Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 522, 2023 г.

$\boxed{\text{Н. Вавилов}}$, **В. Нестеров**

ПОДГРУППЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПАРОЙ 2-ТОРОВ В $\mathrm{GL}(5, K)$

Введение

Настоящая работа продолжает цикл работ авторов, посвященных геометрии микровесовых торов и длинных корневых торов в расширенных группах Шевалле. Общий контекст и перспективы этого направления, а также основные ожидаемые результаты обрисованы в нашей обзорной статье [6]. В случае группы $\mathrm{GL}(n, K)$ микровесовые торы – это m**-торы**, т.е. подгруппы, сопряженные с одномерным тором

$$\left\{ \mathrm{diag}(\varepsilon, \dots, \varepsilon, 1, \dots, 1), \quad \varepsilon \in K^* \right\} \leqslant \mathrm{GL}(n, K),$$

где количество неединичных собственных значений равно m. С точки зрения общей теории это в точности микровесовые торы, отвечающие фундаментальному весу ϖ_m системы корней A_{n-1}.

0.1. Reflection and bireflection tori. Чтобы поставить данную работу в контекст, напомним, что в работе первого автора [4] и в работе Арье Коэна, Ханса Кейперса и Ханса Стерка [16] были изучены орбиты группы $\mathrm{GL}(n, K)$ на парах **1-торов** = **reflection tori**, классифицированы порождения таких пар и доказано, что в подгруппе $\langle X, Y \rangle$, порожденной двумя некоммутирующими 1-торами, найдется унипотентная корневая подгруппа.

В настоящем цикле статей мы рассматриваем следующий по сложности случай **2-торов** = **bireflection tori**. В первой работе [20] мы доказали теорему редукции для m-торов над произвольным телом и описали орбиты наибольшей степени. В частности, любая пара 2-торов сопряжена такой паре в $\mathrm{GL}(6, K)$ и имеется *единственная* орбита 2-торов, содержащихся в $\mathrm{GL}(6, K)$, но не сопряженная никакой такой паре в $\mathrm{GL}(5, K)$.

Ключевые слова: общая линейная группа, унипотентные корневые подгруппы, полупростые корневые подгруппы, m-торы, диагональная подгруппа, полная линейная группа, микровесовые торы, унипотентные элементы.

В настоящей статье мы делаем следующий естественный шаг, а именно, полностью описываем орбиты и порождения пар 2-торов, которые вкладываются в $\mathrm{GL}(5, K)$, но при этом не сопряжены никакой такой паре в $\mathrm{GL}(4, K)$. В заключительной работе цикла [7] будет рассмотрен самый технически трудный случай пар торов $\mathrm{GL}(4, K)$, что в итоге даст полное описание орбит и порождений пар 2-торов в $\mathrm{GL}(n, K)$.

Причины, которые побудили нас детально рассмотреть именно этот случай, таковы:

• Он все еще поддается исчерпывающему анализу, и для него можно получить не просто какие-то общие редукции и качественные следствия, а полные *списки* орбит и *явно* отождествить порождения.

• Он сам по себе не играет какой-то специальной роли, но является *модельным* для двух описанных ниже значительно более сложных ситуаций и позволяет оценить необходимый в этих случаях объем работы.

• Он в любом случае естественно возникает при анализе этих более сложных ситуаций и при их изучении, даже на уровне качественных следствий, удобно уже иметь *полный* ответ в этом случае.

0.2. Микровесовые торы. На самом деле, с точки зрения реальных приложений для описания подгрупп в алгебраических группах нас интересуют в первую очередь две следующие ситуации.

• Пары микровесовых торов, в первую очередь,

i) типа ϖ_1 в группе Шевалле $G(\mathrm{D}_l, K)$,
ii) типа ϖ_1 в группе Шевалле $G(\mathrm{E}_6, K)$,
iii) типа ϖ_7 в группе Шевалле $G(\mathrm{E}_7, K)$.

• Пары длинных корневых торов

$$\left\{ \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^{-1}, 1, \dots, 1), \varepsilon \in K^* \right\}$$

в группе $\mathrm{SL}(n, K)$.

Однако, второй из этих случаев уже мало отличается по сложности от общего случая групп, порожденных элементами с *двумя неединичными собственными значениями*, которые не только интересны сами по себе, но и возникают в большом количестве геометрических приложений.

Конечно, *сверхзадачей* здесь было бы описание орбит на парах длинных корневых торов в *произвольной* группе Шевалле, но даже в векторном представлении ортогональных групп такие торы состоят из элементов с четырьмя неединичными собственными значениями, см. [9–11].

Нашим первоначальным намерением, когда мы начинали этот проект 15 лет назад, была полная классификация порождений таких пар. Однако, как выяснилось, это совсем непростая задача. Для многих приложений – скажем, для того, чтобы получить простое доказательства результатов о надгруппах максимальных торов – достаточно было бы уже каких-то частных случаев и качественных следствий этих результатов.

Например, чрезвычайно важные следствия вытекали бы уже из того, что любая недиагонализуемая подгруппа, содержащая два таких тора, содержит однопараметрические подгруппы маленьких унипотентных элементов. В настоящей работе, чтобы оценить сложность более общих случаев, мы как раз и реализуем эту программу *трудным путем*, описывая все орбиты на парах и соответствующие порождения для следующего по сложности случая 2-торов. Заметим, что тем временем второму автору удалось придумать новый трюк для извлечения маленьких унипотентных элементов без явной классификации орбит [14].

Стоит отметить, что результаты настоящего цикла работ про 2-торы являются в очевидном смысле следующим после 1-торов естественным *необходимым* шагом в анализе микровесовых торов в остальных группах – m-торы при $m \geqslant 3$ не играют при этом никакой специальной роли. Дело в том, что с учетом изоморфизма $\mathrm{D}_3 \cong \mathrm{A}_3$ ключевой (и самый трудный!) случай нашего результата, относящийся к 2-торам в $\mathrm{GL}(4, K)$, естественно истолковываются как анализ микровесовых элементов типа ϖ_1 в ортогональной группе $\mathrm{SO}(6, K)$. Этот случай играет основную роль в анализе старших ортогональных групп.

В свою очередь, в случае E_6 любая пара микровесовых торов типа ϖ_1 содержится в параболической подгруппе типа D_5. И, точно также, анализ случая E_7 апеллирует к аналогичным результатам для E_6, так что микровесовые случаи

$$(\mathrm{A}_l, \varpi_1) \prec (\mathrm{A}_l, \varpi_2) \prec (\mathrm{D}_l, \varpi_1) \prec (\mathrm{E}_6, \varpi_1) = (\mathrm{E}_6, \varpi_6) \prec (\mathrm{E}_7, \varpi_7)$$

вложены друг в друга как матрешки.

0.3. Извлечение унипотентов. С содержательной точки зрения смысл наших основных результатов в этой работе и в дальнейших работах этого цикла состоит в том, что они позволяют *полностью* СВЕСТИ ИЗУЧЕНИЕ ПОДГРУПП, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЕНЬКИЕ ПОЛУПРОСТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, К ИЗУЧЕНИЮ ПОДГРУПП, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЕНЬКИЕ УНИПОТЕНТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. Если говорить непосредственно о настоящей работе, то получающиеся маленькие унипотенты, это либо корневые элементы, либо произведения двух корневых элементов, отвечающих ортогональным корням. Известно, что задачи порождения унипотентными элементами значительно проще, чем задачи порождения полупростыми элементами.

По этому поводу заметим еще, что все наши результаты относятся к случаю [почти] произвольного поля. Ранее результаты такого типа имелись лишь для алгебраически замкнутых полей, где они получаются с использованием теории представлений алгебраических групп, и, отчасти, для случая конечного поля, в тех случаях, когда их удается свести к абсолютному случаю, к классификации конечных простых групп или конечных геометрий.

С другой стороны, в работах первого автора [3] результаты такого типа доказывались для подгрупп, содержащих расщепимый *максимальный* тор. Здесь же мы доказываем *гораздо* более сильные результаты, из которых видно, что весь максимальный тор для этого не нужен, а достаточно иметь лишь два некоммутирующих одномерных тора!

Эти результаты носят слишком технический характер, чтобы полностью сформулировать их здесь во введении. Морально их следует воспринимать, как еще один *очень* сильный [частичный] аналог результатов Зенона Боревича и первого автора, [1,2] и т.д., о надгруппах диагональной группы в $\mathrm{GL}(n, K)$. Например, если поле K не слишком маленькое, скажем, $|K| \geqslant 7$, из наших результатов вытекает, что в подгруппе $\langle X, Y \rangle$, порожденной парой некоммутирующих 2-торов X и Y в $\mathrm{GL}(5, K)$, для всех орбит пар (X, Y), кроме трех из них, содержится корневая подгруппа. А для трех оставшихся орбит – однопараметрическая унипотентная подгруппа, состоящая из элементов вычета 2.

0.4. Используемая техника. Как в идейном, так и в техническом отношении настоящая работа близко примыкает к [4], и мы не будем воспроизводить оттуда вводную часть, в которой подробно и с *детальной библиографией* обсуждается общий контекст, история геометрии унипотентных подгрупп (в частности глубокие и трудные результаты Франца Тиммесфельда, Евгения Башкирова, Ани Штайнбах, Ханса Кейперса и других по классификации подгрупп, содержащих маленькие унипотентные элементы), аналогии и различия, возникающие при изучении унипотентных подгрупп и торов, возможные приложения результатов такого рода и другие общие соображения.

С другой стороны, *технически* настоящая работа *теснейшим* образом связана еще с тремя циклами наших предшествующих работ, которые используются внутри самым непосредственным образом.

• Статьи первого автора о разложении Брюа микровесовых элементов, см. [5] и содержащиеся там ссылки. Проведенные в этих работах вычисления орбит борелевской подгруппы служат основой как для проводимых нами редукций, так и для сокращения перебора случаев.

• Статьи второго автора по геометрии *коротких* корневых подгрупп [12, 13] и т.д. В этих работах разработаны важные технические приемы описания орбит и порождений, которые мы полностью используем в настоящей работе [и которые играют еще гораздо большую роль в ее предполагаемых сиквелах, относящихся к к исключительным группам!]

• Статьи первого автора и Андрея Семенова о длинных корневых торах [9–11] и статья первого автора и Игоря Певзнера о тройках длинных корневых подгрупп в группах Шевалле [8]. Там тоже на основе вычисления борелевских орбит происходит редукция к ортогональной группе $\mathrm{SO}(8, K)$, после чего вопрос решается непосредственным матричным вычислением в этой группе.

Как и в работе [4] наши результаты отличаются от результатов для корневых подгрупп в одном важном отношении. А именно, в то время как для пар (X, Y) корневых подгрупп орбитали и соответствующие им порождения $\langle X, Y\rangle$ не зависят от поля, в нашем случае поля K, $|K| \leqslant 7$, являются истинными исключениями. В этих случаях конкретный вид порождения $\langle X, Y\rangle$ отличается от того, что получается в общем случае.

В смысле сложности настоящая статья занимает промежуточное положение между работой [4] и нашими готовящимися работами для ортогональной группы и исключительных групп Шевалле типов E_6 и E_7:

• Здесь все еще довольно легко полностью описать порождения и в исключительных случаях совсем маленьких полей. Для других групп и торов мы пока в состоянии рассмотреть только *общий* случай *достаточно больших* полей.

• В отличие от произвольных групп Шевалле в настоящей статье мы по-прежнему можем ограничиться совершенно элементарными матричными вычислениями.

Статья организована следующим образом. В §1 мы напоминаем необходимые обозначения, а в §2 описываем построенные в [20] инварианты для пар 2-торов и формулируем для этого случая основные результаты этой работы, теорему редукции и описание $\mathrm{GL}(6, K)$-орбит. Техническим ядром настоящей работы является §3, который посвящен классификации орбит группы $\mathrm{GL}(5, K)$ на парах содержащихся там 2-торов (X, Y). Два заключительных параграфа §§4–5, в которых получены основные результаты статьи, теоремы 1–4, посвящены явному отождествлению порождений $\langle X, Y\rangle$, соответственно, в вырожденном случае §4 и в невырожденном случае §5.

§ 1. Обозначения

Наши обозначения в целом повторяют обозначения [20], но для удобства читателя мы их воспроизведем здесь.

Пусть K – поле, $K^* = K\backslash\{0\}$ – его мультипликативная группа, $G = \mathrm{GL}(n, K)$ – полная линейная группа степени n над K. Через $D = \mathrm{D}(n, K)$ мы обозначаем подгруппу G диагональных матриц, через $N = \mathrm{N}(n, K)$ – мономиальную подгруппу.

Фактор-группа N/D изоморфна S_n, симметрической группе на n символах. Обозначим через W_n группу матриц перестановок в G, в дальнейшем она иногда называется группой Вейля. Мы отождествляем S_n и W_n посредством изоморфизма $\pi \mapsto \omega_\pi$, где ω_π обозначает матрицу, у которой в позиции (i, j) стоит $\delta_{i,\pi j}$. Как обычно, мы обозначаем через ω_{ij} матрицу перестановки, отвечающую транспозиции (i, j).

Обозначим через $V = K^n$ *правое* векторное пространство столбцов высоты n над K. Обычно мы отождествляем матрицу $g \in G$ с соответствующим линейным преобразованием пространства K^n. Это преобразование умножает столбец на g *слева*. [Чтобы выделить те ситуации, где мы становимся на геометрическую точку зрения, мы называем элементы G *преобразованиями*.]

Через $e_1, \dots, e_n$ мы обозначаем стандартный базис K^n, т.е. e_i это столбец, у которого i-я компонента равна 1, а все остальные компоненты – нули. Двойственное пространство $V^* = {}^nK$ является *левым* векторным пространством строк длины n. Через $f_1, \dots, f_n$ обозначается стандартный базис ${}^nK$, двойственный к $e_1, \dots, e_n$ по отношению к стандартному спариванию.

Обозначим через e_{ij} – стандартную матричную единицу, т.е. матрицу, у которой матричный элемент в позиции (i, j) равен 1, в то время как все остальные элементы равны 0. Далее, через $x_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$ для $\xi \in K$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ мы обозначаем *элементарную трансвекцию*. Для данного $i \neq j$ мы рассматриваем соответствующую унипотентную *корневую подгруппу* $X_{ij} = \{x_{ij}(\xi), \xi \in K\}$. Подгруппа $E(n, K)$ в G, порожденная всеми X_{ij}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *элементарной* подгруппой в G. Для поля эта подгруппа совпадает со специальной линейной группой $\mathrm{SL}(n, K)$.

Аналогично, через $d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii}$, $\varepsilon \in K^*$, мы обозначаем *элементарное псевдоотражение*. Для фиксированного i мы рассматриваем **1-тор**

$$Q_i = \{d_i(\varepsilon),\ \varepsilon \in K^*\}.$$

Ясно, что $\mathrm{GL}(n, K)$ порождена $\mathrm{E}(n, K)$ и Q_1.

Вычетом преобразования g, называется ранг преобразования $g - e$,

$$\mathrm{res}(g) = \mathrm{rk}(g - e).$$

Преобразование $g \in G$ называется m-*мерным*, если $\mathrm{rk}(g - e) = m$ или, что то же самое, если его вычет равен m.

Наибольшее подпространство $W \leqslant V$ такое, что $g|_W = \mathrm{id}$, называют *осью* преобразования g. В свою очередь, подпространство $U = \{gv - v \mid v \in T^n\}$ называется *вычетным пространством* g или *центром* g. Ясно, что $\dim U = m$ и $\dim W = n - m$. Много полезных свойств вычетных пространств и вычетов можно найти в [17].

Самые важные индивидуальные элементы $\mathrm{GL}(n, K)$ это, конечно, 1-*мерные преобразования*, которые играют основную роль в изучении линейных групп. Общая форма 1-мерного преобразования имеет вид

$$x_{vu}(\xi) = e + v\xi u, \quad v \in K^n, \quad u \in {}^nK, \quad \xi \in K.$$

В этом случае центром $x_{vu}(\xi)$ является подпространство, порожденное v, а осью – гиперплоскость ортогональная u. Положим $uv = \delta$. В случае $\delta = 0$, преобразование $x_{vu}(\xi)$, $\xi \in K$, называется *трансвекцией*. В случае $\delta \neq 0$ преобразование $x_{vu}(\xi)$, $\xi \in K \setminus \{-1\}$ называется *псевдоотражением*.

Как мы уже отмечали, орбиты и порождения пар 1-торов описаны в [4]. Это описание воспроизводится также в работе [20].

§ 2. Двумерные преобразования

Наша окончательная цель состоит в том, чтобы описать орбиты $\mathrm{GL}(n, K)$ при действии сопряжением на парах 2-торов

$$(X, Y) \mapsto (gXg^{-1}, gYg^{-1}), \quad g \in G,$$

и отождествить соответствующие порождения.

Напомним, что каждый 2-тор (см. [20]) сопряжен элементарному 2-тору Q:

$$Q = \{\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, 1, \ldots, 1),\ \varepsilon \in K^*\}.$$

Элементарный 2-тор $Q = Q_{U_0, W_0}$ определяется подпространствами $U_0 = \langle e_1, e_2 \rangle$ и $W_0 = \langle f_1, f_2 \rangle$. Это означает, что его элементами являются

$$d_0(\varepsilon) = e + e_1(\varepsilon - 1)f_1 + e_2(\varepsilon - 1)f_2, \quad \varepsilon \in K^*.$$

Тогда элементами произвольного 2-тора будут элементы вида

$$d(\varepsilon) = e + u_1(\varepsilon - 1)v_1 + u_2(\varepsilon - 1)v_2, \quad \varepsilon \in K^*,$$

где $u_i = ge_i$, $v_i = f_i g^{-1}$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, для некоторой матрицы $g \in \mathrm{GL}(n, K)$. Таким образом, каждый 2-тор полностью определяется подпространствами $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ и $W = \langle v_1, v_2 \rangle$.

Подпространство U является в точности центром для каждого преобразования $d(\varepsilon) \in Q_{UW}$, $\varepsilon \neq 1$. В этом случае мы говорим, что U является центром Q_{UW}. Аналогично, подпространство $W^{\perp}$, ортогональное $W \leqslant {}^nK$ относительно канонического спаривания ${}^nK \times K^n \longrightarrow K$, является осью Q_{UW}. Впрочем, обычно мы будем допускать вольность речи и называть осью само подпространство W.

Ясно, что

$$gQ_{UW}g^{-1} = Q_{gU, Wg^{-1}}, \quad g \in \mathrm{GL}(n, K).$$

Рассмотрим пару 2-торов X и Y с центрами U_1 и U_2 и осями W_1 и W_2, соответственно. В работе [20] мы ввели следующие инварианты для пары m-торов:

- $r = r(X, Y) = \dim(U_1 + U_2)$,

- $s = s(X, Y) = \dim(W_1 + W_2)$,
- $p = p(X, Y) = \dim(U_1 \cap W_2^{\perp})$,
- $q = q(X, Y) = \dim(U_2 \cap W_1^{\perp})$,
- $t = t(X, Y) = \max\Big(\dim\big((U_1+U_2) \cap (W_1+W_2)^{\perp}\big), \dim\big({}^{\perp}(U_1+U_2) \cap (W_1 + W_2)\big)\Big)$.

Ясно, что в нашем случае $2 \leqslant r, s \leqslant 4$, $0 \leqslant p, q \leqslant 2$ и $0 \leqslant t \leqslant 2$.

В работе [20] доказана теорема редукции для пар m-торов. Из неё, в частности, следует, что с точностью до одновременного сопряжения пара 2-торов (X, Y) вкладывается в $\mathrm{GL}(6, K)$. Точнее, с точностью до сопряжения пара 2-торов содержится в одной из следующих подгрупп

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которые отвечают значениям $t = 0, 1, 2$, соответственно.

Мы будем называть орбиту пары 2-торов (X, Y) орбитой в $\mathrm{GL}(n, K)$, если эта пара (X, Y) вкладывается одновременным сопряжением в $\mathrm{GL}(n, K)$, но не вкладывается в $\mathrm{GL}(n-1, K)$. Из теоремы редукции следует, что n здесь может принимать значения 3, 4, 5 и 6.

Легко видеть, что орбиты пары 2-торов в $\mathrm{GL}(3, K)$ совпадают с орбитами 1-торов и по сути описаны в [4]. С другой стороны, из теоремы 2 работы [20] следует, что единственная орбита на парах 2-торов в $\mathrm{GL}(6, K)$ совпадает с орбитой, которая получается удвоением единственной $B(3, K)$-орбиты на парах 1-торов.

В настоящей работе мы полностью описываем подгруппы, порожденные парой 2-торов в $\mathrm{GL}(5, K)$, а подгруппы, порожденные парой 2-торов в $\mathrm{GL}(4, K)$, полностью описаны в ее продолжении [7]. С другой стороны, в работе второго автора [14] другим методом доказано, что подгруппа, порожденная парой 2-торов в $\mathrm{GL}(4, K)$, содержит унипотентный элемент ранга не более двух, *независимо* от описания орбит и порождений.

§ 3. Орбиты в $\mathrm{GL}(5,K)$

Пусть X и Y – пара 2-торов в $\mathrm{GL}(5,K)$. Обозначим через U_1, U_2 и W_1, W_2 их оси и центры соответственно. Зафиксируем в этих подпространствах некоторые базисы:

$$U_1 = \langle u_1, u_2\rangle, \quad U_2 = \langle u_3, u_4\rangle, \quad W_1 = \langle w_1, w_2\rangle, \quad W_2 = \langle w_3, w_4\rangle.$$

В этом параграфе мы классифицируем орбиты на парах 2-торов в $\mathrm{GL}(5,K)$. Следующие две леммы в совокупности утверждают, для каждой такой орбиты оси *или* центры наших торов должны быть линейно независимы в совокупности.

Лемма 1. *Пусть X и Y – два 2-тора в $\mathrm{GL}(n,K)$. Если $r(X,Y)$, $s(X,Y) \leqslant 3$, то пара (X,Y) сопряжена с парой 2-торов в $\mathrm{GL}(4,K)$.*

Доказательство. Ясно, что не теряя общности можно считать, что $X = Q$. Пусть $Y = Q_{UW}$. Рассмотрим вначале случай, когда $r = 3$.

Положим

$$u_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T, \quad u_4 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T.$$

Если u_1, u_2, u_3 линейно независимы, то среди коэффициентов $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$ хотя бы один не равен нулю. Сопрягая матрицей перестановки, можно считать, что $\alpha_3 \neq 0$. Сопрягая, если нужно, при помощи трансвекций из X_{j3}, $j \geqslant 4$, можно считать, что $\alpha_j = 0$ при всех $j \geqslant 4$. Так как $r = 3$, то при этом автоматически $\beta_j = 0$ для всех $j \geqslant 4$.

Если $s = 2$, то доказывать нечего, так как в этом случае $\langle X, Y\rangle$ уже содержится в $\mathrm{GL}(3,K)$. Предположим поэтому, что w_1, w_2, w_3 линейно независимы. Положим

$$w_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad w_4 = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n).$$

Если $\gamma_i = 0$ для всех $i \geqslant 4$, то снова $\langle X, Y\rangle \leqslant \mathrm{GL}(3,K)$. В противном случае, сопрягая, если нужно, матрицей перестановки, можно считать, что $\gamma_4 \neq 0$. Теперь, сопрягая при помощи трансвекций из X_{4j}, $j \geqslant 5$, можно считать, что $\gamma_j = 0$, $j \geqslant 5$. Так как $s = 3$, то при этом автоматически $\delta_j = 0$ для всех $j \geqslant 5$.

В случае $s = 3$, $r = 2$ рассуждения совершенно аналогичны и показывают, что на самом деле $\langle X, Y\rangle \leqslant \mathrm{GL}(3,R)$. □

Лемма 2. *Пусть X и Y – два 2-тора в $\mathrm{GL}(n,K)$. Если хотя бы одно из чисел $r(X,Y)$ или $s(X,Y)$ равно 2, то $p = q = 0$ и пара (X,Y) вкладывается в $\mathrm{GL}(4,K)$.*

Доказательство. Предположим, что $r = 2$. Тогда $U_1 = U_2$ и, следовательно, $p = q = 0$. Считая, что $X = Q$, для векторов w_3 и w_4 мы повторим рассуждения предыдущей леммы. □

Итак, для орбит пар некоммутирующих 2-торов в $\mathrm{GL}(5, K)$ возникают *три* возможные ситуации. Либо $r = s = 4$, либо $r = 4$, $s = 3$, либо, наконец, $r = 3$, $s = 4$. Впрочем, вторая ситуация переходит в третью под действием контраградиента, т.е. заменой строк на столбцы и наоборот.

Явно зафиксируем теперь те представители орбит для каждого случая, с которыми мы будем работать в дальнейшем при отождествлении порождений. С этой целью мы явно выпишем базисы пар подпространств (U_1, W_1) и (U_2, W_2), определяющие каждую орбиту пар 2-торов в $\mathrm{GL}(5, K)$. Некоторые базисы в следующей лемме сопряжены, как мы увидим в дальнейшем .

Лемма 3. *Пусть X и Y – некоммутирующие 2-торы в $\mathrm{GL}(5, K)$. Предположим, что $p = 0$, тогда орбита (X, Y) определяется одним из следующих наборов базисов.*

Для $r = s = 4$ имеем:

$$u_1 = e_2,\ u_2 = e_3,\ u_3 = e_1 + e_2 + \gamma e_4, \gamma \in K,\ u_4 = e_3 + e_4, \tag{u1w1}$$
$$w_1 = f_2 + f_4,\ w_2 = f_3 + \beta f_4 + f_5, \beta \in K,\ w_3 = f_2,\ w_4 = f_3;$$
$$u_1 = e_2,\ u_2 = e_3,\ u_3 = e_1 + e_2 + \lambda e_4,\ u_4 = e_3 + e_4, \lambda = 0,\ 1, \tag{u1w2}$$
$$w_1 = f_2 + f_5,\ w_2 = f_3 + \delta f_4,\ \delta \in K^*,\ w_3 = f_2,\ w_4 = f_3;$$
$$u_1 = e_2,\ u_2 = e_3,\ u_3 = e_2 + e_4,\ u_4 = e_1 + e_3, \tag{u2w1}$$
$$w_1 = f_2 + \alpha f_4,\ \alpha \in K^*,\ w_2 = f_3 + \lambda f_4 + f_5,\ w_3 = f_2,\ w_4 = f_3, \lambda = 0,\ 1;$$
$$u_1 = e_2,\ u_2 = e_3,\ u_3 = e_2 + e_4,\ u_4 = e_1 + e_3, \tag{u2w2}$$
$$w_1 = f_2 + f_5,\ w_2 = f_3 + f_4,\ w_3 = f_2,\ w_4 = f_3.$$

Для $r = 4$, $s = 3$:

$$u_1 = e_2,\ u_2 = e_3,\ u_3 = e_1 + e_2,\ u_4 = e_3 + e_4, \tag{r4s3}$$
$$w_1 = f_2 + f_5,\ w_2 = f_3 + f_5,\ w_3 = f_2,\ w_4 = f_3.$$

Для $r = 3$, $s = 4$:

$$u_1 = e_2,\ u_2 = e_3,\ u_3 = e_1 + e_2,\ u_4 = e_1 + e_3, \tag{r3s4}$$
$$w_1 = f_2 + f_4,\ w_2 = f_3 + f_5,\ w_3 = f_2,\ w_4 = f_3.$$

Доказательство. Пусть

$$U_1 + U_2 \leqslant \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle, \quad W_1 + W_2 \leqslant \langle f_2, f_3, f_4, f_5 \rangle.$$

Сразу можно считать, что $u_1 = e_2$, $u_2 = e_3$. Поскольку $p = 0$, сопрягая трансвекциями из X_{25}, X_{24}, X_{35}, X_{34}, мы можем далее получить, что, $w_3 = f_2$, $w_4 = f_3$. Таким образом, мы можем с самого начала полагать, что

$$u_3 = \gamma_1 e_1 + e_2 + \gamma_4 e_4, \qquad w_1 = f_2 + \alpha_4 f_4 + \alpha_5 f_5,$$

$$u_4 = \delta_1 e_1 + e_3 + \delta_4 e_4, \qquad w_2 = f_3 + \beta_4 f_4 + \beta_5 f_5.$$

По лемме 1 хотя бы один из инвариантов r или s должен быть равен 4.

Предположим вначале, что $r = 4$. Коэффициенты γ_1 и γ_4, δ_1 и δ_4 не могут быть равны нулю одновременно.

• Если $\delta_4 \neq 0$, то, сопрягая при помощи $d_4(\delta_4^{-1})$, можно считать, что коэффициент при e_4 равен единице. Сопрягая теперь при помощи трансвекции $x_{14}(-\delta_1)$, можно считать, кроме того, что $\delta_1 = 0$. Коэффициент γ_1 не может быть равен нулю. Поэтому, сопрягая элементом из Q_1, можно считать, что $\gamma_1 = 1$. Окончательно,

$$u_3 = e_1 + e_2 + \gamma e_4, \ \gamma \in K, \quad u_4 = e_3 + e_4. \tag{u1}$$

где $\gamma = \gamma_4$.

• Если же $\delta_4 = 0$, то $\gamma_4 \neq 0$, $\delta_1 \neq 0$ и мы приходим в результате сопряжения элементами из Q_1, X_{14}, Q_4 к базису

$$u_3 = e_2 + e_4, \quad u_4 = e_1 + e_3. \tag{u2}$$

Предположим теперь, что $s = 4$.

• Как и выше, если $\alpha_4 \neq 0$, то, сопрягая трансвекцией из X_{45}, можно считать, что $\alpha_5 = 0$. Следовательно, $\beta_5 \neq 0$, и, сопрягая элементом из Q_5, мы получим

$$w_1 = f_2 + \alpha f_4, \quad w_2 = f_3 + \beta f_4 + f_5, \ \alpha \in K^*, \ \beta \in K. \tag{w1}$$

где $\alpha = \alpha_4$, $\beta = \beta_4$.

• Если $\alpha_4 = 0$, то $\alpha_5 \neq 0$, $\beta_4 \neq 0$. Сопряжения при помощи элементов такого же типа, что и выше, дают

$$w_1 = f_2 + f_5, \quad w_2 = f_3 + \delta f_4. \tag{w2}$$

где $\delta = \beta_4$.

Если одновременно $r = s = 4$, мы оказываемся в одной из следующих ситуаций.

• В базисах (u1w1) сопрягаем элементом $d_3(\alpha)d_4(\alpha)d_5(\alpha)$. В результате получаем, что можно считать $\alpha = 1$.

• В базисах (u1w2), если $\gamma \neq 0$, сопряжение элементом $d_3(\gamma^{-1})d_4(\gamma^{-1})$ приводит к $\gamma = 1$.

• В базисах (u2w1), если $\beta \neq 0$, благодаря сопряжению $d_2(\beta)d_4(\beta)$, имеем $\beta = 1$.

• В базисах (u2w2), при помощи сопряжения элементом $d_2(\delta)d_4(\delta)d_5(\delta)$ приходим к $\delta = 1$.

Этим случай $r = s = 4$ рассмотрен полностью.

• Предположим теперь, что $r = 4$ и $s = 3$. Тогда, поскольку мы находимся в $\mathrm{GL}(5, K)$, должно быть $\alpha_4 = \beta_4 = 0$. Следовательно, сопрягая трансвекцией из X_{41}, получаем, что базисы вида (u1) и (u2) сопряжены. Окончательно, имеем:

$$\begin{aligned} u_3 &= e_1 + e_2, \qquad & u_4 &= e_3 + e_4, \\ w_1 &= f_2 + f_5, \qquad & w_2 &= f_3 + f_5. \end{aligned}$$

• Для $r = 3$ и $s = 4$ нам просто нужно поменять строки и столбцы в предыдущем случае, что и дает последнее утверждение леммы и завершает ее доказательство. □

Непосредственная проверка показывает, что почти во всех перечисленных в лемме случаях $q = 0$. Единственными исключениями являются базисы (u1w1), при $\beta + \gamma = -1$, (u1w2) при $\delta = -1$ и (u2w1) при $\alpha = -1$.

Следовательно, меняя здесь местами X и Y, мы дополнительно получаем следующие три типа орбит.

Лемма 4. *Пусть X и Y – некоммутирующие 2-торы в $\mathrm{GL}(5, K)$. Предположим, что $p = 1$ и $q = 0$. Тогда $r = s = 4$ и орбита (X, Y)*

определяется одним из следующих наборов базисов.

$$u_1 = e_1 + e_2 + \gamma e_4,\ u_2 = e_3 + e_4,\ u_3 = e_2,\ u_4 = e_3, \qquad (\mathrm{u1w1})'$$
$$w_1 = f_2,\ w_2 = f_3,\ w_3 = f_2 + f_4,\ w_4 = f_3 - (1+\gamma) f_4 + f_5, \gamma \in K;$$
$$u_1 = e_1 + e_2 + \lambda e_4,\ u_2 = e_3 + e_4,\ u_3 = e_2,\ u_4 = e_3,\ \lambda = 0,\ 1, \quad (\mathrm{u1w2})'$$
$$w_1 = f_2,\ w_2 = f_3,\ w_3 = f_2 + f_5,\ w_4 = f_3 - f_4;$$
$$u_1 = e_2 + e_4,\ u_2 = e_1 + e_3,\ u_3 = e_2,\ u_4 = e_3, \qquad (\mathrm{u2w1})'$$
$$w_1 = f_2,\ w_2 = f_3,\ w_3 = f_2 - f_4,\ w_4 = f_3 + \lambda f_4 + f_5,\ \lambda = 0,\ 1.$$

Лемма 5. *Предположим, что $p = q = 1$, тогда $r = s = 4$ и орбиты 2-торов определяются следующими базисами:*

$$u_1 = e_2,\ u_2 = e_3,\ u_3 = e_1 + e_2 + e_3,\ u_4 = e_4, \qquad (\mathrm{p1q1})$$
$$w_1 = f_2 + \lambda f_4 + f_5,\ w_2 = f_3 + \lambda f_4,\ w_3 = f_2,\ w_4 = f_4,\ \lambda = 0,\ 1.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3, можно считать, что

$$U_1 + U_2 \leqslant \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle, \quad W_1 + W_2 \leqslant \langle f_2, f_3, f_4, f_5 \rangle$$

и $u_1 = e_2$, $u_2 = e_3$. Поскольку $p = 1$, коэффициенты при f_3 векторов w_3 и w_4 должны быть равны нулю. Тогда, сопрягая трансвекциями из X_{25}, X_{24}, X_{45}, мы приходим к $w_3 = f_2$, $w_4 = f_4$. Таким образом,

$$u_3 = \gamma_1 e_1 + e_2 + \gamma_3 e_3, \qquad w_1 = f_2 + \alpha_4 f_4 + \alpha_5 f_5,$$
$$u_4 = \delta_1 e_1 + \delta_3 e_3 + e_4, \qquad w_2 = f_3 + \beta_4 f_4 + \beta_5 f_5.$$

Предположим, что $r = 4$. Следовательно, γ_i и δ_i, $i = 1, 3$, не равны нулю одновременно. Сопрягая трансвекцией $t_{14}(-\delta_1)$ и псевдоотражением $d_1(\gamma_1^{-1})$, получаем, что можно взять $\delta_1 = 0$ и $\gamma_1 = 1$. Аналогично, сопряжение трансвекцией из X_{34} позволяет считать $\delta_3 = 0$. Положим $\gamma = \gamma_3 \in K^*$.

Рассмотрим базис w_1, w_2. Благодаря сопряжению трансвекцией из X_{35}, можно считать $\beta_5 = 0$. Поскольку мы в $\mathrm{GL}(5, K)$, то получаем $\alpha_5 = 1$, следовательно, $s = 4$. Положим $\alpha = \alpha_4$, $\beta = \beta_4$.

Вспомним теперь, что $q = 1$. Это означает, что пересечение подпространств U_2 и $W_1^{\perp}$ одномерно. Непосредственные вычисления дают условие: $\alpha\gamma = \beta$.

Таким образом мы приходим к базисам

$$u_1 = e_2,\ u_2 = e_3,\ u_3 = e_1 + e_2 + \gamma e_3,\ u_4 = e_4,$$
$$w_1 = f_2 + \alpha f_4 + f_5,\ w_2 = f_3 + \alpha\gamma f_4,\ w_3 = f_2,\ w_4 = f_4.$$

Окончательно, если $\alpha \neq 0$, сопрягаем элементом $d_1(\gamma)d_2(\gamma)d_4(\alpha\gamma)d_5(\gamma)$, что позволяет считать $\gamma = \alpha = 1$. Если $\alpha = 0$, то сопряжение $d_3(\gamma^{-1})$ приводит к $\gamma = 1$.

Легко видеть, что при этом получается $s = 4$. Если предположить изначально, что $r = 3$ и $s = 4$, то, поменяв местами строки и столбцы, мы получим значения параметров $r = 4$ и $s = 3$, что невозможно. Лемма доказана. □

Лемма 6. *Предположим, что p или q принимает значение равное 2, тогда $t = 0$.*

Доказательство. Пусть, скажем, $p = 2$. Тогда $U_1 \subset W_2^{\perp}$ и $W_2 \subset {}^{\perp}U_2$. Отсюда $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ и $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Следовательно, $t = 0$. □

Некоторые из базисов, перечисленных в леммах 3 и 4, оказываются сопряженными. Чтобы окончательно разобраться с орбитами пар 2-торов X и Y, введем дополнительные инварианты:

$$a = a(X,Y) = \frac{(w_1,u_3)(w_3,u_1)}{(w_1,u_1)(w_3,u_3)},\ b = b(X,Y) = \frac{(w_2,u_3)(w_3,u_2)}{(w_2,u_2)(w_3,u_3)},$$

$$c = c(X,Y) = \frac{(w_1,u_4)(w_4,u_1)}{(w_1,u_1)(w_4,u_4)},\ d = d(X,Y) = \frac{(w_2,u_4)(w_4,u_2)}{(w_2,u_2)(w_4,u_4)}.$$

При этом параметры a, b, c, d определяются для каждой пары (X,Y) с точностью до перестановки элементами `Vierergruppe`, $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$.

Рассмотрим также множество $\{(w_i,u_j),(w_j,u_i), i = 1,2,\ j = 3,4\}$. Поскольку тор не определяет базисы оси и центра однозначно, элементы (w_i,u_j) нельзя взять в качестве инвариантов. Но их равенство или неравенство нулю сохраняется при сопряжении. Это позволяет нам для пары 2-торов X и Y ввести еще один инвариант $e = e(X,Y)$ равный количеству ненулевых элементов данного множества.

Лемма 7. *Пусть X, Y – пара 2-торов. Предположим, что $r = s = 4$ и хотя бы один из инвариантов p или q равен нулю. Тогда любая*

GL$(5, K)$*-орбита пары* (X, Y) *однозначно определяется следующими инвариантами:*

	a	d	e	p	q	*базисы*
1.	0	1	3	0	1	$(u2w1),\ \alpha=-1, \lambda=0$
$1'$.	0	1	3	1	0	$(u2w1)',\ \lambda=0$
2.	0	1	4	0	1	$(u1w1),\ \gamma=-1, \beta=0$
$2'$.	0	1	4	1	0	$(u1w1)',\ \gamma=-1$
3.	$1+\alpha$	1	4	0	0	$(u2w1),\ \alpha\neq 0,-1, \lambda=0$
4.	$1+\gamma$	1	5	0	0	$(u1w1),\ \gamma\neq 0,-1, \beta=0$
5.	$1+\gamma$	$-\gamma$		0	1	$(u1w1),\ \gamma+\beta=-1, \gamma, \beta\neq 0,-1$
$5'$.	$1+\gamma$	$-\gamma$		1	0	$(u1w1)',\ \gamma\neq 0,-1$
6.	$1+\gamma$	$1+\beta$		0	0	$(u1w1),\ \gamma+\beta\neq -1, \gamma\beta\neq 0$ *или* $\gamma=\beta=0$

Во всех случаях $b = c = 0$.

Если пара (X_1,Y_1) *принадлежит варианту* 1, 2 *или* 5, *а пара* (X_2,Y_2) *принадлежит варианту* $1'$, $2'$ *или* $5'$, *соответственно, то существует* $g \in G$ *такой, что* $gX_1g^{-1} = Y_2$, $gY_1g^{-1} = X_2$.

Доказательство. Вычислим указанные инварианты для базисов (uiwj), $i, j = 1, 2$. В тех случаях, когда наборы инвариантов совпадают, оказывается, что соответствующие им пары 2-торов сопряжены.

• С помощью матрицы перестановок ω_{23} сопряжены базисы (u2w2) и (u1w1) при $\gamma = \beta = 0$ и базисы (u1w2) и (u2w1) при $\lambda = 0$.

• Пусть $\lambda = 1$. Тогда для любого $\delta \neq 0$ базис (u1w2) сопряжен базису (u1w1) при $\gamma = 0$ и $\beta = \delta$ элементом

$$x_{45}(2\delta^{-1})x_{14}(\delta^{-1})x_{23}(2\delta^{-1})d_3(-\delta)d_4(\delta)d_5(-\delta)\omega_{23}.$$

Для любого $\alpha \neq 0$ базис (u1w2) сопряжен базису (u1w1) при $\beta = 0$ и $\gamma = \alpha$ элементом $d_5(-\alpha)x_{45}(1)\omega_{23}$.

• Наконец, рассмотрим случай, когда $\gamma, \beta \in K^*$ и $\gamma + \beta \neq -1$. Если в базисах (u1w1) поменять местами коэффициенты γ и β, то значения наших инвариантов не изменится (с точностью до сопряжения элементами `Vierergruppe`). Действительно, эти базисы сопряжены матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta & 1 \\ 0 & \gamma & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это заканчивает перечисление орбит в данном, а тем самым и во всех случаях. □

Следующие два параграфа посвящены описанию соответствующих этим орбитам порождений $\langle X, Y\rangle$ в $\mathrm{GL}(5, K)$. В §4 мы рассматриваем случаи, когда один из инвариантов r или s равен 3, а также рассмотренную лемме 5 ситуацию $r = s = 4$, $p = q = 1$. Эти случаи мы назовем **вырожденными**. В трудном заключительном параграфе мы рассматриваем массовую ситуацию, когда $r = s = 4$ и хотя бы один из инвариантов p или q равен 0.

§ 4. Порождения в $\mathrm{GL}(5, K)$: вырожденные случаи

Введём обозначения для подгрупп, которые будут фигурировать на протяжении оставшейся части работы.

$$X^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}_{ij,km,pq,rs} = \{x_{ij}(\gamma_1\varepsilon)x_{km}(\gamma_2\varepsilon)x_{pq}(\gamma_3\varepsilon)x_{rs}(\varepsilon),\ \varepsilon \in K\},$$

$$Q_{ij} = \{d_i(\varepsilon)d_j(\varepsilon),\ \varepsilon \in K\},$$

где $\gamma_t \in K^*$, $t = 1, 2, 3$. Обозначение $\gamma_t = 1$ мы опускаем. Вместо $\gamma_1 = -1$, когда γ_2, γ_3 равны 0 или 1, мы пишем $'$: $X'_{ij,km}$, $X'_{ij,km,pq}$ или $X'_{ij,km,pq,rs}$.

Теорема 1. *Предположим, что поле K содержит по крайней мере 5 элементов. Пусть X и Y – два 2-тора в $\mathrm{GL}(5, K)$, для которых $p = q = 1$. Пары (X, Y) таких торов разбиваются на две орбиты в $\mathrm{GL}(5, K)$. При этом $\langle X, Y\rangle = XYZ$, где $Z = [X, Y]$, причём*

- *для $e(X, Y) = 5$ подгруппа Z сопряжена с произведением $X_{13,14}X_{25,35}X_{15}$,*
- *для $e(X, Y) = 3$ подгруппа Z сопряжена с произведением $X_{13}X_{25,35}X_{15}$.*

Доказательство. Существование двух орбит сразу следует из леммы 5. Сопряжем указанные в лемме 5 базисы элементом группы Вейля ω_{23}. Тогда образующие групп X и Y будут выглядеть следующим образом:

$$x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \lambda(\varepsilon-1) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \lambda(\varepsilon-1) & \varepsilon-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Иными словами, в дальнейших вычислениях можно считать, что

$$x(\varepsilon) = d_2(\varepsilon)d_3(\varepsilon)x_{24}(\lambda(\varepsilon-1)/\varepsilon)x_{34}(\lambda(\varepsilon-1)/\varepsilon)x_{35}((\varepsilon-1)/\varepsilon)),$$

$$y(\varepsilon) = d_3(\varepsilon)d_4(\varepsilon)x_{13}(\varepsilon-1)x_{23}(\varepsilon-1).$$

Обозначим через H порожденную ими подгруппу,

$$H = \big\langle x(\varepsilon), y(\eta), \varepsilon, \eta \in K^* \big\rangle.$$

Составим теперь коммутатор двух типичных образующих

$$z(\varepsilon,\eta) = [x(\varepsilon), y(\eta)] = x(\varepsilon)y(\eta)x(\varepsilon)^{-1}y(\eta)^{-1}.$$

Прямое вычисление показывает, что

$$z(\varepsilon,\eta) = x_{13}\left(\frac{-\theta_0}{\varepsilon\eta}\right)x_{14}\left(\frac{-\lambda\theta_0}{\varepsilon\eta}\right)x_{25}\left(\theta_0\right)x_{35}\left(\theta_0\right)x_{15}\left(\frac{\theta_0^2-\varepsilon\theta_0}{\varepsilon\eta}\right),$$

где $\theta_0 = (\varepsilon-1)(\eta-1)$.

Теперь еще одно несложное непосредственное вычисление показывает, что все кратные коммутаторы $[z(\varepsilon_1,\eta_1), z(\varepsilon_2,\eta_2)]$, порождают подгруппу X_{15}.

С другой стороны,

$$z(\varepsilon,\eta)z\left(\varepsilon\eta, \frac{1-\varepsilon\eta}{\varepsilon+\eta-2\varepsilon\eta}\right) = x_{25}\left(\theta_1\right)x_{35}\left(\theta_1\right)x_{15}\left(q_1(\varepsilon,\eta)\right),$$

где

$$\theta_1 = \frac{(\varepsilon-1)^2(\eta-1)^2}{\varepsilon+\eta-2\varepsilon\eta},$$

а $q_1(\varepsilon,\eta)$ – некоторая дробно-рациональная функция от ε и η. Так как мы уже знаем, что X_{15} содержится в H, то для некоторого $\theta \in K^*$ элемент $x_{25}(\theta)x_{35}(\theta)$ содержится в H.

Из соотношения

$$x(\varepsilon)x_{25}(\theta)x_{35}(\theta)x(\varepsilon)^{-1} = x_{25}(\varepsilon\theta)x_{35}(\varepsilon\theta)$$

следует, что тогда в H содержится и вся подгруппа $X_{25,35}$

Аналогично,

$$z(\varepsilon,\eta)z\left(\frac{\varepsilon\eta-\varepsilon+1}{\eta}, 1-\eta\right) = x_{13}\left(\theta_2\right)x_{14}\left(\lambda\theta_2\right)x_{15}\left(q_2(\varepsilon,\eta)\right),$$

где

$$\theta_2 = \frac{(2\eta^2\varepsilon-2\eta\varepsilon+\varepsilon+\eta-1)(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2\eta^2-\varepsilon^2\eta+\varepsilon\eta},$$

а $q_2(\varepsilon,\eta)$ – некоторая дробно-рациональная функция от ε и η.

Следовательно, для некоторого $\theta \in K^*$ подгруппа H содержит элемент вида $x_{13}(\theta)x_{14}(\lambda\theta)$. Как и выше, из равенства

$$y(\eta)x_{13}(\theta)x_{14}(\lambda\theta)y(\eta)^{-1} = x_{13}(\theta\eta^{-1})x_{14}(\lambda\theta\eta^{-1})$$

можно теперь заключить, что в H содержится вся группа X_{13} или $X_{13,14}$, в зависимости от того, $\lambda=0$ или $\lambda=1$, что и завершает доказательство теоремы. □

Отметим два важных обстоятельства, которые позволят нам чуть сократить запись дальнейших вычислений в доказательствах теорем о порождениях.

• Если для наших рассуждений не имеет значения, какой аргумент у трансвекции, то мы будем просто писать $*$: $x_{15}(*)$.

• В большинстве случаев для извлечения всей подгруппы $X^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}_{ij,km,pq,rs}$ достаточно найти только какой-то один элемент $u(\theta) \in X^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}_{ij,km,pq,rs}$, содержащийся в $\langle X, Y\rangle$. Дело в том, что почти во всех встречающихся ситуациях выполняется одно из следующих соотношений:

$$x(\varepsilon)u(\theta)x(\varepsilon)^{-1} = u(\theta\varepsilon^{\pm1}),$$

$$y(\eta)u(\theta)y(\eta)^{-1} = u(\theta\eta^{\pm1}).$$

Теорема 2. *Предположим, что поле K содержит по крайней мере 5 элементов. Пусть X и Y – два 2-тора в $\mathrm{GL}(5,K)$ таких, что $r(X,Y)=3$, $s(X,Y)=4$. Такие торы X,Y образуют единственную орбиту пар (X,Y) в $\mathrm{GL}(5,K)$, при этом $H=\langle X,Y\rangle = XYZ$, где Z сопряжена с $X_{12,13}X_{24,35}X_{14,15}$.*

Доказательство. Из леммы 3 следует, что все такие пары сопряжены и в базисе (r3s4) образующие групп X и Y выглядят следующим образом:

$$x(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\varepsilon&0&\varepsilon-1&0\\0&0&\varepsilon&0&\varepsilon-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$y(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&\varepsilon-1&\varepsilon-1&0&0\\0&\varepsilon&0&0&0\\0&0&\varepsilon&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Как и в доказательстве предыдущей теоремы, образуем коммутатор

$$z(\varepsilon,\eta)=x(\varepsilon)y(\eta)x(\varepsilon)^{-1}y(\eta)^{-1}.$$

Прямое вычисление показывают, что $z(\varepsilon,\eta)$ раскладывается в произведение элементов из $X_{12,13}$, $X_{24,35}$ и $X_{14,15}$.

Предполагая, что $\operatorname{char} K\neq 2$,

$$[z(\varepsilon,2),z(\varepsilon+1,2)]=x_{14}\left(\frac{\varepsilon-1}{2(\varepsilon+1)}\right)x_{15}\left(\frac{\varepsilon-1}{2(\varepsilon+1)}\right),$$

откуда следует, что $X_{14,15}$ содержится в H. С другой стороны,

$$z(\varepsilon+1,\eta+1)z(\varepsilon+1,-\eta+1)=x_{12}\left(\frac{-2\eta^2\varepsilon}{(\eta^2-1)(\varepsilon+1)}\right)x_{13}\left(\frac{-2\eta^2\varepsilon}{(\eta^2-1)(\varepsilon+1)}\right)$$

$$\times\, x_{14}\left(\frac{-\eta^2\varepsilon^2}{(\eta+1)(\varepsilon+1)}\right)x_{15}\left(\frac{-\eta^2\varepsilon^2}{(\eta+1)(\varepsilon+1)}\right).$$

Взяв здесь $\eta\neq 0,1,-1$, мы можем получить вначале один элемент группы $X_{12,13}$, а потом и всю эту группу, откуда сразу следует, что тогда и $X_{24,35}$ содержится в H.

С другой стороны, если $\operatorname{char} K = 2$, то

$$[z(\varepsilon,\eta), z(\varepsilon+1,\eta+1)] = x_{14}\,(1+\varepsilon+\eta)\,x_{15}\,(1+\varepsilon+\eta)\,.$$

Прямое вычисление показывает, что

$$x(\theta)z(\varepsilon{+}1,\varepsilon^{-1}{+}1)z(\eta{+}1,\eta^{-1}{+}1)x(\theta)^{-1} = x_{12}\left(\theta^{-1}\frac{(1+\eta\varepsilon)(\varepsilon+\eta)}{(\eta+1)^2(\varepsilon+1)^2}\right)$$
$$\times\, x_{13}\left(\theta^{-1}\frac{(1+\eta\varepsilon)(\varepsilon+\eta)}{(\eta+1)^2(\varepsilon+1)^2}\right)x_{14}(g(\varepsilon,\eta,\theta))x_{15}(g(\varepsilon,\eta,\theta)),$$

где $g(\varepsilon,\eta,\theta)$ – некоторая дробно-рациональная функция с полюсами в $\varepsilon = 1$, $\eta = 1$ и $\theta = 0$. Взяв теперь произвольные ε и η такие, что $(1{+}\eta\varepsilon)(\varepsilon{+}\eta) \neq 0$, и $\theta \neq 0$, мы получим все элементы группы $X_{12,13}$. $\square$

С учетом леммы 3 применение контраградиента позволяет следующим образом переформулировать теорему 2.

Теорема 3. *Пусть поле K содержит по крайней мере 5 элементов. Предположим, что X и Y – два 2-тора в $\mathrm{GL}(5,K)$ таких, что $r(X,Y) = 4$, $s(X,Y) = 3$. Такие торы X,Y образуют единственную орбиту пар (X,Y) в $\mathrm{GL}(5,K)$, при этом $H = \langle X,Y\rangle = XYZ$, где Z сопряжена группе $X_{12,34}X_{25,45}X_{15,35}$.*

Это завершает рассмотрение всех вырожденных случаев.

§5. Порождения в $\mathrm{GL}(5,K)$: невырожденные случаи

Единственное, что нам остается, это отождествить порождения всех пар 2-торов, перечисленных в лемме 7. Ответ дается следующим результатом.

Обозначим через $H = \langle X,Y\rangle$, подгруппу порожденную 2-торами X и Y, а через $x(\varepsilon)$ и $y(\varepsilon)$, $\varepsilon \in K^*$, – образующие этих торов. Как и в предыдущем параграфе основную роль во всех наших вычислениях играют коммутаторы

$$\begin{aligned} z(\varepsilon,\eta) &= [x(\varepsilon), y(\eta)],\\ z_x(\varepsilon,\eta,\theta) &= [z(\varepsilon,\eta), x(\theta)],\\ z_y(\varepsilon,\eta,\theta) &= [z(\varepsilon,\eta), y(\theta)]. \end{aligned}$$

Теорема 4. *Предположим, что поле K содержит по крайней мере 7 элементов. Пусть X и Y – два 2-тора в $\mathrm{GL}(5,K)$ таких, что*

$r(X,Y)=s(X,Y)=4$, причем хотя бы один из параметров p или q равен 0.

Тогда с точностью до сопряжения X и Y порождают одну из подгрупп H, перечисленных ниже. При этом пара (X,Y) лежит на соответствующей орбите, указанной в лемме 7 и определяемой выписанными в ней инвариантами:

	орбита	H
1.	1	$Q_{24}Q_{34}X_{23}X_{14}X_{45}X_{15}$
2.	2	$XYX'_{24,13,23}X_{35,45}X_{14}X_{25}X_{15},\ \operatorname{char}K\neq 2,$
		$XYX_{24,13,23,25}X_{25,35,45}X_{14}X_{15}\ \ \operatorname{char}K=2,$
3.	3	$\mathrm{GL}(2,K)X_{14}X_{45}X_{15}$
4.	4	$\mathrm{GL}(2,K)X_{14}X_{45}X_{35}X_{25}X_{15}$
5.	5	$XYX^{1-\gamma,-\gamma,\theta}_{14,24,34,35}X^{-(1+\theta)\gamma,\gamma\theta^{-1}}_{12,13,14}X_{25}X_{15},\ \ \theta\neq 0,-1$
6.	$6,\gamma=\beta=0$	$Q_{24}X_{12,34}X_{13,35}X_{23,25}$
7.	$6,\gamma+\beta=0$	$Q_{24}X^{-\gamma^2}_{34,12}X^{-\gamma^2}_{23,45}X^{\gamma^2}_{24,13,35}X_{14}X_{25}X_{15}$
8.	$6,\gamma=-1,\beta=1$	$XYX'_{12,34}X'_{23,45}X_{13,24,35}X_{14}X_{25}X_{15}$
9.	$6,\gamma=-1,\beta\neq 1$	$\mathrm{GL}(2,K)X^{1-\beta^{-1}}_{12,13}X_{25}X_{15}$
10.	6	$\mathrm{GL}(2,K)X^{-\beta}_{12,13}X^{-\gamma}_{35,25}X_{15}$

Всюду, где не указаны значения коэффициентов γ, α и β, мы считаем, что они принадлежат множеству $K\setminus\{0,-1\}$.

Доказательство. Ясно, что пары, лежащие на орбитах, обозначенных в лемме 7 номерами k и k', где $k=1,2,5$, порождают одинаково устроенные подгруппы. Поэтому нам надо рассмотреть лишь орбиты 1–6.

• Базисы (u2w1), $\lambda = 0$, $\alpha = -1$. В этом базисе образующие групп X и Y выглядят следующими образом:

$$x(\varepsilon) = d_2(\varepsilon)d_3(\varepsilon)x_{24}((1-\varepsilon^{-1}))x_{35}(1-\varepsilon^{-1}),$$

$$y(\varepsilon) = d_2(\varepsilon)d_3(\varepsilon)x_{42}(\varepsilon-1)x_{13}(\varepsilon-1).$$

Сопрягая при помощи матрицы $x_{32}(-1)w_{34}$, перейдем к другому базису, в котором образующие примут следующий вид:

$$x(\varepsilon) = d_3(\varepsilon)d_4(\varepsilon)x_{23}(\varepsilon-1)x_{45}(1-\varepsilon^{-1}), \quad y(\varepsilon) = d_2(\varepsilon)d_4(\varepsilon)x_{14}(\varepsilon-1).$$

Вычисление второго коммутанта убеждает нас в том, что $X_{15} \leqslant H$.

Предполагая, что $\operatorname{char} K \neq 2$, получим

$$z(\varepsilon,\eta)z\left(\frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1},\eta\right)=x_{45}\left(-\frac{2(\varepsilon-1)^2(\eta-1)}{2\varepsilon-1}\right)x_{15}\left(-\frac{(\varepsilon-1)^2(\eta-1)^2}{\varepsilon\eta(2\varepsilon-1)}\right),$$

$$z(\varepsilon,\eta)z(\varepsilon,2-\eta) = x_{14}\left(-\frac{2(\varepsilon-1)(\eta-1)^2}{\varepsilon\eta(\eta-2)}\right)x_{15}\left(-\frac{(\varepsilon-1)^2(\eta-1)^2}{\varepsilon\eta}\right).$$

С другой стороны, при $\operatorname{char} K = 2$

$$z(\varepsilon,\eta)z(\varepsilon,\varepsilon)z(\varepsilon,1+\varepsilon+\eta) = x_{14}\left(\frac{(1+\eta)(1+\varepsilon^2)(\varepsilon+\eta)}{\varepsilon^2\eta(1+\varepsilon+\eta)}\right)x_{15}(*),$$

$$\begin{aligned} z(\varepsilon,\eta)z(\varepsilon,\varepsilon)z\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon\eta}{\varepsilon^2+\eta},\eta\right) &= x_{14}\left(\frac{(\varepsilon+\eta)(1+\varepsilon^2)}{\eta\varepsilon^2}\right) \\ &\quad\times x_{45}\left(\frac{(\varepsilon+\eta)(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3)}{\eta+\varepsilon^2}\right)x_{15}(*). \end{aligned}$$

Таким образом, и в том и в другом случае подгруппы X_{14} и X_{45} содержатся в H. Теперь раскладывая коммутатор $z(\varepsilon,\eta)$, мы можем извлечь нетривиальный элемент $x_{23}(\varepsilon)$, а потом и всю подгруппу X_{23}.

• Базисы (u1w1), $\gamma = -1$, $\beta = 0$. При помощи одновременного сопряжения данных базисов матрицей перестановки ω_{34} и трансвекцией $x_{32}(1)$, перейдем к новым базисам:

$$u_1 = e_2+e_3,\ u_2 = e_4,\ u_3 = e_1+e_2,\ u_4 = e_3+e_4,$$

$$w_1 = f_3,\ w_2 = f_2+f_3+f_5,\ w_3 = f_2,\ w_4 = f_2+f_3.$$

Теперь группа $\langle X, Y\rangle$ вкладывается в группу верхних треугольных матриц, а ее образующие принимают следующий вид:

$$x(\varepsilon)=d_3(\varepsilon)d_4(\varepsilon)x_{23}(\varepsilon-1)x_{45}(\varepsilon-1), \quad y(\varepsilon)=d_2(\varepsilon)d_4(\varepsilon)x_{12}(\varepsilon-1)x_{23}(\varepsilon-1).$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$z(\varepsilon,\eta) = x_{13}(\theta_1)x_{23}(\theta_1)x_{24}(-\theta_1)x_{25}(\theta_1)x_{25}(\theta_2)x_{35}(\theta_2) \\ \times x_{45}(\theta_2)x_{14}(\theta_3)x_{15}(p_1(\varepsilon,\eta)/\varepsilon),$$

где

$$\theta_1 = -\frac{(\varepsilon-1)(\eta-1)}{\varepsilon}, \quad \theta_2 = -(\varepsilon-1)(\eta-1), \quad \theta_3 = -\frac{(\varepsilon-1)(\eta-1)^2}{\varepsilon\eta},$$

а $p_1(\varepsilon,\eta)$ – некоторый многочлен от ε и η.

Теперь точно так же, как и в других случаях, непосредственным вычислением можно убедиться в том, что $[[X,Y],[X,Y]] = X_{15}$.

Предположим вначале, что $\operatorname{char} K \neq 2$. Тогда

$$z(\varepsilon,\eta)z(\varepsilon,2-\eta) = x_{14}\left(-\frac{2(\eta-1)^2(\varepsilon-1)}{(\eta-2)\varepsilon\eta}\right)x_{15}\left(-\frac{(\eta-1)^2(\varepsilon-1)}{\varepsilon\eta}\right),$$

откуда следует, что X_{14} содержится в H. Но так как

$$z(\varepsilon,2)z(\varepsilon+1,\varepsilon^{-2}) = x_{35}\left(\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\right)x_{45}\left(\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\right)x_{14}\,(*)\,x_{15}\,(*)\,,$$

то и $X_{35,45}$ содержится в H. Но тогда

$$z(\varepsilon,\eta)z\left(\frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1},\eta\right) = x_{15}\,(*)\,x_{25}\left(-\frac{2(\varepsilon-1)(\eta-1)^2}{(2\varepsilon-1)}\right)\times \\ \times x_{35}\left(-\frac{2(\varepsilon-1)(\eta-1)^2}{(2\varepsilon-1)}\right)x_{45}\left(-\frac{2(\varepsilon-1)(\eta-1)^2}{(2\varepsilon-1)}\right),$$

так что X_{25} содержится в H, и тогда из разложения коммутатора $z(\varepsilon,\eta)$ вытекает, что и подгруппа $X'_{24,13,23}$ также содержится в H.

Если же $\operatorname{char} K = 2$, то

$$z(\varepsilon,\eta)z(\varepsilon,\varepsilon)z(\varepsilon,1+\varepsilon+\eta) = x_{14}\left(\frac{(1+\eta)(1+\varepsilon^2)(\varepsilon+\eta)}{\varepsilon^2\eta(1+\varepsilon+\eta)}\right)x_{15}\,(*)\,,$$

$$z\,(\varepsilon,\varepsilon+1)\,z\left(\eta,\frac{1+\varepsilon\eta}{1+\eta}\right) = x_{25}(\theta)x_{35}(\theta)x_{45}(\theta)x_{14}\left(\frac{\varepsilon+\eta}{1+\varepsilon\eta}\right)x_{15}\,(\eta+\varepsilon\eta)\,,$$

где $\theta = (1+\varepsilon)(\varepsilon+\eta)$. Отсюда следует, что X_{14} и $X_{25,35,45}$ являются подгруппами H. Так как в характеристике 2 выполняется равенство $[X_{25,35,45}, X_{24,13,23,25}] = X_{15}$, то подгруппа X_{25} не извлекается.

• Базисы (u2w1), $\lambda = 0$, $\alpha \neq 0, -1$. Сопряжением при помощи матрицы перестановок перейдем к базисам:

$$u_1 = e_2,\ u_2 = e_4,\ u_3 = e_2 + e_3,\ u_4 = e_1 + e_4,$$

$$w_1 = f_2 + \alpha f_3,\ w_2 = f_4 + f_5,\ w_3 = f_2,\ w_4 = f_4.$$

В этом базисе образующие групп X и Y выглядят следующими образом:

$$x(\varepsilon) = d_2(\varepsilon) d_4(\varepsilon) x_{23}(\alpha(1-\varepsilon^{-1})) x_{45}(1-\varepsilon^{-1}),$$
$$y(\varepsilon) = d_2(\varepsilon) d_4(\varepsilon) x_{32}(\varepsilon - 1) x_{14}(\varepsilon - 1).$$

Предположим вначале, что $\operatorname{char} K \neq 2$. Тогда

$$z_x\left(\varepsilon, \frac{1+\alpha}{\alpha}, \frac{2(\varepsilon+\alpha+1)}{\varepsilon-1}\right) z_x\left(\varepsilon, \frac{1+\alpha}{\alpha}, \frac{2-2(\varepsilon+\alpha+1)}{\varepsilon-1}\right)$$
$$= x_{14}\left(\frac{(1-\varepsilon)(\varepsilon+2\alpha-1)^2}{2(\alpha+\alpha^2)\varepsilon(\varepsilon+\gamma-1)}\right),$$

$$z_x\left(\varepsilon, \frac{1+\alpha}{\alpha}, \frac{-2\alpha}{\varepsilon}\right) z_x\left(\varepsilon, \frac{1+\alpha}{\alpha}, \frac{2(\alpha+\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$$
$$= x_{14}(*) x_{15}\left(\frac{(1-\varepsilon)(\varepsilon+2\alpha)^2((\varepsilon-1)\varepsilon+\alpha(2\varepsilon-1))}{2(\alpha^2+\alpha^3)\varepsilon^2(\varepsilon+\alpha)}\right).$$

Таким образом мы последовательно извлекаем X_{14} и X_{15}.

Предположим теперь дополнительно, что $\alpha \neq -\frac{1}{2}$. Домножая $z_x\left(\varepsilon, \frac{1+\alpha}{\alpha}, \eta\right)$ на подходящие элементы из групп X_{14} и X_{15}, мы видим, что H содержит элемент

$$u(\varepsilon, \eta) = x_{23}((1+2\alpha)(\varepsilon-1)\varepsilon(\eta-1)) x_{45}(\alpha^{-1}(\varepsilon-1)(\eta-1)).$$

Но тогда

$$u(\varepsilon, \eta) u(\varepsilon+1, 2-\eta+(\eta-1)\varepsilon^{-1}) = x_{23}(-(1+2\alpha)(\varepsilon-1)(\eta-1)),$$

так что X_{23} и X_{45} тоже содержатся в H.

Если же $\alpha = -\frac{1}{2}$, то заметим, что при $\varepsilon' = (\varepsilon-1)^2/(\varepsilon+1)^2$ в разложение элемента $z_x(\varepsilon', \varepsilon, 2)$ унипотент $x_{32}(*)$ не входит. Тогда произведение $z_x(\varepsilon', \varepsilon, 2) z_x(\varepsilon', \varepsilon, 1/2)$ содержит корневые унипотентные элементы из групп X_{23}, X_{14}, X_{15}, X_{45} и, таким образом, $X_{23} \leqslant H$. Это заканчивает доказательство того, что в характеристике $\neq 2$ группа H порождается подгруппами Q_{24}, X_{23}, X_{32}, X_{14}, X_{45} и X_{15}.

С другой стороны в случае поля характеристики 2 положим при $\alpha \neq 1$

$$f(\varepsilon) = z_x(\varepsilon, 1 + \alpha^{-1}, \varepsilon) z_x(\varepsilon + 1, 1 + \alpha^{-1}, \varepsilon).$$

Ясно, что тогда

$$[f(\varepsilon), f(\varepsilon)] = x_{15}\left(\frac{1+\varepsilon}{(\gamma+\gamma^2)\varepsilon^2}\right)$$

$$x(\eta) f(\varepsilon) x(\eta)^{-1} f(\eta + \eta\varepsilon + 1) = x_{14}\left(\frac{1 + \eta\varepsilon^2 + \eta^2 + \eta^2\varepsilon^2}{(1+\alpha)\eta\varepsilon^2(1 + \eta^2 + \eta^2\varepsilon^2)}\right) x_{15}(*).$$

Учитывая разложения

$$\begin{gathered} f(\varepsilon) = x_{14}\left(\frac{1}{(1+\alpha)\varepsilon^2}\right) x_{45}\left(\frac{1+\varepsilon}{\alpha}\right) x_{15}\left(\frac{\alpha+\varepsilon^4}{(\alpha+\alpha^2)\varepsilon^2}\right), \\ z_x(\varepsilon, 1+\alpha^{-1}, \varepsilon+1) = x_{23}(\varepsilon^2(1+\varepsilon)) x_{14}(1/(1+\alpha)) \\ \times x_{45}((\varepsilon+\varepsilon^2)\alpha^{-1}) x_{15}\left(\frac{1+\alpha+\varepsilon^2}{(\alpha+\alpha^2)}\right), \end{gathered}$$

мы можем точно так же, как выше, заключить, что

$$H = \langle Q_{24}, X_{23}, X_{32}, X_{14}, X_{45} \rangle,$$

что и завершает анализ этого случая.

• Базисы (u1w1), $\gamma \neq 0, -1$, $\beta = 0$. Перейдем к новым базисам:

$$\begin{gathered} u_1 = e_2,\ u_2 = e_4,\ u_3 = e_1 + e_2 + \gamma e_3,\ u_4 = e_3 + e_4, \\ w_1 = f_2 + f_3,\ w_2 = f_4 + f_5,\ w_3 = f_2,\ w_4 = f_4. \end{gathered}$$

Тогда образующие групп X и Y принимают следующий вид:

$$x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(\varepsilon-1) & 1 & \varepsilon-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

или, в элементарных преобразованиях,

$$\begin{gathered} x(\varepsilon) = d_2(\varepsilon) d_4(\varepsilon) x_{23}(1-\varepsilon^{-1}) x_{45}(1-\varepsilon^{-1}), \\ y(\varepsilon) = d_2(\varepsilon) d_4(\varepsilon) x_{32}(\gamma(\varepsilon-1)) x_{12}(\varepsilon-1) x_{34}(\varepsilon-1). \end{gathered}$$

Предположим вначале, что $\operatorname{char} K \neq 2$. Тогда

$$z_x\left(\varepsilon+1, \frac{1+\gamma}{\gamma}, \frac{-2\gamma}{\varepsilon}\right) z_x\left(\varepsilon+1, \frac{1+\gamma}{\gamma}, \frac{2\gamma+2\varepsilon}{\varepsilon}\right) = x_{14}\left(-\frac{\varepsilon(2\gamma+\varepsilon)^2}{2\gamma^2(1+\gamma)(1+\varepsilon)(\gamma+\varepsilon)}\right).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} y(\varepsilon)x_{14}(\eta)y(\varepsilon)^{-1} &= x_{14}(\eta/\varepsilon), \\ x(\varepsilon)x_{14}(\eta)x(\varepsilon)^{-1} &= x_{14}(\eta/\varepsilon)x_{15}(\eta(\varepsilon^{-1}-1)), \end{aligned} \tag{1}$$

то мы последовательно заключаем, что группы X_{14} и X_{15} содержатся в H.

Предположим теперь дополнительно, что $\gamma \neq -\frac{1}{2}$. В этом случае

$$z_x\left(\frac{1}{1+2\gamma}, \frac{1+\gamma}{\gamma}, \theta+1\right) = x_{23}\left(\frac{2\theta}{1+2\gamma}\right) x_{45}\left(\frac{2\theta}{1+2\gamma}\right) x_{14}(*)\, x_{15}(*), \tag{2}$$

откуда следует, что $X_{23,45}$ содержится в H. Теперь из разложения $x(\varepsilon)$ и $y(\varepsilon)$ мы можем извлечь подгруппы Q_{24} и $X^{\gamma}_{32,12,34}$.

Положим теперь

$$t(\varepsilon) = x_{23}(\varepsilon)x_{45}(\varepsilon), \quad s(\varepsilon) = x_{32}(\gamma\varepsilon)x_{12}(\varepsilon)x_{34}(\varepsilon),$$

элементы $t(\varepsilon)$ и $s(\varepsilon)$ содержатся в H. Рассмотрим гомоморфизм φ из группы, порожденной $t(\varepsilon)$ и $s(\varepsilon)$ в $\mathrm{SL}_2(K)$, такой, что

$$\varphi(t(\varepsilon)) = x_{12}(\varepsilon), \quad \varphi(s(\varepsilon)) = x_{21}(\varepsilon).$$

Очевидно, φ – эпиморфизм. Следовательно, $\langle t(\varepsilon), s(\eta),\ \varepsilon, \eta \in K\rangle$ изоморфно полупрямому произведению $\mathrm{SL}_2(K)\operatorname{Ker}\varphi$. Вычислим теперь $\operatorname{Ker}\varphi$.

Для $\xi \in K^*$ положим

$$w(\xi) = t(\xi)s(-\xi^{-1})t(\xi), \quad h(\xi) = w(\xi)w(1)^{-1}.$$

Ясно, что $\operatorname{Ker}\varphi$ порождается элементами

$$w(\xi)t(\varepsilon)w(-\xi)s(\xi^{-2}\varepsilon), \quad h(\xi)h(\zeta)h(\xi^{-1}\zeta^{-1}),$$

где $\xi \in K^*$.

Непосредственное вычисление показывает, что

$$w(\xi)t(\varepsilon)w(-\xi)s(\xi^{-2}\varepsilon)=x_{14}(-\varepsilon\gamma^{-2}\xi^{-2})x_{15}(\varepsilon\gamma^{-2}\xi^{-1})x_{25}(-\varepsilon\gamma^{-1})x_{45}(\varepsilon),$$
$$h(\xi)h(\zeta)h(\xi^{-1}\zeta^{-1})=x_{14}\left(\frac{\theta}{\gamma^2\xi\zeta}\right)x_{15}\left(\frac{2(1-\xi)\theta}{\gamma^2\xi}\right)x_{25}\left(\frac{2\theta}{\gamma}\right)x_{45}\left(-2\theta\right),$$

где $\theta=-(1-\xi)(1-\zeta)$, так что $\operatorname{Ker}\varphi\leqslant\langle X_{14},\ X_{15},\ X_{25},X_{45},\rangle$ и $X_{25,45}^{-\gamma^{-1}}\leqslant\operatorname{Ker}\varphi$.

Так как $[X_{32,12,34}^{\gamma},X_{25,45}^{-\gamma^{-1}}]=X_{35,15}$, то X_{35} лежит в H. А так как $[X_{23,45},X_{35}]=X_{25}$, то и X_{25}, X_{45}, X_{23} содержатся в H.

Если же $\gamma=-\frac{1}{2}$, то вместо (2) мы проделаем следующие вычисления:

$$\begin{aligned}
&z_x(\varepsilon+1,-1,2)=x_{25}\,(4\varepsilon)\,x_{45}\,(2\varepsilon)\,x_{14}(*)x_{15}(*),\\
&z_x(\varepsilon',\varepsilon,2)z_x(\varepsilon',\varepsilon,1/2)x_{25}\left(-\frac{4\varepsilon'}{(\varepsilon+1)}\right)x_{45}\left(-\frac{2\varepsilon'}{(\varepsilon+1)}\right)\\
&\qquad=x_{23}\left(2(1-4\varepsilon^{-1}+6\varepsilon^{-2}-4\varepsilon^{-3})\right)x_{45}\left(2(1-4\varepsilon^{-1}+6\varepsilon^{-2}-4\varepsilon^{-3})\right)\\
&\qquad\qquad\times x_{14}(*)x_{15}(*),
\end{aligned}$$

где $\varepsilon'=(\varepsilon-1)^2/(\varepsilon+1)^2$. Как и выше, мы можем заключить, что подгруппа $X_{23,45}$ содержится в H. Все остальные вычисления не меняются.

Заметим, что в приведенных выше вычислениях характеристика играет роль только при извлечении подгрупп X_{14} и $X_{23,45}$. Поэтому в случае $\operatorname{char}K=2$ достаточно показать, что эти подгруппы содержатся в H. Положим

$$\begin{aligned}
f(\varepsilon)&=z_x(\varepsilon,(1+\gamma)/\gamma,\varepsilon)z_x(\varepsilon+1,(1+\gamma)/\gamma,\varepsilon),\\
g(\varepsilon)&=z_x(\varepsilon,(1+\gamma)/\gamma,\varepsilon+1).
\end{aligned}$$

Тогда

$$[f(\varepsilon),f(\eta)]=x_{15}\left(\frac{\varepsilon^2+\varepsilon^3+\eta^2+\eta^3}{(\gamma^2+\gamma^3)\varepsilon^2\eta^2}\right)$$

$$x(\varepsilon)f(\varepsilon)x(\varepsilon)^{-1}f(\varepsilon+\varepsilon^2+1)=x_{14}\left(\frac{1+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4}{(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)\varepsilon^3(\gamma+\gamma^2)}\right)x_{15}(*),$$

так что X_{14} содержится в H в силу (1).

Наконец,

$$f(1+\varepsilon+\varepsilon^2)g(\varepsilon) = x_{23}\left(\frac{\varepsilon^2(1+\varepsilon)}{\gamma}\right)x_{45}\left(\frac{\varepsilon^2(1+\varepsilon)}{\gamma}\right)x_{14}(*)x_{15}(*).$$

Учитывая равенство

$$x(\varepsilon)x_{23}(\eta)x_{45}(\eta)x(\varepsilon)^{-1} = x_{23}(\varepsilon\eta)x_{45}(\varepsilon\eta),$$

мы можем заключить, что $X_{23,45}$ содержится в H, что и завершает анализ этого случая.

• Базисы (u1w1), $\gamma,\beta \neq 0,-1$, $\gamma+\beta=-1$. Зафиксируем некоторый элемент поля $\theta \neq 0,-1$. Сопряжем образующие группы H посредством

$$x_{43}(-1/\theta)x_{34}(-\theta-1)d_3(\gamma)x_{12}(1)\omega_{23}x_{32}(-\gamma)x_{23}(\gamma^{-1}).$$

В результате мы перейдем к новым образующим

$$x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon-1 & \frac{\gamma(1-\varepsilon)}{1+\theta} & \gamma(1-\varepsilon) & 0 \\ 0 & \varepsilon & \frac{\gamma(1-\varepsilon)}{1+\theta} & \gamma(1-\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta(\varepsilon-1) & \varepsilon-1 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \frac{\varepsilon-1}{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(\gamma-1)(\varepsilon-1)}{\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \theta(1+\theta)(1-\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как обычно, вычисление $[z(\varepsilon,\eta), z(\varepsilon',\eta')]$ даёт подгруппу X_{15}. Поскольку

$$\begin{aligned} z(\varepsilon,\eta)z_x&\left(\eta,\eta,\frac{\varepsilon-\eta\varepsilon}{\varepsilon+\eta-2\varepsilon\eta}\right) \\ &= x_{25}\left(\frac{\gamma(\eta-1)(\eta^2+2\eta(\varepsilon-1)-\varepsilon)(\varepsilon-1)}{\varepsilon+\eta-2\varepsilon\eta}\right)x_{15}(*), \end{aligned}$$

мы получаем также подгруппу X_{25}.

Положим теперь

$$f(\varepsilon) = x_{14}((1-\gamma)\varepsilon)x_{24}(-\gamma\varepsilon)x_{34}(\theta\varepsilon)x_{35}(\varepsilon),$$

$$g(\varepsilon) = x_{12}(\varepsilon/\gamma)x_{13}(\varepsilon/\theta)x_{14}(-(1+\theta)\varepsilon).$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$z(\varepsilon,\eta)z\left(\eta,\frac{\varepsilon+\eta-\varepsilon\eta}{\varepsilon}\right)=g\left(\frac{(\varepsilon-1)(\eta-1)(2\varepsilon\eta-\varepsilon-\eta)}{\varepsilon\eta(\varepsilon\eta-\varepsilon-\eta)}\right)x_{25}(*)x_{15}(*),$$

$$z(\varepsilon,\eta)z\left(\eta,\frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}\right)=f\left(\frac{(\varepsilon-1)(\eta-1)(2\varepsilon\eta-\varepsilon-\eta)}{\varepsilon\eta(2\varepsilon-1)}\right)x_{25}(*)x_{15}(*),$$

так что $X^{1-\gamma,-\gamma,\theta}_{14,24,34,35}$ и $X^{-(1+\theta)\gamma,\gamma\theta^{-1}}_{12,13,14}$ являются подгруппами H.

Рассмотрим теперь подгруппу

$$Z=\langle X^{1-\gamma,-\gamma,\theta}_{14,24,34,35},X^{-(1+\theta)\gamma,\gamma\theta^{-1}}_{12,13,14},X_{25},X_{15}\rangle$$

и вычислим коммутаторы $[f(\varepsilon),x(\eta)]$, $[f(\varepsilon),y(\eta)]$, $[g(\varepsilon),x(\eta)]$ и $[g(\varepsilon),y(\eta)]$. Все они лежат в Z, что и доказывает наше утверждение в этом случае.

• Базисы (u1w1), $\gamma=\beta=0$. Сопряжением при помощи матрицы перестановок перейдем к базисам:

$$u_1=e_2,\ u_2=e_4,\ u_3=e_1+e_2,\ u_4=e_3+e_4,$$

$$w_1=f_2+f_3,\ w_2=f_4+f_5,\ w_3=f_2,\ w_4=f_4.$$

В этом базисе образующие выглядят следующим образом:

$$x(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\varepsilon&\varepsilon-1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\varepsilon&\varepsilon-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad y(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&\varepsilon-1&0&0&0\\0&\varepsilon&0&0&0\\0&0&1&\varepsilon-1&0\\0&0&0&\varepsilon&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Порожденная ими группа равна $Q_{24}X_{12,34}X_{13,35}X_{23,25}$ по лемме 5 работы [4].

• Базисы (u1w1), $\gamma,\beta\neq 0,-1$, $\gamma+\beta=0$. В этом случае при помощи одновременного сопряжения элементом $\omega_{34}\omega_{23}x_{23}(1/\gamma)$ порождающие элементы сопряжены матрицам

$$x(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\varepsilon&\gamma(\varepsilon-1)&0&\varepsilon-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\varepsilon&\gamma^{-1}(\varepsilon-1)\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$y(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1 & \gamma^{-1}(1-\varepsilon) & 0 & \varepsilon-1 & 0\\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \gamma(\varepsilon-1) & 0\\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Подгруппа, порождённая коммутаторами $[z(\varepsilon,\eta),z(-\eta,-\varepsilon)]$, как всегда, совпадает с X_{15}. Кроме того,

$$\begin{aligned}&[z(\varepsilon,\eta),z\left(\varepsilon+1,\frac{\varepsilon\eta}{\varepsilon+1}\right)]=x_{14}(\theta\varepsilon\eta)x_{25}(\theta)x_{15}(*),\\ &x(-\theta_1\theta^{-1})x_{14}(\theta\varepsilon\eta)x_{25}(\theta)x_{14}(-\theta_1\theta^{-1})^{-1}x_{14}(\theta_1\varepsilon_1\eta_1)x_{25}(\theta_1)\\ &\qquad=x_{14}(\theta\varepsilon\eta-\theta_1^2\varepsilon_1\eta_1\theta^{-1})x_{15}(*),\end{aligned}$$

где

$$\theta=\frac{\gamma(\varepsilon-1)(\eta-1)(\eta^2\varepsilon-(1+\varepsilon)^2+\eta(\varepsilon-1)^2}{\eta^2\varepsilon(\varepsilon+1)^2}.$$

Таким образом мы извлекаем группы X_{14} и X_{25}. Теперь

$$\begin{aligned}&z(\varepsilon,\eta)z\left(\frac{\varepsilon\eta}{1-\varepsilon+\varepsilon\eta},2-\varepsilon-\eta+2\varepsilon\eta-\eta^2\varepsilon\right)\\ &\qquad=x_{34,12}^{-\gamma^2}\left(\frac{(\varepsilon-1)(\eta-1)^2(\varepsilon\eta+1)}{\gamma\varepsilon\eta(\varepsilon\eta^2-2\varepsilon\eta+\varepsilon+\eta-2)}\right)x_{14}(*)x_{25}(*)x_{15}(*),\end{aligned}$$

откуда мы можем последовательно заключить, что группы $X_{34,12}^{-\gamma^2}$, $Q_{2,4}$ и $X_{23,45}^{-\gamma^2}$ содержатся в H. Наконец, вычисляя коммутант $[X_{34,12}^{-\gamma^2},X_{23,45}^{-\gamma^2}]$, извлекаем $X_{24,13,35}^{\gamma^2}$.

• Базисы (u1w1), $\gamma=-1$, $\beta=1$. Сопрягая исходные базисы посредством элемента $\omega_{34}\omega_{23}x_{23}(-1)$, мы перейдем к новым образующим

$$x(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon & \varepsilon-1 & 0 & \varepsilon-1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad y(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon-1 & 0 & \varepsilon-1 & 0\\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1-\varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

в которых коммутатор выражается следующим образом

$$z(\varepsilon,\eta)=x'_{12,34}(\theta_1)x'_{23,45}(\theta_2)x'_{13,24,35}(\theta_3)x_{14}(\theta_4)x_{25}(\theta_5)x_{15}(\theta_6),$$

где

$$\theta_1 = \frac{(\varepsilon-1)(\eta-1)}{\varepsilon\eta}, \quad \theta_2 = (\varepsilon-1)(\eta-1),$$
$$\theta_3 = \frac{(\varepsilon-1)(\eta-1)(\varepsilon-\varepsilon\eta-1)}{\varepsilon\eta},$$

а $\theta_{4,5,6}$ – некоторые дробно-рациональные функции от ε и η.

Положим

$$z_2(\varepsilon_1,\eta_1,\varepsilon_2,\eta_2) = [z(\varepsilon_1,\eta_1), z(\varepsilon_2,\eta_2)].$$

Тогда $z_2(\varepsilon_1,\eta_1,\varepsilon_2,\eta_2)$ раскладывается в произведение элементов из $X_{13,24,35}$, X_{14}, X_{25} и X_{15}, причем $z_2(\varepsilon,\eta,-\eta,-\varepsilon)$ порождает X_{15}.

Положим теперь

$$g(\varepsilon) = z_2\left(\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon+1, \frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon+1}\right).$$

Тогда

$$g(\varepsilon) = x_{14}\left(\frac{1-\varepsilon^3}{\varepsilon^3+\varepsilon^4}\right) x_{25}\left(\frac{\varepsilon^3-1}{\varepsilon+\varepsilon^2}\right) x_{15}\,(*)\,,$$

$$g(\varepsilon)g(\varepsilon^{-1}) = x_{14}\left(\frac{(\varepsilon-1)^2(\varepsilon^4+\varepsilon^3+2\varepsilon^2+\varepsilon+1)}{\varepsilon^3}\right) x_{15}\,(*)\,.$$

Таким образом, мы последовательно получаем X_{14}, X_{25}, а из разложения коммутатора $z_2(\varepsilon_1,\eta_1,\varepsilon_2,\eta_2)$ подгруппу $X_{13,24,35}$. Наконец, из разложения $z(\varepsilon,\eta)$ мы извлекаем $X'_{12,34}$ и $X_{23,45}$.

• Базисы (u1w1), $\gamma=-1$, $\beta\neq -1,0,1$. Сопряжем образующие группы H элементом $\omega_{23}x_{23}(-1)$. В результате переходим к новым образующим

$$x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \beta(\varepsilon-1) & \varepsilon-1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & (1-\beta)(\varepsilon-1) & 1-\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon-1 & \varepsilon-1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Иными словами,

$$\begin{aligned}x(\varepsilon) &= d_2(\varepsilon)d_3(\varepsilon)x_{24}(-\beta(1-\varepsilon^{-1}))x_{34}((\beta-1)(1-\varepsilon^{-1}))\\ &\quad\times x_{35}((1-\varepsilon^{-1}))x_{25}(\varepsilon^{-1}-1),\\ y(\varepsilon) &= d_2(\varepsilon)d_3(\varepsilon)x_{12}(\varepsilon-1)x_{13}(\varepsilon-1)x_{43}(1-\varepsilon).\end{aligned}$$

Положим

$$g(\varepsilon,\eta) = z_x\left(\varepsilon, \frac{\beta}{\beta-1}, \eta\right).$$

Тогда подгруппа, порожденная $[g(\varepsilon,\eta), g(\varepsilon',\eta')]$, совпадает с X_{15}.

Положим теперь

$$\theta = \frac{\eta(\eta^2-\eta+\varepsilon^2-\varepsilon)}{\varepsilon(2\varepsilon\eta-\eta-\varepsilon)}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned}g\left(\varepsilon,\theta\right) g\left(\eta,\theta^{-1}\right) &= x_{25}\left(\frac{(1-\eta)(\eta-\varepsilon)^2(\eta+\varepsilon)(\varepsilon-1)}{(\beta-1)^2\varepsilon\eta(2\varepsilon\eta-\eta-\varepsilon)}\right)x_{15}(*),\\ g(\varepsilon,-\varepsilon)g(\varepsilon+1,\varepsilon) &= x_{12}\left(\frac{1+\varepsilon-2\varepsilon^3}{\beta\varepsilon^2(1+\varepsilon)}\right)x_{13}\left(\frac{1+\varepsilon-2\varepsilon^3}{(\beta-1)\varepsilon^2(1+\varepsilon)}\right)\\ &\quad\times x_{25}(*)x_{15}(*),\end{aligned}$$

откуда следует, что подгруппы X_{25} и $X_{12,13}^{1-\beta^{-1}}$ содержатся в H.

Рассмотрим также элементы

$$f(\varepsilon,\eta) = z_x\left(\frac{(\beta^2-\beta)(\varepsilon-1)^2}{(\beta^2-\beta)(\varepsilon-1)^2-\varepsilon}, \varepsilon, \eta\right).$$

Разложение $[f(\varepsilon,\eta), f(\varepsilon,\xi)]$ имеет вид

$$x_{24}(-\beta\theta)x_{34}((\beta-1)\theta)x_{35}(\theta)x_{25}(*)x_{15}(*),$$

где $\theta = \frac{\beta(\eta-1)(\eta-\xi)(\xi-1)(\varepsilon-1)(2\beta^2(\varepsilon-1)^2-2\beta(\varepsilon-1)^2-\varepsilon)}{\eta^2\xi^2(1+\beta(\varepsilon-1))(\beta+\varepsilon-\beta\varepsilon)^2}$.

Таким образом, мы получаем подгруппу $X_{24,34,35}^{-\beta,\beta-1}$. Далее, из разложения порождающих получаем группу Q_{23} и группу $X'_{43,12,13}$.

Вычислим теперь группу $\langle X_{24,34,35}^{-\beta,\beta-1}, X'_{43,12,13}\rangle$. Как и в четвертом пункте выше, рассмотрим гомоморфизм φ из группы, порожденной

$t(\varepsilon)$ и $s(\eta)$ в $\mathrm{SL}_2(K)$, где

$$t(\varepsilon)=x_{34}(\varepsilon)x_{24}\left(\frac{\beta\varepsilon}{1-\beta}\right)x_{35}\left(\frac{\varepsilon}{\beta-1}\right),$$

$$s(\eta)=x_{43}(\eta)x_{12}(-\eta)x_{13}(-\eta),$$

такой, что $\varphi(t(\varepsilon))=x_{34}(\varepsilon)$, $\varphi(s(\eta))=x_{43}(\eta)$. Непосредственные вычисления показывают, что $\operatorname{Ker}\varphi=X_{12,13}^{1-\beta^{-1}}X_{25}X_{15}$, что и завершает описание порождения в этом случае.

• Базисы $(u1w1)$, $\gamma,\beta,\gamma+\beta\neq 0,\,-1$. В исходном базисе группы X и Y порождаются следующими матрицами:

$$x(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\varepsilon&0&\varepsilon-1&0\\0&0&\varepsilon&\beta(\varepsilon-1)&\varepsilon-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$y(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&\varepsilon-1&0&0&0\\0&\varepsilon&0&0&0\\0&0&\varepsilon&0&0\\0&\gamma(\varepsilon-1)&\varepsilon-1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Как всегда, наши фактические вычисления основаны на их разложениях

$$x(\varepsilon)=d_2(\varepsilon)d_3(\varepsilon)x_{24}(1-\varepsilon^{-1})x_{34}(\beta(1-\varepsilon^{-1}))x_{35}(1-\varepsilon^{-1}),$$
$$y(\varepsilon)=d_2(\varepsilon)d_3(\varepsilon)x_{12}(\varepsilon-1)x_{42}(\gamma(\varepsilon-1))x_{43}(\varepsilon-1).$$

Положим

$$g(\varepsilon,\eta)=z_x\left(\varepsilon,\frac{1+\beta+\gamma}{\beta+\gamma},\eta\right).$$

Вычисление $[g(\varepsilon,\eta),g(\varepsilon',\eta')]$ даёт подгруппу X_{15}.

Предположим вначале, что $\operatorname{char}K\neq 2$. В этом случае

$$g(\varepsilon-1,\varepsilon)g(\varepsilon-1,2-\varepsilon)=x_{12,13}^{-\beta}\left(\frac{2(\varepsilon-1)}{(\beta+\gamma)(1+\beta+\gamma)\varepsilon}\right)x_{15}(*),$$

$$g\left(\varepsilon,\frac{\varepsilon-3\varepsilon^2}{\varepsilon(\varepsilon-1)}\right)g(2\varepsilon,2)=x_{12,13}^{-\beta}(*)x_{35,25}^{-\gamma}\left(\frac{2\varepsilon-1}{(\beta+\gamma)^2}\right)x_{15}(*).$$

Таким образом, мы последовательно извлекаем подгруппы $X^{-\beta}_{12,13}$ и $X^{-\gamma}_{35,25}$.

Далее, как и раньше, отдельно проведём вычисления в предположении, что $\gamma+\beta\neq-1/2$. При этом

$$g\left(\frac{1}{1+2\beta+2\gamma},\varepsilon\right)=x^{-\beta}_{12,13}\left(\frac{2-2\varepsilon}{\varepsilon(1+\beta+\gamma)}\right)x^{\beta}_{34,24,35}\left(\frac{2-2\varepsilon}{1+2\beta+2\gamma}\right)x_{15}(*),$$

что дает подгруппу $X^{\beta}_{34,24,35}$.

Если же $\gamma+\beta=-1/2$, рассмотрим произведение $z(\eta_1,\eta_2)z_x(\varepsilon,\varepsilon,\eta_3)$. Приравняем коэффициенты в позициях (3,2), (4,3) и (4,2) к нулю. Эта система разрешима относительно ε. При этом η_i, $i=1,2,3$, представляют собой дробно-рациональные функции, у которых в знаменателе многочлен степени не выше 8. Разложение этого произведения принимает вид $x^{-\beta}_{12,13}x^{\beta}_{34,24,35}x^{\gamma}_{35,25}x_{15}$, и мы снова можем извлечь из него $X^{\beta}_{34,24,35}$.

Предположим теперь, что $\operatorname{char}K=2$. В этом случае

$$g(\varepsilon^2+\varepsilon^{-1},\varepsilon)g(\varepsilon+\varepsilon^{-1}+1,\varepsilon^3+\varepsilon)=x^{\gamma}_{35,25}\left(\frac{1+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4}{\beta^2+\gamma^2}\right)x_{15}(*),$$

$$g(\varepsilon,\eta)g(\eta,\varepsilon)=x^{\beta}_{34,24,35}\left(\frac{(\varepsilon+\eta)(1+\varepsilon)(1+\eta)}{\beta+\gamma}\right)x^{\gamma}_{35,25}(*)x_{15}(*).$$

Теперь из разложения $g(\varepsilon,\eta)$ мы можем извлечь подгруппу $X^{\beta}_{12,13}$ и, таким образом, как и в характеристике $\neq 2$ группа H содержит $X^{\beta}_{12,13}$, $X^{\beta}_{34,24,35}$ и $x^{\gamma}_{35,25}$.

Вернемся теперь к произвольному полю, так как все последующие рассуждения не зависят от его характеристики. Учитывая разложение $x(\varepsilon)$ и $y(\varepsilon)$, получаем, что группа H также содержит подгруппы Q_{23} и $X^{\gamma}_{42,43,12}$.

Рассмотрим подгруппу, порожденную парой подгрупп $X^{\beta}_{34,24,35}$ и $X^{\gamma}_{42,43,12}$. При помощи элемента $x_{23}((\beta+\gamma)^{-1})x_{32}(-\beta)$ эта пара подгрупп сопряжена паре

$$(\{x_{24}(\varepsilon)x_{25}(\varepsilon/(\beta+\gamma)),\varepsilon\in K\},\{x_{42}((\beta+\gamma)\eta)x_{12}(\eta))x_{13}(-\eta/(\beta+\gamma)),\eta\in K\}).$$

Для $\xi \in K^*$ положим

$$t(\varepsilon)=x_{24}(\varepsilon)x_{25}(\varepsilon/(\beta+\gamma),\quad s(\varepsilon)=x_{42}(\eta)x_{12}(\eta/(\beta+\gamma))x_{13}(-\eta/(\beta+\gamma)^2),$$
$$w(\xi)=t(\xi)s(-\xi^{-1})t(\xi),\quad h(\xi)=w(\xi)w(1)^{-1}.$$

Вычисляя ядро гомоморфизма $\mathrm{Ker}\,\varphi$ из подгруппы, порождённой последней парой подгрупп, в группу $\mathrm{SL}_2(K)$ мы видим, что оно порождено элементами $w(\xi)$ и $h(\xi)$.

Возвращаясь теперь в H с помощью элемента $g = x_{32}(\beta)x_{23}(-(\beta+\gamma)^{-1})$, мы видим, что

$$\begin{aligned}\langle X^{\beta}_{34,24,35}, X^{\gamma}_{42,43,12}\rangle &= \mathrm{SL}_2(K)\langle gw(\xi)g^{-1}, gh(\xi)g^{-1}, \xi \in K\rangle \\ &= \mathrm{SL}_2(K)\langle X^{-\beta}_{12,13}, X^{-\gamma}_{35,25}, X_{15}\rangle.\end{aligned}$$

Это завершает анализ последнего случая и, вместе с тем, доказательство теоремы 4. □

§ 6. Заключительные замечания

Как показывают настоящая работа и [7], объем вычислений, необходимых для того, чтобы повторить для остальных микровесовых торов результаты [4] и [16] в полном объеме *на том же пути*, как мы это первоначально планировали в [6], становится абсолютно неосуществимым. По крайней мере если проводить их вручную, скажем, для случая исключительных групп типов E_6 и E_7.

Это значит, что если и пытаться передоказывать с использованием подобной техники результаты о надгруппах расщепимых торов [3] и т.д., то только с помощью предложенного вторым автором [14] *обходного пути*, который избегает явной классификации орбит и порождений. Либо использовать компьютеры, что в данном случае было бы неспортивно.

С другой стороны, морально настоящая работа тесно связана также с работами по классификации групп, порожденных матрицами с *двумя* неединичными собственными значениями.

Как известно, конечные группы, порожденные матрицами с *одним* неединичным собственным значением – псевдоотражениями – классифицировали Кокстер, Шепард и Тодд в характеристике 0 и Вагнер, Залесский и Сережкин в положительной характеристике.

Аналогичная задача для матриц с двумя собственными значениями оказалась намного более сложной. После пионерских работ Хаффмана и Уэйлса исследования в этой области мало продвигались в течение нескольких десятилетий, но в последнее время там произошли замечательные продвижения, см., в частности, [15, 18, 19].

Однако настоящая работа и [7] показывают также, что полное описание хотя бы неприводимых *конечных* групп, порожденных матрицами с *двумя* неединичными собственными значениями, также будет весьма непростым делом в положительной характеристике. Если и бороться за полный ответ в данном случае, то только с помощью компьютерных вычислений.

Список литературы

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **148** (1978), 43–57.
3. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Труды Ленингр. Мат. Общ. **1** (1990), 64–109.
4. Н. А. Вавилов, *Геометрия* 1*-торов в* GL_n. — Алгебра и анализ **19**, No. 3 (2007), 120–151.
5. Н. А. Вавилов, *Весовые элементы групп Шевалле.* — Алгебра и анализ **20**, No. 1 (2008), 34–85.
6. Н. А. Вавилов, В. В. Нестеров, *Геометрия микровесовых торов.* — Владикавказский мат. журнал **10**, No. 1 (2008), 10–23.
7. В. В. Вавилов, В. В. Нестеров, Пары 2-торов в $\mathrm{GL}(4, K)$, in preparation (2023).
8. Н. А. Вавилов, И. М. Певзнер, *Тройки длинных корневых подгрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 54–83.
9. Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, *Разложение Брюа длинных корневых торов в группах Шевавлле.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ **175** (1989), 12–23.
10. Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, *Длинные корневые полупростые элементы в группах Шевалле.* — Докл. Акад. наук, сер. Математика **338**, No. 6 (1994), 725–727.
11. Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, *Длинные корневые торы в группах Шевалле.* — Алгебра и анализ **24**, No. 3 (2012), 22–83.
12. В. В. Нестеров, *Порождение пар коротких корневых подгрупп в группах Шевалле.* — Алгебра и анализ **16**, No. 6 (2004), 172–208.
13. В. В. Нестеров, *Теоремы редукции для троек коротких корневых подгрупп в группах Шевалле.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **443** (2016), 437–452 .
14. В. В. Нестеров, *Извлечение малоранговых унипотентных элементов в* $\mathrm{GL}(4, K)$. — Записки науч. семин. ПОМИ **492** (2020), 134–148.
15. B. Blum-Smith, *A rotation group whose subspace arrangement is not from a real reflection group.* — Linear Algebra Appl. **581** (2019), 405–412.
16. A. M. Cohen, H. Cuypers, H. Sterk, *Linear groups generated by reflection tori.* — Canad. J. Math. **51**, No. 6 (1999), 1149–1174.

17. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory*, Springer, Berlin et al. 1989
18. Ch. Lange, *Characterization of finite groups generated by reflections and rotations.* — J. Topol. **9**, No. 4 (2016), 1109–1129.
19. Ch. Lange, M. A. Mikhailova, *Classification of finite groups generated by reflections and rotations.* — Transform. Groups **21**, No. 4 (2016), 1155–1201.
20. V. V. Nesterov, N. A. Vavilov, *Pairs of microweight tori in* GL_n. — Чебышевский сборник, **21**, вып. 3 (2020), 257–266.

Vavilov N., Nesterov V. Subgroups generatred by a pair of 2-tori in $\mathrm{GL}(5, K)$.

A goal of the paper is to describe the orbits of the general linear group $\mathrm{GL}(n, K)$ over a field K, acting by simultaneous conjugation on pairs of 2-tori, i.e., subgroups conjugate to the diagonal subgroup $\{\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, 1, \ldots, 1), \varepsilon \in K^*\}$, and identify their spans. For the easier case of 1-tori similar results were previously obtained by the first author, A. Cohen, H. Vuypers and H. Sterk. The present paper is the second one pertaining to this case, in the first one a reduction theorem is proved establishing that a pair of 2-tori is conjugate to such a pair in $\mathrm{GL}(6, K)$, and a classification of such pairs that cannot be embedded in $\mathrm{GL}(5, K)$ is given. Here, the orbits and spans of 2-tori in $\mathrm{GL}(5, K)$, that cannot be embedded in $\mathrm{GL}(4, K)$ are described. A typical qualitative corollary of the obtained results asserts that for $|K| \geqslant 7$ every non-diagonalisable subgroup spanned by 2-tori contains unipotent elements of residue 1 or 2.

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: `vl.nesterov@mail.ru`

Поступило 11 сентября 2022 г.