Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 521, 2023 г.

В. В. Суханов

ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ В ВИДЕ СУММЫ ПАРАБОЛЫ И ФИНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА

§1. Введение

Отдаленной целью данной работы является построение спектральной обратной задачи для оператора Шредингера в виде суммы параболы (с ветвями вниз) и локального потенциала

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{x^2}{4} + q(x), \quad x \in (-\infty, +\infty) \tag{1.1}$$

на всей оси.

В данной работе $q(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ – вещественнозначная, бесконечно дифференцируемая функция с ограниченным носителем

$$\operatorname{supp} q \subset [-N, N] \tag{1.2}$$

для достаточно большого N.

Более конкретная цель этой статьи – описание прямой задачи рассеяния для оператора Шредингера L. Построение спектральной прямой и обратной задачи для оператора Шредингера с неубывающим потенциалом представляет собой сложную техническую задачу. Один из примеров такой конструкции был получен в работе [2]. В этой статье изучена обратная задача для оператора Штарка

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + x + q(x)$$

т.е. оператора Шредингера с потенциалом в виде суммы линейной функции и быстро убывающей функции. Отсюда возникает естественный вопрос: можно ли обобщить технику развитую в этой работе на полином более высокого порядка, скажем полином второго порядка. Частично этот вопрос был решен в статье [1]. В этой работе изучена

Ключевые слова: одномерный оператор Шредингера, обратная задача, задача Римана-Гильберта, сингулярное интегральное уравнение.

Исследование автора поддержано грантом РНФ No. 22-11-00070.

обратная спектральная задача для оператора Шредингера с потенциальной ямой (типа параболы) возмущенной локальным потенциалом. В итоге, удалось восстановить потенциал по дискретным собственным значениям исходного оператора. В нашей задаче (для оператора L) мы имеем зеркальную ситуацию. Ветви параболы нашего потенциала направлены вниз и вместо дискретного спектра мы имеем двукратный непрерывный спектр на всей спектральной оси. Это кардинально меняет всю техническую картину обратной задачи.

Следует также отметить, что дальнейшие обобщения данной конструкции для операторов с потенциалом в виде суммы полинома третьего порядка плюс локальный потенциал, резко меняют спектральные свойства такого оператора. Действительно, для операторов Шредингера с потенциалом в виде суммы параболы и быстро убывающего потенциала выполнена теорема Тичмарша.

Теорема 1.1. *Оператор Шредингера*

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad D(L) = S(\mathbb{R})$$

с потеннцаалом $q(x)$

$$q(x) > -ax^2 - b, \quad a, b \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

является самосопряженным в существенном.

Оператор с потенциалом, ведущим себя на бесконечности как полином третьего порядка, вообще говоря не является самосопряженным в существенном. Таким образом, рассматриваемый нами оператор является последним примером для задач с потенциалом в виде суммы полинома и локального потенциала, для которого работает данная техника.

Перечислим вкратце содержание работы. Второй параграф посвящен введению стандартных решений спектрального уравнения. В третьем параграфе мы получим необходимые оценки для функций параболического цилиндра. В четвертом параграфе мы займемся изучением свойств решений спектрального уравнения. Пятый и шестой параграф посвящены конструкции задачи Римана–Гильберта для свободного оператора и для оператора L. Наконец в седьмом параграфе, мы докажем разрешимость полученной задачи Римана–Гильберта для оператора L.

§2. Решения спектрального уравнения

Рассмотрим оператор Шредингера

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{x^2}{4} + q(x)$$

с гладким финитным потенциалом $q(x)$, а также соответствующее спектральное уравнение

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{x^2}{4}\psi + q(x)\psi = \lambda\psi. \tag{2.1}$$

Нам понадобится также "свободное" (невозмущенное) спектральное уравнение, т.е. уравнение без потенциала $q(x)$

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{x^2}{4}\psi = \lambda\psi. \tag{2.2}$$

Нетрудно видеть, что последнее уравнение сводится к уравнению параболического цилиндра

$$y''_{zz} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) y = 0.$$

Мы фиксируем два решения $v(x,\lambda)$ и $w(x,\lambda)$ спектрального уравнения (2.1) удовлетворяющие условиям

$$v(x,\lambda) = v_0(x,\lambda)(1+o(1)), \quad x \to +\infty, \tag{2.3}$$

и

$$w(x,\lambda) = w_0(x,\lambda)(1+o(1)), \quad x \to -\infty. \tag{2.4}$$

Здесь

$$v_0(x,\lambda) = D_{-i\lambda-\frac{1}{2}}(e^{\frac{i\pi}{4}}x)$$

и

$$w_0(x,\lambda) = D_{-i\lambda-\frac{1}{2}}(-e^{\frac{i\pi}{4}}x)$$

а $D_\nu(z)$ – функция параболического цилиндра. Она имеет следующее интегральное представление

$$D_\nu(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\Gamma(-\nu)} \int\limits_0^\infty e^{-zt-\frac{t^2}{2}} t^{-\nu-1} dt, \quad \mathrm{Re}(\nu) < 0.$$

Здесь $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция.

Рассмотрим "свободный" оператор L_0

$$L_0 = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{x^2}{4}.$$

Спектральное уравнение для “свободного” оператора L_0

$$-\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x^2}{4}y=\lambda y$$

имеет два базиса решений:

$$\begin{pmatrix} v_0(x,\lambda) \\ \overline{v_0(x,\overline{\lambda})} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_0(x,\lambda) \\ \overline{w_0(x,\overline{\lambda})} \end{pmatrix}$$

и соответствующую матрицу перехода (см. [7])

$$\begin{pmatrix} v_0(x,\lambda) \\ \overline{v_0(x,\overline{\lambda})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ \overline{b_0} & \overline{a_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w_0(x,\overline{\lambda})} \\ w_0(x,\lambda) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ \overline{b_0} & \overline{a_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2\pi}e^{\frac{\pi(-2\lambda+3i)}{4}}}{\Gamma(1/2+i\lambda)} & ie^{-\pi\lambda} \\ -ie^{-\pi\lambda} & -\frac{\sqrt{2\pi}e^{\frac{\pi(-2\lambda-3i)}{4}}}{\Gamma(1/2-i\lambda)} \end{pmatrix}.$$

В частности, видно что для нее выполнено “вронскианное” соотношение

$$|a_0|^2=|b_0|^2+1.$$

§3. Оценки для функций параболического цилиндра

Для дальнейших построений нам понадобятся свойства функций параболического цилиндра, а также некоторые оценки (см. [7]):

$$W(v_0(x,\lambda),\overline{v_0(x,\overline{\lambda})})=W(w_0(x,\lambda),\overline{w_0(x,\overline{\lambda})})=ie^{\frac{\pi\lambda}{2}},$$

$$W(v_0(x,\lambda),w_0(x,\lambda))=\frac{\sqrt{2\pi}e^{\frac{i\pi}{4}}}{\Gamma(i\lambda+\frac{1}{2})}.$$

Здесь $W(f,g)$ – вронскиан функций f и g:

$$W(f,g)=fg'_x-f'_xg.$$

Перечислим несколько асимптотических результатов (см. [7]).

Лемма 3.1. *Для фиксированного λ функция $v_0(x,\lambda)$ при $x\to+\infty$ имеет следующее асимптотическое разложение*

$$v_0(x,\lambda)\sim(xe^{\frac{i\pi}{4}})^{-i\lambda-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{x^2}{4}}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^1}{x^{2n}}\Big], \quad x\to+\infty. \tag{3.1}$$

Лемма 3.2. *Для фиксированного λ функция $v_0(x,\lambda)$ при $x \to -\infty$ имеет следующее асимптотическое разложение*

$$v_0(x,\lambda) \sim (|x|e^{-\frac{i3\pi}{4}})^{-i\lambda-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{x^2}{4}}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^2}{x^{2n}}\Big] \tag{3.2}$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}(|x|e^{-\frac{i3\pi}{4}})^{+i\lambda-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)}e^{+i\frac{x^2}{4}}e^{(i\lambda-\frac{1}{2})i\pi}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^3}{x^{2n}}\Big],\ \ x\to-\infty.$$

Аналогичные асимптотики можно написать для функции $w_0(x,\lambda)$.

Лемма 3.3. *Для фиксированного λ функция $v_0(x,\lambda)$ при $x \to -\infty$ имеет следующее асимптотическое разложение*

$$w_0(x,\lambda) \sim (|x|e^{\frac{i\pi}{4}})^{-i\lambda-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{x^2}{4}}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^4}{x^{2n}}\Big],\ \ x\to-\infty. \tag{3.3}$$

Лемма 3.4. *Для фиксированного λ функция $v_0(x,\lambda)$ при $x \to -\infty$ имеет следующее асимптотическое разложение*

$$w_0(x,\lambda) \sim (xe^{-\frac{i3\pi}{4}})^{-i\lambda-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{x^2}{4}}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^5}{x^{2n}}\Big]$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}(xe^{-\frac{i3\pi}{4}})^{+i\lambda-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)}e^{+i\frac{x^2}{4}}e^{(i\lambda-\frac{1}{2})i\pi}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^6}{x^{2n}}\Big],\ \ x\to+\infty. \tag{3.4}$$

Нам потребуются также асимптотики по параметру λ (см. [11]).

Лемма 3.5. *Для фиксированного λ функция $v_0(x,\lambda)$, $-\pi\leqslant\arg(\lambda)\leqslant 0$, $|\lambda|\to\infty$ имеет следующую асимптотику:*

$$v_0(x,\lambda)\sim\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[\frac{-i\lambda-\frac{1}{2}}{2}\ln(i\lambda+\frac{1}{2})+\frac{i\lambda+\frac{1}{2}}{2}-\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]. \tag{3.5}$$

Лемма 3.6. *Для фиксированного λ функция $w_0(x,\lambda)$, $-\pi\leqslant\arg(\lambda)\leqslant 0$, $|\lambda|\to\infty$ имеет следующую асимптотику:*

$$w_0(x,\lambda)\sim\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[\frac{-i\lambda-\frac{1}{2}}{2}\ln(i\lambda+\frac{1}{2})+\frac{i\lambda+\frac{1}{2}}{2}+\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]. \tag{3.6}$$

Следствием этих асимптотических результатов являются оценки:

Лемма 3.7. *Для любого* $x \in \operatorname{supp} q$ *и любого* $\lambda \in \overline{C^-}$ *функции* $v_0(x,\lambda)$ *и* $w_0(x,\lambda)$ *удовлетворяют следующим оценкам*

$$|v_0(x,\lambda)| \leqslant c_0\eta(\lambda)\left|\exp\left[-\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right|, \tag{3.7}$$

$$|w_0(x,\lambda)| \leqslant c_0\eta(\lambda)\left|\exp\left[\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right|, \tag{3.8}$$

$$|v_0(x,\lambda)w_0(x,\lambda)| \leqslant c_0\eta^2(\lambda),$$

$$\left|\Gamma\Big(\frac{1}{2}+i\lambda\Big)\right|\eta^2(\lambda) \leqslant c_1\frac{1}{1+|\sqrt{\lambda}|}, \tag{3.9}$$

где

$$\eta(\lambda) = \left|\exp\left[\frac{-i\lambda-\frac{1}{2}}{2}\ln\Big(i\lambda+\frac{1}{2}\Big)+\frac{i\lambda+\frac{1}{2}}{2}\right]\right|$$

c_0, c_1 – *некоторые константы.*

§4. Оценки решений спектрального уравнения

Используя стандартные приемы нетрудно получить интегральные уравнения Вольтерра, которым удовлетворяют функции $v(x,\lambda)$, и $w(x,\lambda)$:

$$\begin{aligned} v(x,\lambda) = v_0(x,\lambda) - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)}{\sqrt{2\pi}}w_0(x,\lambda) \\ \times\int\limits_x^{+\infty}[v_0(y,\lambda)-v_0(x,\lambda)w_0(y,\lambda]v(y,\lambda)q(y)dy, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} w(x,\lambda) = w_0(x,\lambda) + \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)}{\sqrt{2\pi}}w_0(y,\lambda) \\ \times\int\limits_{-\infty}^{x}[v_0(x,\lambda)-v_0(x,\lambda)w_0(y,\lambda)]w(y,\lambda)q(y)dy. \end{aligned}$$

Изучим свойства решения $v(x,\lambda)$. Рассмотрим итерации интегрального уравнения Вольтерра (4.1):

$$v_{l+1}(x,\lambda) = -\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \times \int\limits_x^{+\infty} [v_0(y,\lambda)w_0(x,\lambda) - v_0(x,\lambda)w_0(y,\lambda]v_l(y,\lambda)q(y)dy.$$

Лемма 4.1. *Для любого* $x \in \operatorname{supp} q$ *и любого* $\lambda \in \overline{C^-}$ *функции* $v_l(x,\lambda)$ *удовлетворяют следующим оценкам*

$$|v_l(x,\lambda)| \leqslant c_0(c_v)^l \left|\exp\left[-\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right| \eta(\lambda)(\xi(x,\lambda))^l/l!.$$

Здесь

$$\xi(x,\lambda) = \frac{1}{1+|\sqrt{\lambda}|}\int_x^\infty |q(y)|dy,$$

c_v *– некоторая константа ,* c_0 *– константа из леммы 3.7.*

Доказательство. Мы используем метод математической индукции по l. При $l=0$ нужная нам оценка следует из (3.7). Предположим, что для функции $v_l(x,\lambda)$ лемма верна. Рассмотрим $v_{l+1}(x,\lambda)$

$$|v_{l+1}(x,\lambda)| \leqslant I_1 + I_2.$$

Здесь

$$I_1 = \frac{|\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)|}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^{+\infty} |v_0(y,\lambda)||w_0(x,\lambda)||v_l(y,\lambda)||q(y)|dy,$$

$$I_2 = \frac{|\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)|}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^{+\infty} |w_0(y,\lambda)||v_0(x,\lambda)||v_l(y,\lambda)||q(y)|dy.$$

Интеграл I_1 допускает следующую оценку:

$$I_1 \leqslant c_0^3(c_v)^l\frac{|\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)|}{\sqrt{2\pi}}\eta^3(\lambda)\left|\exp\left[\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right| \times \int\limits_x^{\infty}\left|\exp\left[-2\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}y\right]\right| |q(y)|(\xi(y,\lambda))^l/l!dy.$$

Для $y > x$, $\lambda \in \overline{C^-}$

$$\left|\exp\left[-2\sqrt{i\lambda + \frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}y\right]\right| \leqslant \left|\exp\left[-2\sqrt{i\lambda + \frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right|.$$

Следовательно,

$$I_1 \leqslant c_0^3 \frac{|\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)|}{\sqrt{2\pi}}\eta^3(\lambda)\left|\exp\left[-\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right|(c_v)^l\int\limits_x^\infty |q(y)|(\xi(y,\lambda))^l/l!dy$$
$$= c_0^3 \frac{|\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)|}{\sqrt{2\pi}}\eta^3(\lambda)\left|\exp\left[-\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right|(c_v)^l\frac{(\xi(x,\lambda))^{l+1}}{(l+1)!}.$$

Учитывая (3.9) получим

$$I_1 \leqslant \frac{c_0^3}{\sqrt{2\pi}}\eta(\lambda)\left|\exp\left[-\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right|(c_v)^l\frac{(\xi(x,\lambda))^{l+1}}{(l+1)!}.$$

Для интеграла I_2 оценка выглядит следующим образом

$$I_2 \leqslant c_0^3(c_v)^l \frac{|\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda)|}{\sqrt{2\pi}}\eta^3(\lambda)\left|\exp\left[-\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right|$$
$$\times \int\limits_x^\infty |q(y)|(\xi(y,\lambda))^l/l!dy.$$

Поэтому,

$$I_2 \leqslant \frac{c_0^3}{\sqrt{2\pi}}\eta(\lambda)\left|\exp\left[-\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right|(c_v)^l\frac{(\xi(x,\lambda))^{l+1}}{(l+1)!}.$$

Следовательно,

$$|v_{l+1}(x,\lambda)| \leqslant I_1 + I_2$$
$$\leqslant 2\frac{c_0^3}{\sqrt{2\pi}}\eta(\lambda)\left|\exp\left[-\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right|(c_v)^l\frac{(\xi(x,\lambda))^{l+1}}{(l+1)!}.$$

Мы можем взять

$$c_v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}c_0^2.$$

Тогда оценка будет справедливой для $v_{l+1}(x,\lambda)$. □

Нетрудно заметить, что ряд составленный из функций $v_l(x,\lambda)$ сходится и дает решение нашего интегрального уравнения

$$v(x,\lambda)=\sum_{l=0}^{\infty} v_l(x,\lambda).$$

Анализируя этот результат мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4.2. *Решение $v(x,\lambda)$ удовлетворяет следующим свойствам:*

1. *Для любого $x\in\mathbb{R}$ решение $v(x,\cdot)$ аналитично в области C^- и непрерывно вплоть до вещественной оси*
2. *Для любого $x\in\mathbb{R}$ решение $v(x,\cdot)\in C^\infty(\mathbb{R})$.*
3. *Для любого $\lambda\in\overline{C^-}$ решение $v(\cdot,\lambda)\in C^\infty(-\infty,\infty)$.*
4. *Решение $v(x,\lambda)$ удовлетворяет следующей оценке: $x\in(-N,N)$ и для любого $\lambda\in\overline{C^-}$:*

$$|v(x,\lambda)|\leqslant c_2\eta(\lambda)\left|\exp\left[-\sqrt{i\lambda+\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}x\right]\right|$$

Здесь c_2 – некоторая константа.

5. *При $|\lambda|\to\infty$ для любого $x\in(-\infty,\infty)$ решение $v(x,\lambda)$ имеет следующую асимптотику:*

$$v(x,\lambda)=v_0(x,\lambda)(1+o(1)). \tag{4.2}$$

Доказательство. Для доказательства первого пункта теоремы заметим, что все функции $v_l(x,\lambda)$, которые мы получаем в ходе итераций аналитичны по λ в нижней полуплоскости и непрерывны вплоть до вещественной оси (реально нетрудно доказать, что эти функции целые по λ). Мы доказали сходимость итерационного ряда

$$v(x,\lambda)=\sum_{l=0}^{\infty} v_l(x,\lambda).$$

Причем сходимость будет равномерной на любом компакте по λ. Отсюда следует первый пункт утверждения теоремы.

Совершенно аналогично доказываются второй и третий пункт теоремы.

Для доказательства четвертого пункта посмотрим на оценку итерационного ряда

$$
\begin{aligned}
|v(x,\lambda)| &\leqslant \sum_{l=0}^{\infty} |v_l(x,\lambda)| \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{\infty} c_0 (c_v)^l \left| \exp\left[-\sqrt{i\lambda + \frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} x \right] \right| \eta(\lambda) (\xi(x,\lambda))^l / l! \\
&\leqslant c_0 \left| \exp\left[-\sqrt{i\lambda + \frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} x \right] \right| \eta(\lambda) \sum_{l=0}^{\infty} (c_v)^l (\xi(x,\lambda))^l / l! \\
&\leqslant c_2 \left| \exp\left[-\sqrt{i\lambda + \frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} x \right] \right| \eta(\lambda).
\end{aligned}
$$

Аналогично доказывается пятый пункт теоремы. □

Аналогичная теорема верна для решения $w(x,\lambda)$.

Теорема 4.3. *Решение $w(x,\lambda)$ удовлетворяет следующим свойствам:*

1. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ решение $w(x,\,\cdot\,)$ аналитично в области C^- и непрерывно вплоть до вещественной оси*
2. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ решение $w(x,\,\cdot\,) \in C^\infty(\mathbb{R})$.*
3. *Для любого $\lambda \in \overline{C^-}$ решение $w(\,\cdot\,,\lambda) \in C^\infty(-\infty,\infty)$.*
4. *Решение $v(x,\lambda)$ удовлетворяет следующей оценке: $x \in (-N,N)$ и для любого $\lambda \in \overline{C^-}$:*

$$
w(x,\lambda) \leqslant c_2 \eta(\lambda) \left| \exp\left[\sqrt{i\lambda + \frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} x \right] \right|
$$

Здесь c_2 – некоторая константа.

5. *При $|\lambda| \to \infty$ для любого $x \in (-\infty,\infty)$ решение $w(x,\lambda)$ имеет следующую асимптотику:*

$$
w(x,\lambda) = w_0(x,\lambda)(1 + o(1)). \tag{4.3}
$$

§5. Задача Римана–Гильберта для свободного оператора

Для начала посмотрим как устроена задача Римана–Гильберта для свободного оператора. Для этого введем в верхней и нижней полуплоскости вектор-функцию $\mathbf{Y_0} := ((Y_0)_1, (Y_0)_2)^t$, составленную из решений "свободного" спектрального уравнения

$$\mathbf{Y_0}^- = \begin{pmatrix} v_0(x,\lambda) \\ \frac{w_0(x,\lambda)}{a_0(\lambda)} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0,$$

$$\mathbf{Y_0}^+ = \begin{pmatrix} \frac{\overline{w_0(x,\overline{\lambda})}}{\overline{a_0(\overline{\lambda})}} \\ \overline{v_0(x,\overline{\lambda})} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0.$$

Нетрудно видеть,

$$\mathbf{Y}(x,\lambda) = \sigma_1 \overline{\mathbf{Y}(x,\bar{\lambda})}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из уже установленных свойств функций $v_0(x,\lambda)$ и $w_0(x,\lambda)$ ясно, что выполнена следующая лемма.

Лемма 5.1. *Компоненты* $(Y_0)_1(x,\,\cdot\,)$ *и* $(Y_0)_2(x,\,\cdot\,)$ *нашей вектор-функции аналитичны в* $C^+ \bigcup C^-$ *и непрерывны вплоть до вещественной оси.*

Доказательство. Действительно достаточно проверить, что функция $a_0(\lambda)$ не равна нулю в $\overline{C^-}$. Это следует из явной формулы

$$a_0(\lambda) = -\frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{\pi(-2\lambda+3i)}{4}}}{\Gamma(1/2 + i\lambda)}.$$

Видно, что полюсов гамма-функции в нижней полуплоскости нет. $\square$

Обозначим $\mathbf{Y_0}^{\pm}$ пределы $\mathbf{Y_0}$ при λ стремящемся к вещественной оси $\operatorname{Im}\lambda \to \pm 0$. Эти пределы дают два базиса решений "свободного" спектрального уравнения. Следовательно,

$$\mathbf{Y_0}^+(x,\lambda) = G_0(\lambda)\mathbf{Y_0}^-(x,\lambda).$$

Причем матрица сопряжения $G_0(\lambda)$ не зависит от x. Выразим матрицу сопряжения через коэффициенты матрицы перехода. Действительно, имеем

$$\begin{pmatrix} v_0(x,\lambda) \\ \overline{v_0(x,\overline{\lambda})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ \overline{b_0} & \overline{a_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w_0(x,\overline{\lambda})} \\ w_0(x,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Из второго уравнения этого векторного соотношения следует, что

$$w_0(x,\lambda) = \frac{\overline{v_0(x,\overline{\lambda})}}{\overline{a_0(\overline{\lambda})}} - \frac{\overline{b_0}\,\overline{w_0(x,\overline{\lambda})}}{\overline{a_0(\overline{\lambda})}}.$$

Тогда из первого соотношения получим

$$v_0(x,\lambda) = a_0\overline{w_0(x,\overline{\lambda})} + b_0 w_0 = a_0\overline{w_0(x,\overline{\lambda})} + \frac{b_0\overline{v_0(x,\overline{\lambda})}}{\overline{a_0(\overline{\lambda})}} - \frac{\overline{b_0}b_0\overline{w_0(x,\overline{\lambda})}}{\overline{a_0(\overline{\lambda})}}$$

$$= \frac{\overline{w_0(x,\overline{\lambda})}}{\overline{a_0(\overline{\lambda})}} + \frac{b_0\overline{v_0(x,\overline{\lambda})}}{\overline{a_0(\overline{\lambda})}}.$$

Следовательно,

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_0}{\overline{a_0}} \\ -\frac{\overline{b_0}}{a_0} & \frac{1}{|a_0|^2} \end{pmatrix}.$$

Теперь введем матричнозначную функцию $Y_0(x,\lambda)$, столбцами которой являются $\mathbf{Y_0}(x,\lambda)$ и $\frac{\partial \mathbf{Y_0}}{\partial x}(x,\lambda) \equiv (\mathbf{Y_0})_x(x,\lambda)$, т.е.,

$$Y_0(x,\lambda) = (\mathbf{Y_0}(x,\lambda), (\mathbf{Y_0})_x(x,\lambda)).$$

Определение 5.2. *Мы будем говорить, что функция $F(x,\lambda)$ удовлетворяет задаче Римана–Гильберта* $\mathbf{RH_0}$ *если:*

1. *Функция $F(x,\cdot)$ аналитична в $\mathbb{C}^\pm$ и имеет непрерывные пределы $F^\pm(x,\lambda)$ на вещественной оси.*
2. *Функция $F(x,\lambda))$ имеет следующее асимптотическое поведение:*

$$F(x,\lambda) = Y_0^+(I + o(I)), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0,$$

$$F(x,\lambda) = Y_0^-(I + o(I)), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0.$$

3. $F^+(x,\lambda) = G_0(\lambda)F^-(x,\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0.$
4. $\det F(x,\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}^+} \bigcup \overline{\mathbb{C}^-}.$

Следующая теорема является прямым следствием уже установленных свойств векторной функции $\mathbf{Y_0}(x,\lambda)$.

Теорема 5.3. *Матричнозначная функция $Y_0(x,\lambda)$ удовлетворяет задаче Римана–Гильберта* $\mathbf{RH_0}$.

§6. Задача Римана–Гильберта для оператора L

Теперь рассмотрим задачу Римана–Гильберта для оператора с потенциалом $q(x)$. Спектральное уравнение для оператора L

$$-\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^2}{4}y + q(x)y = \lambda y$$

имеет два базиса решений:

$$\begin{pmatrix} v(x,\lambda) \\ \overline{v(x,\overline{\lambda})} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w(x,\lambda) \\ \overline{w(x,\overline{\lambda})} \end{pmatrix}.$$

Эти два базиса решений связаны друг с другом матрицей перехода, коэффициенты которой не зависят от x

$$\begin{pmatrix} v(x,\lambda) \\ \overline{v(x,\overline{\lambda})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ \overline{b(\lambda)} & \overline{a(\lambda)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w(x,\overline{\lambda})} \\ w(x,\lambda). \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Разумеется, для оператора L, в отличии от L_0, не возможно выписать вид коэффициентов явно. Мы можем лишь анализировать свойства этих коэффициентов. Прежде всего мы можем получить "вронскианное" свойство для коэффициентов матрицы перехода.

Лемма 6.1. *Коэффициенты матрицы перехода удовлетворяют соотношению*

$$|a|^2 = |b|^2 + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для доказательства данной формулы достаточно вычислить вронскиан $W(v(x,\lambda), \overline{v(x,\overline{\lambda})})$ при $x \to \pm\infty$. □

Нетрудно заметить, что функция $a(\lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$a(\lambda) = a_0(\lambda)\Big(1 + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_0(y,\lambda) v(y,\lambda) q(y) dy\Big). \tag{6.2}$$

Лемма 6.2. *Функция $a(\lambda)$ имеет следующие свойства:*

1) *$a(\lambda)$ аналитична в $\mathbb{C}^-$, непрерывна вплоть до вещественной оси*
2) *$a(\lambda)$ удовлетворяет асимптотике*

$$a(\lambda) = a_0(\lambda)(1 + o(1)), \ |\lambda| \to \infty, \ \lambda \in \mathbb{C}^-$$

3) *$a(\lambda) \neq 0, \lambda \in \overline{\mathbb{C}^-}$.*

Доказательство. Первый и второй пункты леммы следуют из формулы (6.2) для функции $a(\lambda)$.

Третий пункт леммы доказывается от противного. Если найдется точка $\lambda_0 \in \mathbb{C}^-$ для которой $a_(\lambda_0) = 0$, то эта точка дает комплексное собственное значение для формально самосопряженного дифференциального оператора. Что невозможно. С другой стороны, если λ_0 вещественно и $a(\lambda_0) = 0$, то это противоречит "вронскианному" свойству

$$|a|^2 = |b|^2 + 1.$$ □

Теперь рассмотрим конструкцию задачи Римана-Гильберта для оператора L. Для этого введем в верхней и нижней полуплоскости вектор-функцию $\mathbf{Y} := (Y_1, Y_2)^t$, составленную из решений спектрального уравнения

$$\mathbf{Y}^- = \begin{pmatrix} v(x,\lambda) \\ \frac{w(x,\lambda)}{a(\lambda)} \end{pmatrix}, \ \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0,$$

$$\mathbf{Y}^+ = \begin{pmatrix} \overline{\frac{w(x,\overline{\lambda})}{a(\overline{\lambda})}} \\ \overline{v(x,\overline{\lambda})} \end{pmatrix}, \ \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0.$$

Нетрудно видеть,

$$\mathbf{Y}(x,\lambda) = \sigma_1 \overline{\mathbf{Y}(x,\bar{\lambda})}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из уже установленных свойств функций $v(x,\lambda)$ и $w(x,\lambda)$ (см. Теоремы 4.2 и 4.3) ясно, что выполнена следующая лемма.

Лемма 6.3. *Компоненты $Y_1(x,\,\cdot\,)$ и $Y_2(x,\,\cdot\,)$ нашей вектор-функции аналитичны в $C^+ \bigcup C^-$ и непрерывны вплоть до вещественной оси.*

Доказательство. Действительно мы уже проверили, что функция $a(\lambda)$ не равна нулю в $\overline{C^-}$. □

Обозначим $\mathbf{Y}^\pm$ пределы $\mathbf{Y}$ при λ стремящемся к вещественной оси $\mathrm{Im}\lambda \to \pm 0$. Эти пределы дают два базиса решений спектрального уравнения. Следовательно,

$$\mathbf{Y}^+(x,\lambda) = G(\lambda)\mathbf{Y}^-(x,\lambda).$$

Причем матрица сопряжения $G(\lambda)$ не зависит от x. Выразим матрицу сопряжения $G(\lambda)$ через коэффициенты матрицы перехода. Данное вычисление полностью аналогично вычислению для “свободного” оператора. Мы не будем его повторять и приведем лишь окончательный результат

$$G = \begin{pmatrix} 1 & r(\lambda) \\ -\overline{r(\lambda)} & 1 - |r(\lambda)|^2 \end{pmatrix}, \quad r(\lambda) = \frac{b}{\overline{a}}.$$

Давайте введем матричнозначную функцию $Y(x,\lambda)$, столбцами которой являются $\mathbf{Y}(x,\lambda)$ и $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x}(x,\lambda) \equiv (\mathbf{Y})_x(x,\lambda)$, т.е.,

$$Y(x,\lambda) = \big(\mathbf{Y}(x,\lambda), (\mathbf{Y})_x(x,\lambda)\big).$$

Определение 6.4. *Мы будем говорить, что функция $F(x,\lambda)$ удовлетворяет задаче Римана–Гильберта* **RH** *если:*

1. *Функция $F(x,\cdot)$ аналитична в $\mathbb{C}^{\pm}$ и имеет непрерывные пределы $F^{\pm}(x,\lambda)$ на вещественной оси.*

2. *Функция $F(x,\lambda))$ имеет следующее асимптотическое поведение:*

$$F(x,\lambda) = Y_0^{+}(I + o(I)), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0,$$

$$F(x,\lambda) = Y_0^{-}(I + o(I)), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0.$$

3. $F^{+}(x,\lambda) = G(\lambda)F^{-}(x,\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0.$

4. $\det F(x,\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}^{+}} \bigcup \overline{\mathbb{C}^{-}}.$

Следующая теорема является прямым следствием уже установленных свойств векторной функции $\mathbf{Y}(x,\lambda)$.

Теорема 6.5. *Матричнозначная функция $Y(x,\lambda)$ удовлетворяет задаче Римана–Гильберта* **RH***.*

Замечание 6.6. Задача Римана–Гильберта для оператора L обладает рядом неожиданных свойств. Даже для не финитного потенциала $q(x)$ решения введенные нами в полуплоскости имеют аналитическое продолжение в другую полуплоскость. Реально функции $v(x,\lambda)$ и $w(x,\lambda)$ являются целыми функциями по λ. Правда при этом асимптотические свойства решений при больших λ перестают работать. В этом отличие данной задачи от задачи Римана–Гильберта для оператора Шредингера с быстро убывающим потенциалом.

§7. Разрешимость задачи Римана–Гильберта

В этом разделе статьи мы будем неоднократно использовать основные факты, касающиеся современной теории задач Римана–Гильберта. За подробностями мы отсылаем читателя к монографии [4], а также к статьям [9] и [10].

Определение 7.1. *Мы будем говорить, что функция $F(x,\lambda)$ удовлетворяет задаче Римана–Гильберта* **RH1** *если:*

1. *$F(x,\,\cdot\,)$ аналитична $\mathbb{C}^{\pm}$ и имеет непрерывные пределы $F^{\pm}(x,\lambda)$ на вещественной оси.*

2. *$F(x,\lambda)$ имеет следующее асимптотическое поведение*

$$F(x,\lambda) = I + o(I), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0,$$

$$F(x,\lambda) = I + o(I), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0.$$

3. $F^+(x,\lambda) = \widetilde{G}(x,\lambda)F^-(x,\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$, *где*

$$\widetilde{G}(x,\lambda) = (Y_0^+)^{-1}\widehat{G}(\lambda)Y_0^-$$

4. $\det F(x,\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}^+}\bigcup\overline{\mathbb{C}^-}$.

Теорема 7.2. *Функция* $H(x,\lambda)$*:*

$$H(x,\lambda) = (Y_0^+)^{-1}(x,\lambda)Y(x,\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0,$$
$$H(x,\lambda) = (Y_0^-)^{-1}(x,\lambda)Y(x,\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0.$$

удовлетворяет задаче Римана–Гильберта **RH1***.*

Задача Римана–Гильберта **RH1** эквивалентна сингулярному интегральному уравнению.

$$H^-(x,\lambda) = I + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(\widetilde{G}(x,k) - I)H^-(x,k)}{k-\lambda+i0}dk. \tag{7.1}$$

Таким образом, вопрос разрешимости задачи Римана–Гильберта эквивалентен вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения.

Для дальнейших построений нам потребуется также однородная задача Римана–Гильберта.

Определение 7.3. *Мы будем говорить, что функция* $F(x,\lambda)$ *удовлетворяет однородной задаче Римана–Гильберта* **homRH** *если:*

1. $F(x,\cdot)$ *аналитична в* $\mathbb{C}^\pm$ *и имеет непрерывные пределы* $F^\pm(x,\lambda)$ *на вещественной оси*

2. $F(x,\lambda)$ *имеет следующую асимптотику:*

$$F(x,\lambda) = Y_0^+ o(1), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0,$$
$$F(x,\lambda) = Y_0^- o(1), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0.$$

3. $F^+(x,\lambda) = G(\lambda)F^-(x,\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$.
4. $\det F(x,\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}^+}\bigcup\overline{\mathbb{C}^-}$.

Основная идея доказательства разрешимости задачи Римана–Гильберта (как это было и для обратной задачи для оператора Шредингера с быстро убывающим потенциалом на прямой, см. [4]) основана на следующей теореме.

Теорема 7.4. *Если* $\widehat{Y}(x,\lambda)$ *удовлетворяет однородной задаче Римана–Гильберта* **homRH***, тогда* $\widehat{Y}(x,\lambda) \equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим первый столбец $\widehat{\mathbf{Y}}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{Y}_1(x,\lambda) \\ \widehat{Y}_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ матричной функции $\widehat{Y}(x,\lambda)$. Благодаря аналитическим свойствам функций $\widehat{Y}_{1,2}(x,\lambda)$ а также асимптотическому поведению при $|\lambda| \to \infty$ мы получаем соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{Y}_1^{\pm}(x,\lambda)\widehat{Y}_2^{\pm}(x,\lambda)d\lambda = 0.$$

Следовательно

$$J := \int\limits_{\mathbb{R}} (\widehat{Y}_1^{+}(x,\lambda)\widehat{Y}_2^{+}(x,\lambda) + \widehat{Y}_1^{-}(x,\lambda)\widehat{Y}_2^{-}(x,\lambda))d\lambda = 0.$$

Функция $\widehat{\mathbf{Y}}(x,\lambda)$ удовлетворяет условию сопряжения

$$\widehat{\mathbf{Y}}^{+}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & r(\lambda) \\ -\overline{r(\lambda)} & 1-|r(\lambda)|^2 \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{Y}}^{-}(x,\lambda),$$

или

$$\widehat{\mathbf{Y}}^{-}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1-|r(\lambda)|^2 & -r(\lambda) \\ \overline{r(\lambda)} & 1 \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{Y}}^{+}(x,\lambda).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_2^{+}(x,\lambda) &= -\overline{r(\lambda)}\widehat{Y}_1^{-}(x,\lambda) + (1-|r(\lambda)|^2)\widehat{Y}_2^{-}(x,\lambda), \\ \widehat{Y}_2^{-}(x,\lambda) &= \overline{r(\lambda)}\widehat{Y}_1^{+}(x,\lambda) + \widehat{Y}_2^{+}(x,\lambda). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в J получим

$$J = \int\limits_{\mathbb{R}} [(1-|r(\lambda)|^2)\widehat{Y}_1^{+}(x,\lambda)\widehat{Y}_2^{-}(x,\lambda) + \widehat{Y}_1^{-}(x,\lambda)\widehat{Y}_2^{+}(x,\lambda)]d\lambda.$$

Из наших построений прямой задачи мы знаем, что

$$\mathbf{Y}(x,\lambda) = \sigma_1\overline{\mathbf{Y}(x,\overline{\lambda})}. \tag{7.2}$$

Однако для решения задачи Римана–Гильберта это соотношение надо получать заново. Как следует из симметрии задачи **homRH** симметрическая часть решения

$$\widehat{\mathbf{Y}}_s(x,\lambda) = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{Y}}(x,\lambda) + \sigma_1\overline{\widehat{\mathbf{Y}}(x,\overline{\lambda})})$$

и антисимметрическая часть решения

$$\widehat{\mathbf{Y}}_a(x,\lambda) = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{Y}}(x,\lambda) - \sigma_1\overline{\widehat{\mathbf{Y}}(x,\overline{\lambda})})$$

также удовлетворяют задаче **homRH**. Для симметрической части решения мы получим

$$J = \int_{\mathbb{R}} [(1-|r(\lambda)|^2)|\widehat{Y}^{+}_{1s}(x,\lambda)|^2 + |\widehat{Y}^{-}_{1s}(x,\lambda)|^2 d\lambda = 0.$$

Мы знаем, что

$$|r(\lambda)|^2 < 1.$$

Следовательно $\widehat{\mathbf{Y}}_s(x,\lambda) = 0$. Аналогичным образом можно изучить и антисимметрическую часть решения.

Таким образом,

$$\widehat{\mathbf{Y}}(x,\lambda) = \widehat{\mathbf{Y}}_s(x,\lambda) + \widehat{\mathbf{Y}}_a(x,\lambda) = 0.$$

□

Замечание 7.5. С помощью теоремы 7.4 мы можем доказать, что любое решение задачи Римана–Гильберта **RH** также удовлетворяет соотношению (7.2).

Интегральное уравнение (7.1) может рассматриваться как уравнение $(I - K(x))\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ в пространстве $(L_2(\mathbb{R}))^2$ с внешним параметром $x \in \mathbb{R}$. Оператор K является ограниченным, но не компактным. Тем не менее, как следует из [8] соответствующая система удовлетворяет теореме типа Фредгольма, т.е. оператор $I - K$ является Фредгольмовым. Мы также заметим, что для задачи Римана общий индекс системы равен нулю. Таким образом, мы получаем теорему.

Теорема 7.6. *Задача Римана–Гильберта* **RH** *имеет единственное решение* $Y(x,\lambda)$.

Таким образом, мы построили аналитическую задачу для решений спектрального уравнения для оператора L и доказали ее разрешимость. Коэффициенты матрицы перехода $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ могут рассматриваться как данные обратной задачи соответствующие потенциалу $q(x)$. Решению соответствующей обратной задачи будет посвящена отдельная публикация.

Список литературы

1. D. Chelkak, P. Kargaev , E. Korotyaev, *Inverse problem for harmonic oscillator perturbed by potential, characterization.* — Comm. Math. Phys. **249**, No. 1 (2004), 133–196.
2. A. Its, V. Sukhanov, *A Riemann–Hilbert approach to the inverse problem for the Stark operator on the line.* — Inverse Problems **32**, No. 5.
3. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, 1972
4. R. Beals, P. Deift, C. Tomei, *Direct and inverse scattering on the line.* — Mathematical surveys and monographs (AMS) **28** (1988), 1–209.
5. V. V. Sukhanov, *An inverse problem for a selfadjoint differential operator on the line..* — Mat. sbornik **137**, No. 2, (1988) 242–259;
6. R. Shterenberg, V. Sukhanov, *Riemann-–Hilbert approach to the inverse problem for the Schrodinger operator on the half-line.* — Algebra Analiz **26**, No. 6 (2014), 198–215.
7. H. Bateman, A. Erdeyi, *Higher Transcendental Functions, vol.II*, Mc Grow-Hill Book Company, New York, 1953
8. N. P. Vekua, *Systems of singular integral equations*, Moscow, 1970 (Russian); English transl. Gordon and Breach Science Pub., 1967.
9. P. Deift, X. Zhou, *Direct and inverse scattering on the line with arbitrary singularities.* — Comm. Pure Appl. Math. **44**, No. 5 (1991), 485–533.
10. P. Deift, X. Zhou, *A priori L^p estimates for solutions of Riemann-Hilbert problems.* — Int. Math. Res. Noties **40** (2002), 2121–2154.
11. N. Schwid *The asymptotic forms of the Hermite and Weber functions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **37** (1935), 339–362.

Sukhanov V. V. The Riemann–Hilbert problem for a one-dimensional Schrodinger operator with a potential in the form of a sum of a parabola and a finite potential.

The paper is devoted to the study of the Riemann–Hilbert problem for the Schrodinger operator $L = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{x^2}{4} + q(x)$ with a potential as the sum of a parabola (with branches down) and a smooth finite potential $q(x)$. The constructed Riemann–Hilbert problem can be considered as a construction of a direct scattering problem for a given operator.

С.-Петербургский
государственный университет НИИФ
Ульяновская ул. 1,
198904 С.-Петербург, Петродворец, Россия
E-mail: vvsukhanov@mail.ru

Поступило 29 сентября 2023 г.