{(\infty,S)}$ в следующем смысле: для каждой про-группы $G^{(\infty)} \in \mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$ отображение*
$$ \mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})\bigl(N^{(\infty,S)}, G^{(\infty)}\bigr) \to \prod_\mathfrak{p} \mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})\bigl(N^{(\infty,\mathfrak{p})}, G^{(\infty)}\bigr) $$
*инъективно.*

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть обычную группу $G$. Возьмём гомоморфизмы групп $f, g\colon N^{(s)} \to G$ для некоторого $s \in S$ такие, что $f \circ \pi_{\mathfrak{p}} = g \circ \pi_{\mathfrak{p}}\colon N^{(\infty,\mathfrak{p})} \to G$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$, не пересекающих $S$. Множество

$$\mathfrak{a} = \{a \in K \mid f|_{N^{(s)}a} = g|_{N^{(s)}a}\}$$

является идеалом $K$. По предположению, оно не содержится ни в одном таком $\mathfrak{p}$, так что существует $s' \in \mathfrak{a} \cap S$. Это значит, что $f|_{N^{(ss')}} = g|_{N^{(ss')}}$. □

**Теорема 1.** *Пусть $K$ – это коммутативное кольцо с единицей, $M$ – $K$-модуль конечного представления с квадратичной формой $q$ и попарно ортогональными гиперболическими парами $(e_{-1}, e_1), \ldots, (e_{-\ell}, e_\ell)$ при $\ell \geqslant 3$. Пусть также $S \subseteq K$ – это мультипликативное подмножество, а $u \in S^{-1}M$ – член гиперболической пары. Тогда существует не более одного морфизма про-групп $X\bigl(u, v^{(\infty)}\bigr)\colon M_u^{(\infty,S)} \to \mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M, q)$ такого, что для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \leqslant K$, не пересекающих $S$, коммутативна следующая диаграмма с каноническими вертикальными стрелками:*

$$\begin{array}{ccc}
M_u^{(\infty,\mathfrak{p})} & \xrightarrow{X(u,v^{(\infty)})} & \mathrm{StO}^{(\infty,\mathfrak{p})}(M,q) \\
\downarrow & & \downarrow \\
M_u^{(\infty,S)} & \xrightarrow{X(u,v^{(\infty)})} & \mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M,q).
\end{array}$$

*Эти морфизмы также удовлетворяют следующим тождествам:*

(1) ${}^{g}X\bigl(u, v^{(\infty)}\bigr) = X\bigl(gu, gv^{(\infty)}\bigr)$ *при $g \in \mathrm{StO}(S^{-1}M, q)$, если левая часть определена;*
(2) $X\bigl(u, ua^{(\infty)}\bigr) = 1$*, если левая часть определена;*
(3) $X\bigl(ua, v^{(\infty)}\bigr) = X\bigl(u, v^{(\infty)}a\bigr)$ *при $a \in S^{-1}K^*$, если обе части определены;*
(4) $X\bigl(u, va^{(\infty)}\bigr) = X\bigl(v, -ua^{(\infty)}\bigr)$*, если $u, v \in S^{-1}M$ являются членами ортогональных гиперболических пар и обе части определены;*
(5) $X\bigl(e_i, e_j a^{(\infty)}\bigr) = x_{i,-j}\bigl(a^{(\infty)}\bigr)$ *при $i \neq \pm j$;*
(6) $X\bigl(e_i, m^{(\infty)}\bigr) = x_{-i}\bigl(-m^{(\infty)}\bigr)$.

**Доказательство.** По лемме 5, применённой к $M$, про-группа $M_u^{(\infty,S)}$ порождается каноническими морфизмами $M_u^{(\infty,\mathfrak{p})} \to M_u^{(\infty,S)}$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \leqslant K$, не пересекающих $S$. Так что морфизмы

$X\bigl(u, v^{(\infty)}\bigr)$ единственны, если они существуют. Ясно, что такой морфизм существует и удовлетворяет (5), (6) при $u = e_i$. Множество членов гиперболических пар $u \in S^{-1}M$ таких, что $X\bigl(u, v^{(\infty)}\bigr)$ существует, замкнуто относительно действия $\mathrm{StO}(S^{-1}M, q)$ в силу сверхъестественности этого действия. Остальные свойства следуют из лемм 4 и 5. $\square$

**Теорема 2.** *Пусть $K$ – коммутативное кольцо с единицей, $M$ – $K$-модуль конечного представления с квадратичной формой $q$ и попарно ортогональными гиперболическими парами $(e_{-1}, e_1), \ldots, (e_{-\ell}, e_\ell)$ при $\ell \geqslant 3$. Пусть также $S \subseteq K$ является мультипликативным подмножеством, а $u \in S^{-1}M$ – членом гиперболической пары. Тогда морфизм $X\bigl(u, v^{(\infty)}\bigr)\colon M_u^{(\infty,S)} \to \mathrm{StO}^{(\infty,S)}(M, q)$ из теоремы 1 существует в следующих случаях:*

(1) *$S = K \setminus \mathfrak{p}$ для простого идеала $\mathfrak{p}$;*
(2) *$u$ лежит в орбите $e_1$ относительно действия $\mathrm{EO}(S^{-1}M, q)$;*
(3) *$S = \{1\}$ и $u$ лежит в орбите $e_1$ относительно действия $\mathrm{O}(M, q)$.*

*В последнем случае $X(u, v) \in \mathrm{StO}(M, q)$ отображается в $T(u, v) \in \mathrm{O}(M, q)$.*

**Доказательство.** Первый случай – это лемма 4, второй – теорема 1. Если $S = \{1\}$ и $u = ge_1$ для некоторого $g \in \mathrm{O}(M, q)$, то положим $X(u, v) = {}^{g}X(e_1, g^{-1}v)$ для всех векторов $v \perp u$. Этот морфизм удовлетворяет определению из теоремы 1 в силу сверхъестественности действия. Оставшееся утверждение следует из единственности $X(u, v)$ и определений. $\square$

Наконец, мы докажем, что ортогональная группа Стейнберга имеет “другое представление” в смысле ван дер Каллена. Заметим, что третье свойство $X(u, v)$ из теоремы 1 нам не понадобится.

**Теорема 3.** *Пусть $K$ – это коммутативное кольцо с единицей, $M$ – $K$-модуль конечного представления с квадратичной формой $q$ и попарно ортогональными гиперболическими парами $(e_{-1}, e_1), \ldots, (e_{-\ell}, e_\ell)$ при $\ell \geqslant 3$. Обозначим через $\mathrm{StO}^*(M, q)$ абстрактную группу, порождённую элементами $X^*(u, v)$ для векторов $u, v \in M$ таких, что $u \in \mathrm{O}(M, q)\, e_1$ и $v \perp u$. Зададим следующие соотношения:*

- *$X^*(u, v + v') = X^*(u, v)\, X^*(u, v')$;*
- *$X^*(u, v)\, X^*(u', v')\, X^*(u, v)^{-1} = X^*(T(u, v)\, u', T(u, v)\, v')$;*

- $X^*(u, va) = X^*(v, -ua)$, *если* $(u, v)$ *лежит в орбите* $(e_1, e_2)$ *под действием* $\mathrm{O}(M, q)$*;*
- $X^*(u, ua) = 1$.

*Тогда канонический морфизм*

$$\mathrm{StO}(M, q) \to \mathrm{StO}^*(M, q), x_{ij}(a) \mapsto X^*(e_i, e_{-j}a), x_j(m) \mapsto X^*(e_{-j}, -m)$$

*является изоморфизмом, прообраз* $X^*(u, v)$ *– это элемент* $X(u, v)$ *из теоремы 2. Также в формулировке мы могли использовать* $\mathrm{EO}(M, q)$ *вместо* $\mathrm{O}(M, q)$.

**Доказательство.** Пусть $F\colon \mathrm{StO}(M, q) \to \mathrm{StO}^*(M, q)$ – это гомоморфизм из условия. По теоремам 1 и 2, найдётся гомоморфизм

$$G\colon \mathrm{StO}^*(M, q) \to \mathrm{StO}(M, q), X^*(u, v) \mapsto X(u, v).$$

Ясно, что $G \circ F = \mathrm{id}$.

Группа $\mathrm{O}(M, q)$ (или $\mathrm{EO}(M, q)$) действует на $\mathrm{StO}^*(M, q)$ как

$$^{g}X^*(u, v) = X^*(gu, gv).$$

Ясно, что $\mathrm{StO}^*(M, q)$ порождается образом $F$ и его сопряжёнными относительно этого действия (здесь мы пользуемся тем, что $u$ лежит в орбите $e_1$ ). Так как $\mathrm{StO}(M, q)$ совершенна, группа $\mathrm{StO}^*(M, q)$ тоже совершенна. Канонический гомоморфизм

$$\mathrm{StO}^*(M, q) \to \mathrm{O}(M, q), X^*(u, v) \mapsto T(u, v)$$

имеет центральное ядро в силу второго соотношения, поэтому ядро $G$ тоже центрально.

Теперь $G\colon \mathrm{StO}^*(M, q) \to \mathrm{StO}(M, q)$ является расщепимым совершенным центральным расширением. Известно, что такой гомоморфизм обязательно является изоморфизмом, сечение $F$ будет обратным. □

## Список литературы

1. Е. Ю. Воронецкий, *Младшая* K*-теория нечётных унитарных групп.* — кандидатская диссертация, СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия (2022).
2. В. А. Петров, *Нечётные унитарные группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ. **305** (2003), 195–225.
3. М. С. Туленбаев, *Мультипликатор Шура группы элементарных матриц конечного порядка.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ. **86** (1979), 162–169.
4. S. Böge, *Steinberggruppen von orthogonalen Gruppen.* — J. reine angew. Math. **494** (1998), 219–236.

5. A. Lavrenov, *Another presentation for symplectic Steinberg groups.* — J. Pure Appl. Alg. **219**, No. 9 (2015), 3755–3780.
6. A. Lavrenov, S. Sinchuk, *On centrality of even orthogonal* $\mathrm{K}_2$. — J. Pure Appl. Alg. **221**, No. 5 (2017), 1134–1145.
7. A. Lavrenov, S. Sinchuk, E. Voronetsky, *Centrality of* $\mathrm{K}_2$ *for Chevalley groups: a pro-group approach*, preprint arXiv:2009.03999 (2020).
8. B. A. Magurn, W. van der Kallen, L. N. Vaserstein, *Absolute stable rank and Witt cancellation for noncommutative rings.* — Invent. Math. **91** (1988), 525–542.
9. S. Sinchuk, *On centrality of* $\mathrm{K}_2$ *for Chevalley groups of type* $\mathrm{E}_l$. — J. Pure Appl. Alg. **220**, No. 2 (2016), 857–875.
10. W. van der Kallen, *Another presentation for Steinberg groups.* — Indag. Math. **80**, No. 4 (1977), 304–312.
11. E. Voronetsky, *Centrality of* $\mathrm{K}_2$*-functor revisited.* — J. Pure Appl. Alg. **225**, No. 4 (2020), 106547.
12. E. Voronetsky, *Centrality of odd unitary* $\mathrm{K}_2$*-functor*, preprint arXiv:2005.02926 (2020).
13. E. Voronetsky, *Injective stability for odd unitary* $\mathrm{K}_1$. — J. Group Theory **23**, No. 5 (2020).
14. M. Wendt, *On homotopy invariance for homology of rank two groups.* — J. Pure Appl. Alg. **216**, No. 10 (2012), 2291–2301.

Voronetsky E. Yu. Another presentation of orthogonal Steinberg groups.

We use the pro-group approach to show that $\mathrm{StO}(M, q)$ admits van der Kallen's "another presentation", where $M$ is a module over a commutative ring with sufficiently isotropic quadratic form $q$. Moreover, we construct an analog of ESD-transvections in orthogonal Steinberg pro-groups under some assumptions on their parameters.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербургский государственный университет,
14 линия В.О., дом 29Б,
199178 Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: voronetckiiegor@yandex.ru

Поступило 24 апреля 2023 г.