Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 521, 2023 г.

А. А. Раев, В. А. Слоущ, Т. А. Суслина

УСРЕДНЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

§1. Введение

1.1. Усреднение в пределе малого периода. Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Это актуальная и активно развивающаяся область современной теоретической и прикладной науки. Обширная литература посвящена задачам теории усреднения; в первую очередь укажем книги [1–3].

Пусть Γ – решетка в $\mathbb{R}^d$ и Ω – элементарная ячейка решетки Γ. Для всякой Γ-периодической функции $f(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$.

Обсудим типичную задачу теории усреднения. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим эллиптический оператор A_ε, заданный выражением

$$A_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} := -i\nabla. \tag{1.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ – симметричная матрица-функция размера $d \times d$ с вещественными элементами; предполагается, что $g(\mathbf{x})$ положительно определена, ограничена и периодична относительно некоторой решетки. Пусть $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ – обобщенное решение эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Базовый результат теории усреднения: при $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сходится к решению u_0 “усредненного” уравнения

$$-\operatorname{div} g^0 \nabla u_0(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{1.3}$$

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, усреднение, операторные оценки погрешности.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 22-11-00092).

Здесь g^0 – постоянная положительная матрица, называемая *эффективной*. Оператор $A^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D}$ называется *эффективным оператором* для A_ε. В теории усреднения применительно к уравнению (1.2) изучаются различные вопросы: нахождение эффективной матрицы g^0, характер сходимости u_ε к u_0, оценка погрешности $u_\varepsilon - u_0$, построение дальнейших членов асимптотического разложения решения u_ε по степеням ε. Поскольку $u_\varepsilon = (A_\varepsilon + I)^{-1} f$, то в операторных терминах вопрос состоит в нахождении аппроксимаций резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε.

Процедура нахождения эффективной матрицы хорошо известна. Для описания g^0 нужно рассмотреть вспомогательную краевую задачу на ячейке Ω. Пусть $\Phi_j(\mathbf{x})$ есть Γ-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \qquad \int\limits_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ – стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Тогда g^0 – это $(d \times d)$-матрица со столбцами

$$\mathbf{g}_j^0 = |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega g(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)\, d\mathbf{x}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Выясняется, что эффективная матрица положительно определена.

1.2. Операторные оценки погрешности. В работах Бирмана и Суслиной [4–6] был предложен и развит *теоретико-операторный подход* к задачам теории усреднения (вариант спектрального метода). В рамках этого подхода в [4] была установлена оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.5}$$

где u_ε – решение уравнения (1.2), а u_0 – решение усредненного уравнения (1.3). Оценка (1.5) точна по порядку. В операторных терминах (1.5) означает, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$

сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте эффективного оператора A^0, причем

$$\big\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{1.6}$$

В [5] была получена более точная аппроксимация резольвенты оператора A_ε с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$:

$$\big\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2,$$

а в [6] была найдена аппроксимация резольвенты по “энергетической” норме (т. е. по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$) с погрешностью $O(\varepsilon)$:

$$\big\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{1.7}$$

В этих аппроксимациях учитываются корректоры, заданные соотношениями

$$K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) + K_1(\varepsilon)^*, \quad K_1(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{d} [\Phi_j^\varepsilon]\partial_j (A^0 + I)^{-1},$$

где $\Phi_j(\mathbf{x})$ есть Γ-периодическое решение задачи (1.4).

В [4–6] изучались также более общие операторы вида

$$\widetilde{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* \widetilde{g}^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} + \varepsilon^{-2} V^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{1.8}$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ – положительно определенная и ограниченная матрица-функция с вещественными элементами, а $V(\mathbf{x})$ – вещественная функция. Предполагалось, что $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ и $V(\mathbf{x})$ Γ-периодичны и $V(\mathbf{x})$ принадлежит классу $L_q(\Omega)$ с подходящим q. Будем считать, что край спектра оператора $\widetilde{A} = \mathbf{D}^* \widetilde{g}(\mathbf{x})\mathbf{D} + V(\mathbf{x})$ есть точка $\lambda_0 = 0$. Тогда оператор $\widetilde{A}$ допускает удобную факторизацию

$$\widetilde{A} = \omega(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}\omega(\mathbf{x})^{-1}, \quad g(\mathbf{x}) = \widetilde{g}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}).$$

Здесь $\omega(\mathbf{x})$ – положительное Γ-периодическое решение уравнения

$$\mathbf{D}^* \widetilde{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}\omega(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0,$$

подчиненное условию нормировки $\|\omega\|^2_{L_2(\Omega)} = |\Omega|$. Тогда оператор (1.8) запишется в факторизованном виде

$$\widetilde{A}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D}(\omega^\varepsilon)^{-1} = (\omega^\varepsilon)^{-1} A_\varepsilon (\omega^\varepsilon)^{-1}, \tag{1.9}$$

где A_ε – оператор (1.1). Для оператора (1.9) уже не удается найти такой оператор с постоянными коэффициентами, к резольвенте которого сходилась бы резольвента $(\widetilde{A}_\varepsilon + I)^{-1}$. В [4] было показано, что

$$\left\|(\widetilde{A}_\varepsilon + I)^{-1} - [\omega^\varepsilon](A^0 + I)^{-1}[\omega^\varepsilon]\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{1.10}$$

Здесь A^0 – эффективный оператор для оператора (1.1) при $g = \widetilde{g}\omega^2$, а $[\omega^\varepsilon]$ – оператор умножения на функцию $\omega^\varepsilon(\mathbf{x})$. Аппроксимация теперь содержит быстро осциллирующие множители по краям от резольвенты оператора A^0.

Отметим, что в работах [4–6] аппроксимации для резольвенты были найдены не только для операторов вида (1.1), (1.8), но для широкого класса матричных дифференциальных операторов второго порядка вида $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Здесь $g(\mathbf{x})$ – Г-периодическая ограниченная и положительно определенная $(m\times m)$-матрица-функция, а $b(\mathbf{D}) = \sum\limits_{l=1}^{d} b_l D_l$ – $(m\times n)$-матричный ДО первого порядка. Предполагалось, что $m \geqslant n$, а символ $b(\boldsymbol{\xi})$ – матрица максимального ранга. Подчеркнем, что факторизация изучаемого оператора имеет принципиальное значение для получения описанных результатов.

С помощью теоретико-операторного подхода были также получены операторные оценки при усреднении параболических уравнений второго порядка; см. [7–10].

Поясним метод на примере более простого оператора (1.1). *Масштабным преобразованием* изучение оператора $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε сводится к изучению поведения резольвенты $(A + \varepsilon^2 I)^{-1}$. Здесь $A = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}$. Далее, с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор A раскладывается в прямой интеграл по операторам $A(\mathbf{k})$. Оператор $A(\mathbf{k})$ действует в $L_2(\Omega)$ и задается дифференциальным выражением

$(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*g(\mathbf{x})(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ при периодических граничных условиях. Параметр $\mathbf{k}$ называют *квазиимпульсом.* Спектр оператора $A(\mathbf{k})$ дискретен. Пусть $E_1(\mathbf{k})$ – первое собственное значение и $\varphi_1(\mathbf{k};\mathbf{x})$ – первая собственная функция оператора $A(\mathbf{k})$. Край спектра оператора A – это минимум первой зонной функции $E_1(\mathbf{k})$, который достигается при $\mathbf{k}=0$: $E_1(0)=0$. Выясняется, что поведение резольвенты $(A+\varepsilon^2 I)^{-1}$ можно описать в терминах "пороговых" характеристик, то есть, спектральных характеристик оператора A на краю спектра (имеются в виду асимптотики для $E_1(\mathbf{k})$ и $\varphi_1(\mathbf{k};\mathbf{x})$ при $|\mathbf{k}|\to 0$). В частности, эффективная матрица g^0 получается из асимптотики первой зонной функции $E_1(\mathbf{k})$ при $|\mathbf{k}|\to 0$: $E_1(\mathbf{k})\sim\langle g^0\mathbf{k},\mathbf{k}\rangle$. Таким образом, эффект усреднения можно трактовать как *пороговый эффект* на краю спектра периодического оператора A.

Отметим, что другой подход к операторным оценкам погрешности при усреднении эллиптических и параболических уравнений в $\mathbb{R}^d$ (так называемый метод сдвига) был развит Жиковым и Пастуховой [11–13]; см. также обзор [14] и цитированную там литературу.

К усреднению эллиптических операторов высокого четного порядка теоретико-операторный подход применялся в работах [15–19], а метод сдвига – в работах [20–23]. В [16–19] изучались матричные ДО порядка $2p$, заданные в факторизованном виде $A_\varepsilon=b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$. Здесь $g(\mathbf{x})$ – Γ-периодическая ограниченная и положительно определенная $(m\times m)$-матрица-функция, а $b(\mathbf{D})=\sum\limits_{|\alpha|=p} b_\alpha\mathbf{D}^\alpha$ – $(m\times n)$-матричный ДО порядка p. Предполагалось, что $m\geqslant n$, а символ $b(\boldsymbol{\xi})$ – матрица максимального ранга. В [16] для таких операторов установлен аналог оценки (1.6), а также найдено приближение по $(L_2\to H^p)$-норме при учете корректора (аналог оценки (1.7)). Эффективный оператор имеет вид $A^0=b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})$. В работах [18,19] найдена уточненная аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon+I)^{-1}$ при учете корректоров различных порядков с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^{2p})$. В [18,19] и [22,23] был обнаружен интересный эффект, характерный для операторов высокого порядка $2p$, $p\geqslant 2$: для скалярных операторов с вещественными коэффициентами первый корректор обращается в нуль и имеет место оценка

$$\left\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2. \tag{1.11}$$

В частности, это верно для одномерного оператора

$$A_\varepsilon = \frac{d^2}{dx^2} g^\varepsilon(x) \frac{d^2}{dx^2} = D^2 g^\varepsilon(x) D^2$$

(так называемого *оператора Эйлера–Бернулли*).

Отметим также работы [24–30] по операторным оценкам при усреднении эллиптических и параболических задач вблизи края внутренней спектральной лакуны; в этих задачах проявляется пороговый эффект на краю лакуны.

Более подробный обзор результатов по операторным оценкам погрешности можно найти во введении к работе [31].

1.3. Постановка задачи. Результат. Работа посвящена построению аппроксимации резольвенты одномерного эллиптического ДО четвертого порядка с сингулярным периодическим потенциалом.

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ изучается ДО четвертого порядка вида

$$B_\varepsilon := \frac{d^4}{dx^4} + \varepsilon^{-4} V^\varepsilon(x) = D^4 + \varepsilon^{-4} V^\varepsilon(x), \quad D = -i\frac{d}{dx}.$$

Предполагается, что $V(x)$ – вещественная 1-периодическая функция класса $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Добавляя к $V(x)$ постоянную, можно считать, что нижним краем спектра оператора $B = D^4 + V(x)$ является точка $\lambda_0 = 0$. *Наша цель* – построить приближение к резольвенте $(B_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R})$ при малом ε. В отличие от оператора (1.8) второго порядка с сингулярным потенциалом, оператор B_ε не допускает факторизации, подобной (1.9). Как мы выяснили, это обстоятельство меняет характер результата кардинальным образом.

Следуя теоретико-операторному подходу, мы применяем масштабное преобразование и сводим дело к изучению оператора $(B+\varepsilon^4 I)^{-1}$. Затем с помощью преобразования Гельфанда раскладываем оператор B по операторам $B(k)$, действующим в $L_2(0,1)$.

Оператор $B(k)$ задается выражением $(D+k)^4+V(x)$ при периодических граничных условиях. Пусть $E_1(k)$ – первое собственное значение оператора $B(k)$. Как известно, $E_1(k)$ – непрерывная четная (2π)-периодическая функция. *Предполагается, что* $E_1(k)$ *достигает минимума на периоде* $k\in[-\pi,\pi)$ *ровно в двух точках* $\pm k_0$, $0<k_0<\pi$, *причем минимум невырожден*; см. условие **A** в §2. Тогда в окрестности этих точек функция $E_1(k)$ аналитична и $E_1(k)\sim g^{(1)}(k\mp k_0)^2$, где $g^{(1)}>0$. Пусть $\varphi_0(x)$ – периодическое решение уравнения $B(k_0)\varphi_0(x)=0$, нормированное в $L_2(0,1)$. Положим $\psi_0(x):=e^{ik_0x}\varphi_0(x)$. Из результатов работы [32] Баданина и Коротяева следует, что условие **A** выполнено в случае "не слишком больших" потенциалов V.

Наш *основной результат* – аппроксимация резольвенты $(B_\varepsilon+I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R})$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$; см. теорему 4.1. Выяснено, что каждая точка минимума функции $E_1(k)$ дает вклад в аппроксимацию: резольвента $(B_\varepsilon+I)^{-1}$ приближается суммой $R_\varepsilon^{(+)}+R_\varepsilon^{(-)}$, где

$$R_\varepsilon^{(+)}=[\psi_0^\varepsilon](\varepsilon^{-2}g^{(1)}D^2+I)^{-1}[\overline{\psi_0^\varepsilon}]$$

и

$$R_\varepsilon^{(-)}=[\overline{\psi_0^\varepsilon}](\varepsilon^{-2}g^{(1)}D^2+I)^{-1}[\psi_0^\varepsilon].$$

Таким образом, поведение резольвенты оператора B_ε принципиально отличается от поведения резольвенты факторизованного оператора Эйлера–Бернулли $A_\varepsilon=D^2g^\varepsilon(x)D^2$. Резольвента $(A_\varepsilon+I)^{-1}$ имеет предел, равный резольвенте эффективного оператора $A^0=g^0D^4$; см. (1.11). Резольвента $(B_\varepsilon+I)^{-1}$ предела не имеет и приближается суммой двух резольвент сингулярного оператора $\varepsilon^{-2}g^{(1)}D^2$ второго порядка (с большим множителем ε^{-2}), окаймленных подходящими быстро осциллирующими множителями. Этот результат также принципиально отличается от случая оператора второго порядка (1.8) с сингулярным потенциалом, допускающего факторизацию (1.9); см. оценку (1.10).

1.4. Обозначения. Через $L_q(\mathbb{R})$, $L_q(a,b)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, обозначим стандартные L_q–классы на оси и на промежутке (a,b). Для измеримой функции f через $[f]$ или $[f(x)]$ обозначим оператор умножения на функцию f в пространстве L_2. Через $C_0^\infty(\mathbb{R})$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на оси; через $H^s(\mathbb{R})$, $s \geqslant 0$, – стандартные классы Соболева; $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ – класс функций $f(x)$ на оси, для которых произведение $f\varphi$ принадлежит $H^s(\mathbb{R})$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; $\widetilde{H}^s(0,1)$ – подпространство тех функций из $H^s(0,1)$, периодическое продолжение которых принадлежит классу $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Используем обозначение $D := -i\frac{d}{dx}$. Через $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ обозначим класс Шварца.

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ – комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Скалярное произведение и норма в $\mathfrak{H}$ обозначаются через $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ соответственно; для линейного ограниченного оператора $T : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ через $\|T\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ обозначим операторную норму. Иногда мы опускаем индексы. Для замкнутого оператора T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ через $\operatorname{Dom} T$ обозначается его область определения, а через T^* – сопряженный оператор. Пусть A – самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве. В этом случае $\sigma(A)$ обозначает спектр оператора A. Если δ – произвольное борелевское множество на $\mathbb{R}$, то $E_A(\delta)$ – спектральный проектор оператора A, отвечающий множеству δ.

Для всякой 1-периодической функции $f(x)$ на оси положим $f^\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)$. Преобразование Фурье Φ вводится на классе Шварца по правилу

$$(\Phi v)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} v(x)\,dx, \quad v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

и продолжается по непрерывности до унитарного оператора $\Phi\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.

§2. Спектральные свойства оператора B. Пороговые аппроксимации

2.1. Оператор B. Разложение в прямой интеграл. Пусть $V(x)$ – вещественная 1-периодическая функция класса $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

В $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор

$$B = D^4 + V(x), \quad \operatorname{Dom} B = H^4(\mathbb{R}).$$

Оператор B самосопряжен и полуограничен снизу.

Определим преобразование Гельфанда $\mathcal{G}$ (см., например, [33] или [4, гл. 2]). Первоначально $\mathcal{G}$ задается на классе Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ равенством

$$\mathcal{G}u(k,x) = \widetilde{u}(k,x) := (2\pi)^{-1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(x+n)e^{-ik(x+n)}, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Затем $\mathcal{G}$ распространяется по непрерывности до унитарного отображения

$$\mathcal{G} \colon L_2(\mathbb{R}) \to \int\limits_{(-\pi,\pi)} \oplus L_2(0,1)\, dk = L_2((-\pi,\pi)\times(0,1)).$$

В $L_2(0,1)$ рассмотрим семейство самосопряженных операторов

$$B(k) = (D+k)^4 + V(x), \quad \operatorname{Dom} B(k) = \widetilde{H}^4(0,1), \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

С помощью преобразования Гельфанда оператор B раскладывается в прямой интеграл по операторам $B(k)$ (то есть, частично диагонализуется):

$$B = \mathcal{G}^{-1}\Bigg(\int\limits_{(-\pi,\pi)} \oplus B(k)\, dk\Bigg)\mathcal{G}. \tag{2.2}$$

Это означает, что справедливы соотношения

$$u \in \operatorname{Dom} B = H^4(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \widetilde{u} \in L_2((-\pi,\pi); \widetilde{H}^4(0,1)),$$
$$\mathcal{G}(Bu)(k,x) = B(k)\widetilde{u}(k,x), \quad u \in H^4(\mathbb{R}), \quad k \in [-\pi,\pi), \quad x \in (0,1).$$

Спектр оператора $B(k)$ дискретен и состоит из собственных значений $\{E_j(k)\}_{j=1}^{\infty}$, занумерованных (с учетом кратностей) в порядке неубывания; функции $E_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$, непрерывны, четны и 2π-периодичны; будем называть $E_j(k)$ *зонными функциями*. Собственным значениям $E_j(k)$ отвечают собственные функции

$\varphi_j(k,x)$; их можно выбрать так, что набор $\{\varphi_j(k,\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L_2(0,1)$ и, кроме того, функции $\varphi_j(\cdot,\cdot)$ измеримы по паре переменных. Если в данной точке k_* число $E_j(k_*)$ – простое собственное значение оператора $B(k_*)$, то в некоторой окрестности точки k_* функция $E_j(k)$ и функция $\varphi_j(k,\cdot)$ со значениями в $\widetilde{H}^4(0,1)$ являются вещественно аналитическими.

2.2. Условие А. Свойства зонных функций. Ниже предполагается, что семейство операторов $B(k)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие А. *Справедливы соотношения*

$$0 = \min E_1 < \min E_2;$$

на интервале $[0,\pi)$ *минимум функции* $E_1(k)$ *достигается в единственной точке* $k_0 \in (0,\pi)$ *и точка* k_0 *является точкой невырожденного минимума для* $E_1(k)$.

Ввиду четности, функция $E_1(k)$ на периоде $[-\pi,\pi)$ достигает минимума ровно в двух симметричных точках k_0 и $-k_0$. В работе [32] доказано, что условие **A** выполнено для “не слишком больших” потенциалов V, а именно, для любой вещественной 1-периодической функции $W \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, отличной от константы, найдется число $\gamma_0 > 0$ такое, что при каждом $\gamma \in (0,\gamma_0]$ можно выбрать число $\alpha_\gamma \in \mathbb{R}$ таким образом, что семейство операторов

$$B(k,\gamma) := (D+k)^4 + V_\gamma(x), \quad \operatorname{Dom} B(k,\gamma) = \widetilde{H}^4(0,1),$$

где $V_\gamma(x) = \gamma W(x) + \alpha_\gamma$, удовлетворяет условию **A**.

Для всякого $0 < \sigma < \min\{k_0, \pi - k_0\}$ введем обозначения

$$U_\sigma^{(+)} := [k_0-\sigma, k_0+\sigma], \;\; U_\sigma^{(-)} := [-k_0-\sigma, -k_0+\sigma], \;\; U_\sigma := U_\sigma^{(-)} \cup U_\sigma^{(+)}.$$

Определим величину

$$d_0 := \operatorname{dist}\{\sigma(B(k_0)) \setminus \{0\}, 0\} = \operatorname{dist}\{\sigma(B(-k_0)) \setminus \{0\}, 0\}.$$

Ясно, что $d_0 = E_2(k_0) = E_2(-k_0)$. *Фиксируем настолько малое число* $\sigma > 0$, *чтобы были выполнены соотношения*

$$\operatorname{rank} E_{B(k)}[0, d_0/3] = 1, \quad \sigma(B(k)) \cap (d_0/3, 2d_0/3) = \varnothing, \quad k \in U_\sigma.$$

Введем обозначения

$$E_{B(k)}[0, d_0/3] =: F(k), \quad I - F(k) = F(k)^{\perp}, \quad k \in U_\sigma.$$

Таким образом, $E_1(k)$ является однократным собственным значением оператора $B(k)$ при $k \in U_\sigma$; функция $E_1(k)$ вещественно аналитична, а $\varphi_1(k,\cdot)$ является вещественно аналитической функцией со значениями в $\widetilde{H}^4(0,1)$ при $k \in U_\sigma$. Кроме того, из условия **A** вытекают оценки

$$c_0(k \mp k_0)^2 \leqslant E_1(k) \leqslant c_1(k \mp k_0)^2, \ k \in U_\sigma^{(\pm)}, \ 0 < c_0 \leqslant c_1 < \infty, \quad (2.3)$$

$$E_1(k) \geqslant c_2 > 0, \quad k \in [-\pi, \pi) \setminus U_\sigma, \quad (2.4)$$

$$E_2(k) \geqslant c_3 > 0, \quad k \in [-\pi, \pi). \quad (2.5)$$

Собственное значение $E_1(k)$ и собственная функция $\varphi_1(k,x)$ оператора $B(k)$ допускают разложения в окрестности точки k_0:

$$E_1(k) = \lambda_0 + \lambda_1(k-k_0) + \lambda_2(k-k_0)^2 + O(|k-k_0|^3), \quad k \to k_0, \quad (2.6)$$

$$\varphi_1(k,x) = \varphi_0(x) + \widetilde{\varphi}_1(x)(k-k_0) + \widetilde{\varphi}_2(x)(k-k_0)^2 + O(|k-k_0|^3), \quad k \to k_0. \quad (2.7)$$

(В (2.7) разложение понимается в смысле пространства $\widetilde{H}^4(0,1)$.) В силу (2.3) имеют место равенства $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 > 0$. Подставляя (2.6), (2.7) в уравнение

$$B(k)\varphi_1(k,\cdot) = E_1(k)\varphi_1(k,\cdot)$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях величины $k - k_0$, получаем уравнения на функции $\varphi_0(x)$, $\widetilde{\varphi}_1(x)$ и $\widetilde{\varphi}_2(x)$:

$$(D+k_0)^4\varphi_0(x) + V(x)\varphi_0(x) = 0, \quad (2.8)$$

$$(D+k_0)^4\widetilde{\varphi}_1(x) + 4(D+k_0)^3\varphi_0(x) + V(x)\widetilde{\varphi}_1(x) = 0,$$

$$(D+k_0)^4\widetilde{\varphi}_2(x) + 4(D+k_0)^3\widetilde{\varphi}_1(x) + 6(D+k_0)^2\varphi_0(x) + V(x)\widetilde{\varphi}_2(x) = \lambda_2\varphi_0(x). \quad (2.9)$$

В силу условия нормировки $\int\limits_0^1 |\varphi_1(k,x)|^2\,dx = 1$, функция $\varphi_0 \in \widetilde{H}^4(0,1)$ является решением задачи

$$\begin{cases} (D+k_0)^4\varphi_0(x) + V(x)\varphi_0(x) = 0, \\ \int\limits_0^1 |\varphi_0(x)|^2\,dx = 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Коэффициент $\widetilde{\varphi}_1(x)$ разложения (2.7) удовлетворяет уравнению

$$(D+k_0)^4\widetilde{\varphi}_1(x) + V(x)\widetilde{\varphi}_1(x) = -4(D+k_0)^3\varphi_0(x). \tag{2.11}$$

Следовательно, выполнено условие разрешимости

$$\int\limits_0^1 \big((D+k_0)^3\varphi_0(x)\big)\,\overline{\varphi_0(x)}\,dx = 0. \tag{2.12}$$

(По существу, выполнение условия (2.12) обеспечено условием **A**: из условия **A** следует справедливость разложений (2.6), (2.7), а тогда и разрешимость уравнения (2.11) для $\widetilde{\varphi}_1$.) Через $\varphi_1(x)$ обозначим единственное периодическое решение задачи

$$\begin{gathered} (D+k_0)^4\,\varphi_1(x) + V(x)\varphi_1(x) = -4\,(D+k_0)^3\,\varphi_0(x), \\ \int\limits_0^1 \varphi_1(x)\overline{\varphi_0(x)}\,dx = 0. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Тогда

$$\widetilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x) + \alpha\varphi_0(x) \tag{2.14}$$

с некоторой постоянной α.

Далее, домножим уравнение (2.9) на $\overline{\varphi_0(x)}$ и проинтегрируем по интервалу $(0,1)$. Учитывая (2.8), (2.12) и (2.14), приходим к равенству

$$\begin{aligned} g^{(1)} &:= \lambda_2 \\ &= 6\int\limits_0^1 \big|\big(D+k_0\big)\varphi_0(x)\big|^2\,dx + 4\int\limits_0^1 \varphi_1(x)\overline{\big(D+k_0\big)^3\varphi_0(x)}\,dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

При условии **A** величина $g^{(1)}$ положительна:

$$g^{(1)} \geqslant c_0 > 0, \tag{2.16}$$

где c_0 – постоянная из нижнего неравенства (2.3).

Поскольку $E_1(-k) = E_1(k)$ и $\varphi_1(-k,x) = \overline{\varphi_1(k,x)}$, из (2.6), (2.7) вытекают следующие разложения в окрестности точки $-k_0$:

$$E_1(k) = \lambda_2(k+k_0)^2 + O(|k+k_0|^3), \quad k \to -k_0, \tag{2.17}$$

$$\varphi_1(k,x) = \overline{\varphi_0(x)} - \overline{\widetilde{\varphi}_1(x)}(k+k_0) + \overline{\widetilde{\varphi}_2(x)}(k+k_0)^2 + O(|k+k_0|^3), \\ k \to -k_0. \tag{2.18}$$

Из разложений (2.6), (2.7), (2.17), (2.18) следует, что при $k \to k_0$ проектор $F(k)$ приближается проектором

$$P^{(+)} := F(k_0) = (\cdot, \varphi_0)_{L_2(0,1)}\varphi_0, \tag{2.19}$$

а при $k \to -k_0$ – проектором

$$P^{(-)} := F(-k_0) = (\cdot, \overline{\varphi_0})_{L_2(0,1)}\overline{\varphi_0}. \tag{2.20}$$

Оператор $B(k)F(k)$ при $k \to k_0$ приближается оператором $g^{(1)}(k-k_0)^2P^{(+)}$, а при $k \to -k_0$ – оператором $g^{(1)}(k+k_0)^2P^{(-)}$. В следующем пункте мы оценим погрешности этих приближений по операторной норме в $L_2(0,1)$.

2.3. Пороговые аппроксимации. Введем контур

$$\Gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = d_0/2\}$$

с направлением обхода против часовой стрелки. При $k \in U_\sigma$ справедливы равенства

$$F(k) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (B(k) - \zeta I)^{-1}\, d\zeta, \tag{2.21}$$

$$B(k)F(k) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (B(k) - \zeta I)^{-1}\zeta\, d\zeta. \tag{2.22}$$

Лемма 2.1. *Пусть проекторы $P^{(+)}$ и $P^{(-)}$ определены в* (2.19) *и* (2.20)*, соответственно.*

1°. *При* $k \in U_\sigma^{(+)}$ *справедливы соотношения*

$$F(k) = P^{(+)} + \Phi^{(+)}(k), \quad \left\|\Phi^{(+)}(k)\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_1|k - k_0|.$$

2°. *При* $k \in U_\sigma^{(-)}$ *справедливы соотношения*

$$F(k) = P^{(-)} + \Phi^{(-)}(k), \quad \left\|\Phi^{(-)}(k)\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_1|k + k_0|.$$

Постоянная C_1 *зависит от* k_0, d_0 *и* V.

Доказательство. Проверим утверждение 1°; утверждение 2° устанавливается аналогично.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
&(B(k) - \zeta I)^{-1} =: R(k,\zeta), \quad (B(k_0) - \zeta I)^{-1} =: R_0(\zeta),\\
&|\zeta| = d_0/2, \quad k \in U_\sigma^{(+)};\\
&\Delta B(k) := B(k) - B(k_0) = 4D_{k_0}^3(k - k_0) + 6D_{k_0}^2(k - k_0)^2\\
&\ + 4D_{k_0}(k - k_0)^3 + I(k - k_0)^4, \quad \text{где} \ \ D_{k_0} := D + k_0.
\end{aligned}$$

Поскольку $\sigma(B(k)) \subset [0, d_0/3] \cup [2d_0/3, \infty)$ при $k \in U_\sigma^{(+)}$, а $\sigma(B(k_0)) \subset \{0\} \cup [d_0, \infty)$, выполнены оценки

$$\begin{gathered}
\|R(k,\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \frac{6}{d_0}, \ \ \|R_0(\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \frac{2}{d_0},\\
\zeta \in \Gamma, \quad k \in U_\sigma^{(+)}.
\end{gathered} \tag{2.23}$$

Оператор $R_0(\zeta)$ непрерывно переводит $L_2(0,1)$ в $\widetilde{H}^4(0,1)$. Оценим его норму:

$$\begin{aligned}
\|R_0(\zeta)\|_{L_2(0,1)\to H^4(0,1)} &\leqslant \|R_0(-1)\|_{L_2(0,1)\to H^4(0,1)}\\
&\quad\times \left\|(B(k_0) + I)(B(k_0) - \zeta I)^{-1}\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}.
\end{aligned}$$

Имеем

$$\left\|(B(k_0)+I)(B(k_0)-\zeta I)^{-1}\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \sup_{x\in\sigma(B(k_0))} \frac{x+1}{|x-\zeta|} \leqslant 2+\frac{2}{d_0}.$$

Следовательно,

$$\|R_0(\zeta)\|_{L_2(0,1)\to H^4(0,1)} \leqslant \left(2+\frac{2}{d_0}\right)\|R_0(-1)\|_{L_2(0,1)\to H^4(0,1)} \\ =: \mathfrak{C}_1(k_0,d_0,V), \quad \zeta\in\Gamma. \tag{2.24}$$

Отсюда и из выражения для оператора $\Delta B(k)$ вытекает оценка

$$\|\Delta B(k) R_0(\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \mathfrak{C}_2(k_0,d_0,V)|k-k_0|, \\ \zeta\in\Gamma, \quad k\in U_\sigma^{(+)}. \tag{2.25}$$

Воспользуемся резольвентным тождеством

$$R(k,\zeta) = R_0(\zeta) - R(k,\zeta)\Delta B(k) R_0(\zeta). \tag{2.26}$$

Вместе с (2.23), (2.25) это влечет оценку

$$\|R(k,\zeta)-R_0(\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \frac{6}{d_0}\mathfrak{C}_2(k_0,d_0,V)|k-k_0|, \\ \zeta\in\Gamma, \quad k\in U_\sigma^{(+)}. \tag{2.27}$$

Применяя (2.21) в точках k и k_0 с учетом равенства $F(k_0) = P^{(+)}$, получаем

$$F(k)-P^{(+)} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left(R(k,\zeta)-R_0(\zeta)\right)\, d\zeta.$$

Отсюда и из (2.27) следует искомое неравенство

$$\left\|F(k)-P^{(+)}\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant 3\mathfrak{C}_2(k_0,d_0,V)|k-k_0|, \quad k\in U_\sigma^{(+)}. \ \square$$

Лемма 2.2. *Пусть проекторы $P^{(+)}$ и $P^{(-)}$ определены в* (2.19) *и* (2.20)*, соответственно.*
1°. *При $k\in U_\sigma^{(+)}$ справедливы соотношения*

$$B(k)F(k) = g^{(1)}(k-k_0)^2 P^{(+)} + \Psi^{(+)}(k), \\ \left\|\Psi^{(+)}(k)\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_2|k-k_0|^3.$$

2°. *При* $k \in U_\sigma^{(-)}$ *справедливы соотношения*

$$B(k)F(k) = g^{(1)}(k+k_0)^2 P^{(-)} + \Psi^{(-)}(k),$$
$$\left\|\Psi^{(-)}(k)\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_2|k+k_0|^3.$$

Постоянная C_2 *зависит от* k_0, d_0 *и* V.

Доказательство. Проверим утверждение 1°; утверждение 2° устанавливается аналогично.

Итерируя резольвентное тождество (2.26) трижды, получаем

$$\begin{aligned} R(k,\zeta) &= R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\Delta B(k)R_0(\zeta) \\ &\quad + R_0(\zeta)\Delta B(k)R_0(\zeta)\Delta B(k)R_0(\zeta) + J_1(k,\zeta), \\ J_1(k,\zeta) &:= -R(k,\zeta)\Delta B(k)R_0(\zeta)\Delta B(k)R_0(\zeta)\Delta B(k)R_0(\zeta). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Из (2.23), (2.25) вытекает оценка

$$\begin{gathered} \|J_1(k,\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \frac{6}{d_0}\mathfrak{C}_2^3(d_0,k_0,V)|k-k_0|^3, \\ \zeta\in\Gamma, \quad k\in U_\sigma^{(+)}. \end{gathered} \tag{2.29}$$

Далее, подставляя выражение для $\Delta B(k)$ в (2.28), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} R(k,\zeta) &= R_0(\zeta) - R_0(\zeta)\big(4D_{k_0}^3(k-k_0) + 6D_{k_0}^2(k-k_0)^2\big)R_0(\zeta) \\ &\quad + R_0(\zeta)\left(4D_{k_0}^3(k-k_0)\right)R_0(\zeta)\big(4D_{k_0}^3(k-k_0)\big)R_0(\zeta) \\ &\quad + J_1(k,\zeta) + J_2(k,\zeta), \\ J_2(k,\zeta) &:= -R_0(\zeta)\left(4D_{k_0}(k-k_0)^3 + I(k-k_0)^4\right)R_0(\zeta) \\ &\quad + R_0(\zeta)\big(4D_{k_0}^3(k-k_0)\big)R_0(\zeta)\big(6D_{k_0}^2(k-k_0)^2 + 4D_{k_0}(k-k_0)^3 \\ &\quad + I(k-k_0)^4\big)R_0(\zeta) + R_0(\zeta)\big(6D_{k_0}^2(k-k_0)^2 + 4D_{k_0}(k-k_0)^3 \\ &\quad + I(k-k_0)^4\big)R_0(\zeta)\Delta B(k)R_0(\zeta). \end{aligned} \tag{2.30}$$

С учетом (2.24) нормы операторов $D_{k_0}^j R_0(\zeta)$, $j=1,2,3$, в $L_2(0,1)$ равномерно ограничены константами, зависящими от k_0, d_0 и V.

Вместе с (2.23) и (2.25) это влечет оценку

$$\begin{gathered}\|J_2(k,\zeta)\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \mathfrak{C}_3(d_0,k_0,V)|k-k_0|^3,\\ \zeta\in\Gamma,\quad k\in U_\sigma^{(+)}.\end{gathered}\tag{2.31}$$

Применяя (2.22) в точках k и k_0 с учетом (2.30) и равенства $B(k_0)F(k_0)=0$, получаем

$$B(k)F(k) = I_1(k-k_0) + I_2(k-k_0)^2 + \Psi^{(+)}(k),\tag{2.32}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma R_0(\zeta)4D_{k_0}^3R_0(\zeta)\zeta\,d\zeta,\tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}I_2 = {}&\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma R_0(\zeta)6D_{k_0}^2R_0(\zeta)\zeta\,d\zeta\\ &-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma R_0(\zeta)4D_{k_0}^3R_0(\zeta)4D_{k_0}^3R_0(\zeta)\zeta\,d\zeta,\end{aligned}\tag{2.34}$$

$$\Psi^{(+)}(k) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma\left(J_1(k,\zeta)+J_2(k,\zeta)\right)\zeta\,d\zeta.\tag{2.35}$$

Из (2.29), (2.31) и (2.35) получаем оценку

$$\begin{aligned}&\left\|\Psi^{(+)}(k)\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\\ &\leqslant \frac{d_0^2}{4}\left(\frac{6}{d_0}\mathfrak{C}_2^3(d_0,k_0,V)+\mathfrak{C}_3(d_0,k_0,V)\right)|k-k_0|^3,\ \ k\in U_\sigma^{(+)}.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Сопоставляя (2.32), (2.36) с результатом пункта 2.2 об асимптотике оператора $B(k)F(k)$ при $k\to k_0$, приходим к соотношениям $I_1=0$, $I_2=g^{(1)}P^{(+)}$. □

Замечание 2.3. Коэффициенты I_1, I_2 в разложении (2.32) можно вычислить непосредственно, не прибегая к рассмотрениям пункта 2.2. Для этого следует представить $R_0(\zeta)$ в виде

$$R_0(\zeta) = R_0(\zeta)P^{(+)} + R_0^{\perp}(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}P^{(+)} + R_0^{\perp}(\zeta),$$
$$\text{где}\quad R_0^{\perp}(\zeta) := R_0(\zeta)(I - P^{(+)}),\quad \zeta \in \Gamma, \tag{2.37}$$

и учесть, что оператор-функция $R_0^{\perp}(\zeta)$ голоморфна внутри контура Γ. Подставляя (2.37) в (2.33), получаем $I_1 = 4P^{(+)}D_{k_0}^3 P^{(+)}$. Поскольку $B(k)F(k) \geqslant 0$, отсюда и из (2.32) следует, что

$$P^{(+)}D_{k_0}^3 P^{(+)} = 0. \tag{2.38}$$

Подставляя теперь (2.37) в (2.34) и учитывая (2.38), приходим к равенству

$$I_2 = 6P^{(+)}D_{k_0}^2 P^{(+)} - 16P^{(+)}D_{k_0}^3 R_0^{\perp}(0)D_{k_0}^3 P^{(+)}.$$

Это приводит к прежнему результату $I_2 = g^{(1)}P^{(+)}$, где $g^{(1)}$ определено выражением (2.15).

§3. Аппроксимация оператора $(B + \varepsilon^4 I)^{-1}$

3.1. Аппроксимация оператора $(B(k) + \varepsilon^4 I)^{-1}$.

Лемма 3.1. 1°. *При $\varepsilon > 0$ и $k \in U_\sigma^{(+)}$ справедлива оценка*

$$\big\|(B(k) + \varepsilon^4 I)^{-1}F(k) - (g^{(1)}(k - k_0)^2 + \varepsilon^4)^{-1}P^{(+)}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_3\varepsilon^{-2}. \tag{3.1}$$

2°. *При $\varepsilon > 0$ и $k \in U_\sigma^{(-)}$ справедлива оценка*

$$\big\|(B(k) + \varepsilon^4 I)^{-1}F(k) - (g^{(1)}(k + k_0)^2 + \varepsilon^4)^{-1}P^{(-)}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_3\varepsilon^{-2}. \tag{3.2}$$

Постоянная C_3 зависит от k_0, d_0, V и постоянной c_0 из (2.3).

Доказательство. Проверим утверждение 1°; утверждение 2° устанавливается аналогично.

Пусть $k \in U_\sigma^{(+)}$. Воспользуемся подходящим вариантом резольвентного тождества:

$$\begin{aligned}
&(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}F(k) - (g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P^{(+)} \\
&= F(k)(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}\big(F(k)-P^{(+)}\big) - \big(P^{(+)}-F(k)\big) \\
&\times \big(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4\big)^{-1}P^{(+)} - F(k)(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1} \\
&\times \big(B(k)F(k) - g^{(1)}(k-k_0)^2P^{(+)}\big)\big(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4\big)^{-1}P^{(+)}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

В силу (2.3) и (2.16) справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
&\big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}F(k)\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant (c_0(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}, \\
&k\in U_\sigma^{(+)}, \quad \big|(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}\big| \leqslant (c_0(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Применяя леммы 2.1, 2.2 и соотношения (3.3), (3.4), получаем

$$\begin{aligned}
&\big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}F(k) - (g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P^{(+)}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \\
&\leqslant 2C_1(c_0(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}|k-k_0| + C_2(c_0(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-2}|k-k_0|^3 \\
&\qquad \leqslant \left(2C_1c_0^{-1/2}+C_2c_0^{-3/2}\right)\varepsilon^{-2}, \quad \varepsilon>0, \quad k\in U_\sigma^{(+)}.
\end{aligned}$$

Это доказывает оценку (3.1) с постоянной
$C_3 = 2C_1c_0^{-1/2}+C_2c_0^{-3/2}$. □

Лемма 3.2. *При $\varepsilon>0$ и $k\in[-\pi,\pi)$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1} - (g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P^{(+)} \\
&\qquad - (g^{(1)}(k+k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P^{(-)}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_4\varepsilon^{-2}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Постоянная C_4 зависит от k_0, d_0, σ, V, c_0, c_2, c_3.

Доказательство. Очевидно,

$$\big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}F(k)^\perp\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \frac{3}{2d_0}, \quad k\in U_\sigma.$$

С другой стороны,

$$\big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \varepsilon^{-4}, \quad k\in[-\pi,\pi). \tag{3.6}$$

Следовательно,

$$\big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}F(k)^{\perp}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant (3/2d_0)^{1/2}\varepsilon^{-2}, \quad k\in U_\sigma.$$

Вместе с (3.1) и (3.2) это влечет

$$\begin{aligned}\big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}-(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P^{(+)}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}&\\ \leqslant \widetilde{C}_4\varepsilon^{-2}, \quad \varepsilon>0,\ \ k\in U_\sigma^{(+)},&\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}-(g^{(1)}(k+k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}P^{(-)}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}&\\ \leqslant \widetilde{C}_4\varepsilon^{-2}, \quad \varepsilon>0,\ \ k\in U_\sigma^{(-)},&\end{aligned}\tag{3.8}$$

где $\widetilde{C}_4 = C_3+(3/2d_0)^{1/2}$.

Далее, в силу (2.4) и (2.5)

$$\big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \max\{c_2^{-1},c_3^{-1}\}, \quad k\in[-\pi,\pi)\setminus U_\sigma.$$

Отсюда и из (3.6) следует, что

$$\begin{aligned}\big\|(B(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant \max\{c_2^{-1/2},c_3^{-1/2}\}\varepsilon^{-2},&\\ k\in[-\pi,\pi)\setminus U_\sigma.&\end{aligned}\tag{3.9}$$

С учетом (2.16) справедливы очевидные неравенства

$$\big|(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}\big| \leqslant c_0^{-1/2}\sigma^{-1}\varepsilon^{-2},\ \ k\in[-\pi,\pi)\setminus U_\sigma^{(+)},\tag{3.10}$$

$$\big|(g^{(1)}(k+k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1}\big| \leqslant c_0^{-1/2}\sigma^{-1}\varepsilon^{-2},\ \ k\in[-\pi,\pi)\setminus U_\sigma^{(-)}.\tag{3.11}$$

В итоге, из (3.7)–(3.11) вытекает неравенство (3.5) с постоянной

$$C_4 = \max\{\widetilde{C}_4 + c_0^{-1/2}\sigma^{-1}; \max\{c_2^{-1/2},c_3^{-1/2}\}+2c_0^{-1/2}\sigma^{-1}\}. \quad \square$$

В $L_2(0,1)$ рассмотрим операторы, зависящие от параметра $k\in[-\pi,\pi)$:

$$A^{(+)}(k) := g^{(1)}(D+k-k_0)^2, \quad \operatorname{Dom} A^{(+)}(k) = \widetilde{H}^2(0,1),\tag{3.12}$$

$$A^{(-)}(k) := g^{(1)}(D+k+k_0)^2, \quad \operatorname{Dom} A^{(-)}(k) = \widetilde{H}^2(0,1).\tag{3.13}$$

Лемма 3.3. *Пусть операторы* $A^{(\pm)}(k)$ *определены в* (3.12) *и* (3.13). *При* $\varepsilon > 0$ *и* $k \in [-\pi, \pi)$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\bigl\| (g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1} P^{(+)} \\ &\quad - [\varphi_0](A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}]\bigr\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_5 \varepsilon^{-2}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} &\bigl\| (g^{(1)}(k+k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1} P^{(-)} \\ &\quad - [\overline{\varphi_0}](A^{(-)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0]\bigr\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_5 \varepsilon^{-2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Постоянная C_5 *зависит от* k_0, c_0 *и* $\|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}$.

Доказательство. Проверим (3.14); оценка (3.15) устанавливается аналогично. Представим оператор $P^{(+)}$ в виде

$$P^{(+)} = (\cdot, \varphi_0)_{L_2(0,1)} \varphi_0 = [\varphi_0] P_0 [\overline{\varphi_0}],$$

где $P_0 = (\cdot, \mathbf{1})_{L_2(0,1)} \mathbf{1}$ – оператор усреднения по ячейке $(0,1)$. Очевидно,

$$(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1} P_0 = (A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1} P_0.$$

Таким образом,

$$(g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1} P^{(+)} = [\varphi_0](A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1} P_0 [\overline{\varphi_0}],$$

а потому оператор под знаком нормы в (3.14) представляется в виде

$$\begin{aligned} (g^{(1)}(k-k_0)^2+\varepsilon^4)^{-1} P^{(+)} - [\varphi_0](A^{(+}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}] \\ = -[\varphi_0](A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1} P_0^{\perp} [\overline{\varphi_0}]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

С помощью дискретного преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned} &\bigl\| (A^{(+)}(k)+\varepsilon^4 I)^{-1} P_0^{\perp} \bigr\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \\ &\qquad = \sup_{0 \ne m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{g^{(1)}(2\pi m + k - k_0)^2 + \varepsilon^4} \leqslant c_0^{-1/2} (\pi - k_0)^{-1} \varepsilon^{-2}. \end{aligned}$$

Мы учли (2.16) и неравенство $|2\pi m + k - k_0| \geqslant \pi - k_0 > 0$ при $0 \ne m \in \mathbb{Z}$. Отсюда и из (3.16) вытекает искомое неравенство (3.14) с постоянной $C_5 = c_0^{-1/2}(\pi - k_0)^{-1} \|\varphi_0\|^2_{L_\infty(0,1)}$. □

Сопоставляя леммы 3.2 и 3.3, приходим к следующему результату.

Теорема 3.4. *При* $\varepsilon > 0$ *и* $k \in [-\pi, \pi)$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \big\|(B(k) + \varepsilon^4 I)^{-1} - [\varphi_0](A^{(+)}(k) + \varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}] \\ - [\overline{\varphi_0}](A^{(-)}(k) + \varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0]\big\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leqslant C_6 \varepsilon^{-2}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Постоянная $C_6 = C_4 + 2C_5$ *зависит от* k_0, d_0, σ, V, c_0, c_2, c_3 *и* $\|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}$.

3.2. Аппроксимация оператора $(B+\varepsilon^4 I)^{-1}$**.** В силу (2.2) резольвента $(B+\varepsilon^4 I)^{-1}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $(B(k) + \varepsilon^4 I)^{-1}$:

$$(B + \varepsilon^4 I)^{-1} = \mathcal{G}^{-1}\Bigg(\int\limits_{(-\pi,\pi)} \oplus (B(k) + \varepsilon^4 I)^{-1}\, dk\Bigg)\mathcal{G}. \tag{3.18}$$

В $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим пару операторов второго порядка

$$\begin{gathered} A^{(+)} = g^{(1)}(D - k_0)^2, \quad A^{(-)} = g^{(1)}(D + k_0)^2, \\ \operatorname{Dom} A^{(+)} = \operatorname{Dom} A^{(-)} = H^2(\mathbb{R}). \end{gathered}$$

С помощью преобразования Гельфанда оператор $A^{(\pm)}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $A^{(\pm)}(k)$. Учитывая, что при преобразовании Гельфанда оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R})$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях $L_2(0,1)$, получаем

$$\begin{aligned} &[\varphi_0](A^{(+)} + \varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}] \\ &\qquad = \mathcal{G}^{-1}\Bigg(\int\limits_{(-\pi,\pi)} \oplus [\varphi_0](A^{(+)}(k) + \varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}]\, dk\Bigg)\mathcal{G}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} &[\overline{\varphi_0}](A^{(-)} + \varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0] \\ &\qquad = \mathcal{G}^{-1}\Bigg(\int\limits_{(-\pi,\pi)} \oplus [\overline{\varphi_0}](A^{(-)}(k) + \varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0]\, dk\Bigg)\mathcal{G}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Теперь из теоремы 3.4 и разложений (3.18)–(3.20) с учетом унитарности преобразования $\mathcal{G}$ вытекает оценка

$$\|(B+\varepsilon^4 I)^{-1} - [\varphi_0](A^{(+)}+\varepsilon^4 I)^{-1}[\overline{\varphi_0}] \\ - [\overline{\varphi_0}](A^{(-)}+\varepsilon^4 I)^{-1}[\varphi_0]\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_6\varepsilon^{-2}. \tag{3.21}$$

Наконец, учтем очевидные соотношения

$$A^{(+)} = [e^{ik_0x}]g^{(1)}D^2[e^{-ik_0x}], \quad A^{(-)} = [e^{-ik_0x}]g^{(1)}D^2[e^{ik_0x}],$$

и положим

$$\psi_0(x) := e^{ik_0x}\varphi_0(x). \quad x \in \mathbb{R}.$$

Мы приходим к следующему результату.

Теорема 3.5. *При $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\big\|(B+\varepsilon^4 I)^{-1} - [\psi_0]\big(g^{(1)}D^2+\varepsilon^4 I\big)^{-1}[\overline{\psi_0}] \\ - [\overline{\psi_0}]\big(g^{(1)}D^2+\varepsilon^4 I\big)^{-1}[\psi_0]\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_6\varepsilon^{-2}. \tag{3.22}$$

Постоянная C_6 зависит от k_0, d_0, σ, V, c_0, c_2, c_3 и $\|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}$.

§4. Усреднение оператора B_ε

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор B_ε, $\varepsilon > 0$, заданный соотношениями

$$B_\varepsilon = D^4 + \varepsilon^{-4}V^\varepsilon(x), \quad \operatorname{Dom} B_\varepsilon = H^4(\mathbb{R}).$$

Предположим, что функция $V \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ вещественна и 1-периодична; пусть также семейство операторов $B(k)$ в $L_2(0,1)$, определенное в (2.1), удовлетворяет условию **A**. Пусть $\varphi_0(x)$ – периодическое решение задачи (2.10), а $\varphi_1(x)$ – периодическое решение задачи (2.13). Пусть $\psi_0(x) = e^{ik_0x}\varphi_0(x)$. Пусть константа $g^{(1)} > 0$ определена равенством (2.15).

Теорема 4.1. *При сделанных предположениях при* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\Big\|(B_\varepsilon + I)^{-1} - [\psi_0^\varepsilon]\big(\varepsilon^{-2}g^{(1)}D^2 + I\big)^{-1}[\overline{\psi_0^\varepsilon}] - [\overline{\psi_0^\varepsilon}]\big(\varepsilon^{-2}g^{(1)}D^2 + I\big)^{-1}[\psi_0^\varepsilon]\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon^2. \quad (4.1)$$

Здесь константа C *зависит от*

$$k_0,\ d_0,\ \sigma,\ V,\ c_0,\ c_2,\ c_3 \text{ и } \|\varphi_0\|_{L_\infty(0,1)}.$$

Доказательство. Введем семейство унитарных операторов T_ε в $L_2(0,1)$ равенством $T_\varepsilon u(x) = \varepsilon^{1/2}u(\varepsilon x)$. Легко проверить следующие соотношения:

$$B_\varepsilon = \varepsilon^{-4}T_\varepsilon^* B T_\varepsilon, \quad D^2 = \varepsilon^{-2}T_\varepsilon^* D^2 T_\varepsilon, \quad [\psi_0^\varepsilon] = T_\varepsilon^*[\psi_0]T_\varepsilon.$$

Следовательно,

$$(B_\varepsilon + I)^{-1} = \varepsilon^4 T_\varepsilon^*(B + \varepsilon^{-4}I)^{-1}T_\varepsilon,$$

$$[\psi_0^\varepsilon]\big(\varepsilon^{-2}g^{(1)}D^2 + I\big)^{-1}[\overline{\psi_0^\varepsilon}] = \varepsilon^4 T_\varepsilon^*[\psi_0]\big(g^{(1)}D^2 + \varepsilon^4 I\big)^{-1}[\overline{\psi_0}]T_\varepsilon,$$

$$[\overline{\psi_0^\varepsilon}]\big(\varepsilon^{-2}g^{(1)}D^2 + I\big)^{-1}[\psi_0^\varepsilon] = \varepsilon^4 T_\varepsilon^*[\overline{\psi_0}]\big(g^{(1)}D^2 + \varepsilon^4 I\big)^{-1}[\psi_0]T_\varepsilon.$$

Отсюда и из оценки (3.22) с учетом унитарности оператора T_ε вытекает искомая оценка (4.1). $\square$

Результаты работы показывают, что характер поведения резольвенты ДО четвертого порядка с периодическими коэффициентами в пределе малого периода качественно зависит от формы оператора. Для оператора Эйлера–Бернулли A_ε, заданного в факторизованном виде $A_\varepsilon = D^2 g^\varepsilon(x) D^2$, резольвента имеет предел, равный резольвенте некоторого эффективного оператора $A^0 = g^0 D^4$ (см. (1.11)). А для оператора B_ε с сингулярным быстро осциллирующим потенциалом $\varepsilon^{-4}V^\varepsilon(x)$ резольвента предела не имеет и приближается суммой двух резольвент сингулярного оператора второго порядка $\varepsilon^{-2}g^{(1)}D^2$ (с большим множителем ε^{-2}), окаймленных некоторыми быстро осциллирующими множителями. Такого "патологического" поведения резольвенты при усреднении эллиптических операторов второго порядка неизвестно. По-видимому, этот эффект характерен именно для операторов высокого порядка.

Замечание 4.2. Результаты работы сохраняют силу, если заменить условие $V \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ на более слабое ограничение $V \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. В этом случае оператор B_ε, действующий в $L_2(\mathbb{R})$, определяется через замкнутую полуограниченную квадратичную форму

$$b_\varepsilon[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(|D^2 u(x)|^2 + \varepsilon^{-4} V^\varepsilon(x) |u(x)|^2 \right) dx, \quad u \in H^2(\mathbb{R}).$$

Операторы $B(k)$, действующие в $L_2(0,1)$, определяются через квадратичные формы

$$b(k)[u,u] = \int\limits_0^1 \left(|(D+k)^2 u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2 \right) dx, \quad u \in \widetilde{H}^2(0,1).$$

При доказательстве пороговых аппроксимаций (см. п. 2.3) следует использовать другой вариант резольвентного тождества – тождество для операторов, заданных через квадратичные формы с одинаковой областью определения форм. Ради простоты изложения мы ограничились рассмотрением более простого случая, когда $V \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Благодарность. Авторы благодарят А. В. Баданина за консультации по поводу результатов работы [32] и Н. Д. Филонова за полезные обсуждения.

Список литературы

1. A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., 1978.
2. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
3. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.

4. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения.* — Алгебра и анализ **15**, No. 5 (2003), 1–108.
5. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора.* — Алгебра и анализ **17**, No. 6 (2005), 1–104.
6. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$.* — Алгебра и анализ **18**, No. 6 (2006), 1–130.
7. Т. А. Суслина, *Об усреднении периодических параболических систем.* — Функц. анализ и его прил. **38**, No. 4 (2004), 86–90.
8. T. A. Suslina, *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem.* — Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, 2007, pp. 201–233.
9. Е. С. Василевская, *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$.* — Алгебра и анализ **18**, No. 6 (2006), 1–130.
10. T. A. Suslina, *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$.* — Math. Model. Nat. Phenom. **5**, No. 4 (2010), 390–447.
11. В. В. Жиков, *Об операторных оценках в теории усреднения.* — Докл. РАН **403**, No. 3 (2005), 305–308.
12. V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *On operator estimates for some problems in homogenization theory.* — Russ. J. Math. Phys. **12**, No. 4 (2005), 515–524.
13. V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients.* — Russ. J. Math. Phys. **13**, No. 2 (2006), 224–237.
14. В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, *Об операторных оценках в теории усреднения.* — Успехи матем. наук. **71**, No. 3 (2016), 27–122.
15. Н. А. Вениаминов, *Усреднение периодических дифференциальных операторов высокого порядка.* — Алгебра и анализ **22**, No. 5 (2010), 69–103.
16. А. А. Кукушкин, Т. А. Суслина, *Усреднение эллиптических операторов высокого порядка с периодическими коэффициентами.* — Алгебра и анализ **28**, No. 1 (2016), 89–149.
17. А. А. Милослова, Т. А. Суслина, *Усреднение параболических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами.* — Соврем. мат. Фундам. направл. **67**, No. 1 (2021), 130–191.
18. В. А. Слоущ, Т. А. Суслина, *Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами при учете корректоров.* — Функц. анализ и его прил. **54**, No. 3 (2020), 94–99.
19. В. А. Слоущ, Т. А. Суслина, *Операторные оценки при усреднении эллиптических операторов высокого порядка с периодическими коэффициентами.* — Алгебра и анализ **35**, No. 2 (2023), 107–173.

20. С. Е. Пастухова, *Операторные оценки усреднения для эллиптических уравнений четвертого порядка.* — Алгебра и анализ **28**, No. 2 (2016), 204–226.
21. S. E. Pastukhova, *Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators.* — App. Anal. **95**, No. 7 (2016), 1449–1466.
22. С. Е. Пастухова, *L^2-аппроксимация резольвенты в усреднении эллиптических операторов высокого порядка.* — Пробл. мат. анал. **107** (2020), 113–132.
23. С. Е. Пастухова, *Улучшенные L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении операторов четвертого порядка.* — Алгебра и анализ **34**, No. 4 (2022), 74–106.
24. М. Ш. Бирман, *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны.* — Алгебра и анализ **15**, No. 4 (2003), 61–71.
25. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны.* — Записки научных семинаров ПОМИ **318** (2004), 60–74.
26. Т. А. Суслина, А. А. Харин, *Усреднение с учетом корректора для периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны.* — Проблемы математического анализа **41** (2009), 127–141.
27. Т. А. Суслина, А. А. Харин, *Усреднение с учетом корректора для многомерного периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны.* — Проблемы математического анализа **59** (2011), 177–193.
28. A. R. Akhmatova, E. S. Aksenova, V. A. Sloushch, T. A. Suslina, *Homogenization of the parabolic equation with periodic coefficients at the edge of a spectral gap.* — Complex Variables and Elliptic Equations **67**, No. 3 (2022), 523–555.
29. А. А. Мишулович, *Усреднение многомерных периодических уравнений с периодическими коэффициентами на краю внутренней лакуны.* — Записки научных семинаров ПОМИ **516** (2022), 135–175.
30. А. А. Мишулович, В. А. Слоущ, Т. А. Суслина, *Усреднение одномерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **519** (2022), 114–151.
31. Т. А. Суслина, *Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами.* — Успехи матем. наук **78**, No. 6 (2023).
32. A. Badanin, E. Korotyaev, *Spectral asymptotics for periodic fourth-order operators.* — International Mathematics Research Notices **45** (2005), 2775–2814.

33. М. М. Скриганов, *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов.* — Тр. МИАН СССР **171** (1985), 3–122.

Raev A. A., Sloushch V. A., Suslina T. A. Homogenization of a one-dimensional fourth-order periodic operator with a singular potential.

In $L_2(\mathbb{R})$, we consider a fourth-order differential operator B_ε of the form $B_\varepsilon = \frac{d^4}{dx^4} + \varepsilon^{-4}V(x/\varepsilon)$, where $V(x)$ is a real-valued 1-periodic function belonging to $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, and $\varepsilon > 0$ is a small parameter. It is assumed that the point $\lambda_0 = 0$ is the lower edge of the spectrum of the operator $B = \frac{d^4}{dx^4} + V(x)$ and the first band function $E_1(k)$ of the operator B on the period $k \in [-\pi, \pi)$ reaches a minimum at exactly two points $\pm k_0$, $0 < k_0 < \pi$, and behaves like $g^{(1)}(k \mp k_0)^2$, $g^{(1)} > 0$, near these points. The behavior of the resolvent $(B_\varepsilon + I)^{-1}$ for small ε is studied. We obtain approximation for this resolvent in the operator norm with an error $O(\varepsilon^2)$. The approximation is described in terms of the spectral characteristics of the operator B at the bottom of the spectrum.

Институт теоретической и
математической физики,
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Ломоносовский пр., д. 27, корп. 1,
119192, Москва, Россия
E-mail: aleksei.raev@math.msu.ru

Поступило 4 октября 2023 г.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб., д. 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: v.slouzh@spbu.ru
E-mail: t.suslina@spbu.ru