

С. А. Назаров

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОД СОБСТВЕННЫХ  
КОЛЕБАНИЙ В ПЛАСТИНЕ, ЗАГЛУБЛЕННОЙ В  
АБСОЛЮТНО ЖЁСТКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО**

§1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1. Постановка задачи.** Пусть  $\Omega^h = \omega \times (0, h) \ni (y, z)$  – однородная изотропная пластина (рис. 1) с постоянными Ламе  $\lambda \geq 0$  и  $\mu > 0$ , продольное сечение  $\omega$  которой – область на плоскости  $\mathbb{R}^2 \ni y = (y_1, y_2)$ , ограниченная простым гладким (класса  $C^\infty$ ; ср. п. 2 § 6)) замкнутым контуром  $\gamma = \partial\omega$ . Масштабированием сведем длину контура к  $2\pi$ , т.е. сделаем безразмерными декартову систему координат  $x = (x_1, x_2, x_3)$  и все геометрические параметры, в частности, малую относительную толщину пластины  $h \in (0, 1]$ . Пластина  $\Omega^h$  вставлена в паз  $\Omega_\ell^h = \omega \times (0, h\ell)$  относительной глубины  $\ell \in [0, 1]$  в абсолютно жёстком полупространстве и полностью прикреплена к днищу и боковой поверхности паза. При  $\ell = 0$  и  $\Omega_\ell^h = \emptyset$  пластина становится упругой накладкой, но при  $\ell = 1$  и  $\Omega_\ell^h = \Omega^h$  она полностью вмонтирована в полупространство.

Гармонические во времени собственные колебания пластины  $\Omega^h$  с частотой  $\varsigma_h > 0$  описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных

$$L(\nabla_x)u^h(x) := -\mu\Delta_x u^h(x) - (\lambda + \mu)\nabla_x \nabla_x \cdot u^h(x) = \Lambda^h u^h(x), \quad x \in \Omega^h, \quad (1.1)$$

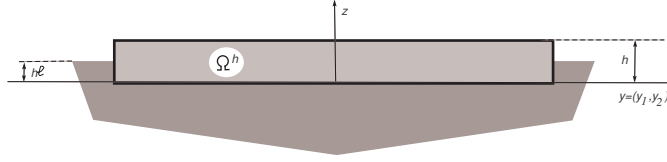
и краевыми условиями в смещениях (Дирихле) и напряжениях (Неймана)

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D^h, \quad (1.2)$$

$$\sigma^{(n)}(u^h; x) = 0, \quad x \in \Gamma_N^h := \partial\Omega^h \setminus \overline{\Gamma_D^h}, \quad (1.3)$$

где  $\nabla_x = \text{grad}$  и  $\nabla_x \cdot = \text{div}$ ,  $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$  – оператор Лапласа,  $\Lambda^h = \varrho\varsigma_h^2$  – спектральный параметр и  $\varrho > 0$  – постоянная плотность материала.

*Ключевые слова:* тонкая изотропная однородная цилиндрическая пластина, жёсткое крепление части поверхности, модели пониженной размерности, локализация мод собственных колебаний.


 Рис. 1. Поперечное сечение пластины  $\Omega^h$  при  $\ell \in (0, 1)$ .

Кроме того,  $\Gamma_D^h$  – закреплённая часть поверхности пластины, состоящая из дна паза  $\Gamma_-^0 = \omega \times \{0\}$  и части его стенки

$$\gamma_\ell^h = \{x \in \gamma^h := \partial\omega \times (0, h); z = x_3 \in (0, h\ell)\}. \quad (1.4)$$

Наконец,  $u^h = (u_1^h, u_2^h, u_3^h)$  – вектор смещений (собственная вектор-функция или мода собственных колебаний), а  $\sigma^{\mathbf{n}}(u^h)$  – вектор нормальных напряжений с декартовыми компонентами

$$\sigma_k^{(\mathbf{n})}(u^h; x) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{n}_j(x) \sigma_{jk}(u^h; x), \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

При этом  $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$  – единичный вектор внешней нормали,  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  на верхнем основании  $\Gamma_+^h = \omega \times \{h\}$  и  $\mathbf{n}_3 = 0$  на боковой поверхности  $\gamma^h$ , а напряжения вычисляются по обычным формулам (см., например, [1])

$$\sigma_{jk}(u^h) = \mu \left( \frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j} \right) + \lambda \delta_{j,k} \left( \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^h}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^h}{\partial x_3} \right), \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (1.6)$$

Здесь  $\delta_{j,k}$  – символ Кронекера, и далее применяем укороченное обозначение  $\partial_j$  для производной  $\partial/\partial x_j$ . Для сокращения формул зависимость от параметра  $\ell$  по возможности не указываем.

Вариационная формулировка задачи (1.1)–(1.3) апеллирует к интегральному тождеству [2, 3]

$$\mathcal{E}(u^h, \psi^h; \Omega^h) = \Lambda^h(u^h, \psi^h)_{\Omega^h} \quad \forall \psi^h \in H_0^1(\Omega^h; \Gamma_D^h)^3. \quad (1.7)$$

Пространство Соболева  $H_0^1(\Omega^h; \Gamma_D^h)$  состоит из функций, обращающихся в нуль на поверхности  $\Gamma_D^h$ ,  $(\cdot, \cdot)_{\Omega^h}$  – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега  $L^2(\Omega^h)$ , скалярном или векторном, а последний верхний индекс 3 в формуле (1.7) указывает количество компонент пробной вектор-функции  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ . Наконец,

$\mathcal{E}(u^h, u^h; \Omega^h)$  – удвоенная упругая энергия, запасённая пластиной  $\Omega^h$ , и  $\mathcal{E}(u^h, \psi^h; \Omega^h)$  – соответствующая билинейная форма:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u^h, u^h; \Omega^h) &= \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega_H^h} \left( \sum_{j,k=1}^3 |\sigma_{jk}(u^h; x)|^2 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \left| \sum_{j=1}^3 \sigma_{jj}(u^h; x) \right|^2 \right) dx \\ &= \int_{\Omega^h} \left( 2\mu \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial u_j^h}{\partial x_j}(x) \right|^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{j,k=1}^3 (1 - \delta_{j,k}) \left| \frac{\partial u_j^h}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j}(x) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left| \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j^h}{\partial x_k}(x) \right|^2 \right) dx, \quad (1.8) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}(u^h, \psi^h; \Omega_H^h) = \frac{1}{4} (\mathcal{E}(u^h + \psi^h, u^h + \psi^h; \Omega_H^h) - \mathcal{E}(u^h - \psi^h, u^h - \psi^h; \Omega_H^h)). \quad (1.9)$$

В силу условия Дирихле (1.2) выполнено неравенство Корна (см. [4], [5, гл. 3] и др.)

$$\begin{aligned} \|\nabla_x u^h; L^2(\Omega_H^h)\|^2 + h^{-2} \|u^h; L^2(\Omega^h)\|^2 &\leq \mathbf{K}_{\ell\omega} \mathcal{E}(u^h, u^h; \Omega^h) \\ \forall u^h &\in H_0^1(\Omega^h; \Gamma_D^h)^3 \end{aligned} \quad (1.10)$$

с не зависящим от параметра  $h \in (0, 1]$  и поля  $u^h \in H_0^1(\Omega^h; \Gamma_D^h)^3$  множителем  $\mathbf{K}_{\ell\omega} > 0$ . Поэтому собственные числа задачи (1.7) (или (1.1)–(1.3) в дифференциальной форме)

$$0 < \Lambda_1^h \leq \Lambda_2^h \leq \Lambda_3^h \leq \dots \leq \Lambda_m^h \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (1.11)$$

удовлетворяют неравенству

$$\Lambda_m^h \geq \mathbf{K}_{\ell\omega}^{-1} h^{-2}, \quad m \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.12)$$

Соответствующие собственные вектор-функции  $u_{(1)}^h, u_{(2)}^h, u_{(3)}^h, \dots, u_{(m)}^h, \dots \in H_0^1(\Omega^h; \Gamma_G^h)^3$  можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{(m)}^h, u_{(p)}^h)_{\Omega^h} = \delta_{m,p}, \quad m, p \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.13)$$

**1.2. Предварительное описание результатов.** В данной работе и в статье [6] рассматриваются постановки задач о деформации тонких тел – упругих накладок и прокладок, которые (постановки) по непонятным причинам ранее не встречались в обширной литературе по теории пластин и плит.

Главная цель работы – изучить поведение при  $h \rightarrow +0$  собственных чисел (1.11) и соответствующих собственных мод, но основное и в достаточной мере неожиданное наблюдение – локализация около кромки пластины мод собственных колебаний в низкочастотном диапазоне спектра для недостаточно глубокого паза. Именно, существует такая критическая относительная глубина  $\ell_* \in (0, 1)$ , что при  $\ell \in [0, \ell_*)$  собственные вектор-функции краевой задачи (1.1)–(1.3) концентрируются в малой окрестности боковой поверхности – они затухают с экспоненциальной скоростью при удалении от  $\gamma^h$ . При  $\ell \in [\ell_*, 1]$  моды  $u_m^h$  собственных колебаний пластины находятся при решении обычной плоской задачи теории упругости с изменённым коэффициентом Пуассона, и поэтому они распределены по всему телу пластины. Отметим, что эти и другие результаты получены в статье на разных уровнях строгости.

Точность той или иной модели деформации тонкой упругой пластины предопределена явлением пограничного слоя, возникающего около её края, закреплённого или свободного от внешних воздействий. В классической теории Кирхгофа [7, 8], справедливой при задании нагрузок на обоих основаниях пластины, феномен пограничного слоя отходит на второй план и проявляется лишь в младших асимптотических членах (см. публикации [9–11] и др.). В задаче (1.1)–(1.3) при определённых условиях пограничный слой приобретает первостепенную важность из-за особых свойств решений модельной двумерной спектральной задачи теории упругости в полубесконечной полосе (далее полуполосе), которая (задача) как раз и описывает его характеристики и основные атрибуты. Такая возможность была предсказана в статье [12] (см. также книгу [13, гл. 16]), однако обнаружена в конкретной задаче теории упругости по-видимому впервые. Именно отсутствие или наличие дискретного спектра у упругой полуполосы определяет тот или иной способ распределения собственных мод в пластине

Локализация колебаний приводит к концентрации напряжений в малых объёмах, которая в свою очередь провоцирует процесс разрушения, реализующийся в рассматриваемой конструкции как отслоение

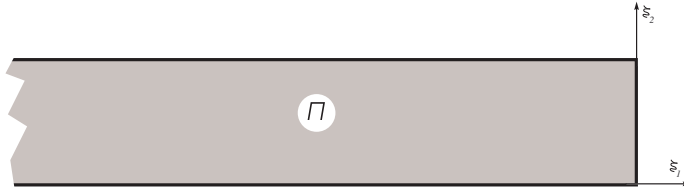


Рис. 2. Полубесконечная полоса  $\Pi$  и растянутые координаты  $\xi_1 = \eta$  и  $\xi_2 = \zeta$ .

пластины от стенок и/или днища паза (ср. публикацию [14]). Полученные результаты, показывают, что для снижения риска повреждений конструкции требуется достаточно глубокое внедрение пластины и особенно тщательная фиксация нижней части  $\gamma_\ell^h$  её боковой поверхности.

В следующих двух пунктах этого параграфа приводятся вывод предельной двумерной системы теории упругости на продольном сечении  $\omega$  и модельных плоской и антиплоской краевых задачах теории упругости в единичной полуполосе (рис. 2)

$$\Pi = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) := (\eta, \zeta) : \eta < 0, \zeta \in (0, 1)\} = \mathbb{R} \times (0, 1). \quad (1.14)$$

Информация о спектральных характеристиках последней задачи приведена в §2, где в частности, найден её непрерывный спектр (нетривиальная теорема 2.1) и проверено существование упомянутой величины  $\ell_* \in (0, 1)$ , для которой дискретный спектр пустой в случае  $\ell \in [\ell_*, 1]$ , но содержит хотя бы одну точку в случае  $\ell \in [0, \ell_*)$ . Именно наличие волн, захваченных упругой полуполосой (1.14), обеспечивает эффект локализации собственных колебаний, установленный в §3 (теоремы 3.3 и 3.4).

В §4 обсуждается постановка краевых условий, замыкающих предельную двумерную систему дифференциальных уравнений на сечении  $\omega$ . При этом первостепенное значение приобретает феномен порогового резонанса (см. работы [15–17]), который, к сожалению, не удалось полностью исследовать в §2, и поэтому приходится рассматривать несколько возможных случаев.

В §5 предпринята попытка построения формальной асимптотики собственных чисел и вектор-функций, поясняющих обнаруженный ранее эффект локализации последних в случае  $\ell \in [0, \ell_*)$ . Из-за отсутствия явных формул для основной собственной моды в  $\Pi$  полученные предельные обыкновенные дифференциальные уравнения на контуре  $\partial\omega$  и на оси  $\mathbb{R}$  оказываются условными, так как включают коэффициенты, знаки которых определить у автора не получилось.

Изъяны асимптотического анализа в §4 и §5 обусловлены тем, что из-за векторного характера модельной задачи теории упругости в полуполосе (1.14) пока не удалось полностью изучить её спектр, а именно, в отличие от скалярной задачи в двумерной задаче остались недоступными формулы для захваченной волны  $w^1$  и кратности дискретного спектра, а также неясным возникновение порогового резонанса (см. п. 4 в §2). Поэтому сопутствующая цель работы – привлечь внимание специалистов по вычислительной механике к нескольким задачам теории упругости, имеющим явный прикладной интерес: автор недоумевает, почему собственные колебания упругих прокладок и накладок, столь часто встречающихся в инженерии и повседневной жизни, не изучались до сих пор.

В §6 собраны замечания, упомянуты доступные обобщения и сформулированы открытые вопросы. Подчеркнём, что подобные вопросы упоминаются на протяжении всей статье.

**1.3. Вывод двумерной модели.** Согласно общей схеме [12], [13, гл. 15 и 16] исследования асимптотики решений краевых задач в тонких областях примем анзацы

$$\Lambda^h = (2h)^{-2}\pi^2\mu + \beta + \dots \tag{1.15}$$

для собственного числа задачи (1.1)–(1.3) и

$$u_j^h(x) = \sin(\pi z/(2h))v_j(y) + h^2V_j(y, h^{-1}z) + \dots, \quad j = 1, 2, \tag{1.16}$$

$$u_3^h(x) = hV_3(h^{-1}z)\nabla_y \cdot v(y) + \dots \tag{1.17}$$

для компонент соответствующей собственной вектор-функции. Здесь многоточие замещает младшие асимптотические члены, не существенные в предпринимаемом формальном анализе, число  $\beta$ , вектор  $v = (v_1, v_2)$  и функции  $V_1, V_2, V_3$  подлежат определению. Подчеркнём, что в принятых анзацах фигурирует первая собственная пара

$\{\mu\pi^2/4; \sin(\pi\zeta/2)\}$  спектральной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\mu\partial_\zeta^2\mathcal{U}_p(\zeta) &= M\mathcal{U}_p(\zeta), \quad p = 1, 2, \\ -(\lambda + 2\mu)\partial_\zeta^2\mathcal{U}_3(\zeta) &= M\mathcal{U}_p(\zeta), \quad \zeta \in (0, 1), \\ \mathcal{U}_p(0) &= 0, \quad \mu\partial_\zeta\mathcal{U}_p(1) = 0, \quad p = 1, 2, \\ \mathcal{U}_3(0) &= 0, \quad (\lambda + 2\mu)\partial_\zeta\mathcal{U}_3(1) = 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

полученной из задачи (1.1)–(1.3) путём растяжения поперечной координаты и выделения главных асимптотических частей дифференциальных операторов, т.е.  $\zeta = z/h$  и  $\partial_\zeta = \partial/\partial z$ .

Подставим формулы (1.15)–(1.17) в систему уравнений (1.1) и краевые условия (1.2) и (1.3) соответственно на нижнем и верхнем основаниях пластины. Собрыв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $h$ , обнаружим, что главные асимптотические члены  $O(h^{-2})$  и  $O(h^{-1})$  невязок в системе уравнений и краевых условиях взаимно уничтожаются. Приняв во внимание члены следующих порядков получим такую скалярную краевую задачу для функции  $V_3$ :

$$\begin{aligned} -(\lambda + 2\mu)\partial_\zeta^2 V_3(\zeta) - \frac{\pi^2}{4}\mu V_3(\zeta) &= (\lambda + \mu)\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right), \quad \zeta \in (0, 1), \\ V_3(0) &= 0, \quad (\lambda + 2\mu)\partial_\zeta V_3(1) = -\frac{\pi}{2}\lambda. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Задача (1.19) однозначно разрешима и её решение принимает вид

$$V_3(\zeta) = \frac{2}{\pi} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}a\zeta\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}a\zeta\right) \right), \quad (1.20)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \text{ и } b = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)\right)^{-1} \left(2a - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)\right). \quad (1.21)$$

Подчеркнём, что  $\cos(\pi a/2) > 0$  в силу ограничения, наложенного на параметр  $a$ .

Продолжим построения. Согласно начатой асимптотической процедуре вектор-функцию  $V = (V_1, V_2)$  следует искать из задачи

$$\begin{aligned} -\mu\partial_\zeta^2 V(y, \zeta) - \frac{\pi^2}{4}\mu V(y, \zeta) &= F(y, \zeta) \\ &:= (\lambda + \mu)\partial_\zeta V_3(\zeta)\nabla_y \nabla_y \cdot v(y) + (\beta v(y) + \mu\Delta_y v(y) \\ &\quad + (\lambda + \mu)\nabla_y \nabla_y \cdot v(y)) \sin\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right), \quad \zeta \in (0, 1), \end{aligned}$$

$$V(y, 0) = 0,$$

$$\mu\partial_\zeta V(y, 1) = G(y) := -\mu\frac{2}{\pi}\left(b\sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)\right)\nabla_y \nabla_y \cdot v(y),$$

которая включает переменные  $y = (y_1, y_2) \in \omega$  как параметр. Поскольку  $\mu\pi^2/4$  – собственное число задачи, у неё появляются два условия разрешимости

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right) F(y, \zeta) d\zeta + G(y) = 0 \in \mathbb{R}^2. \quad (1.22)$$

Выполнив дифференцирование и интегрирование при учёте формулы (1.20) (ср. вычисления в п.2 §2), преобразуем равенство (1.22) в систему дифференциальных уравнений

$$-\mu\Delta_y v(y) - (\lambda + \mu)\nabla_y \nabla_y \cdot v(y) = \beta v(y), \quad y \in \omega, \quad (1.23)$$

с коэффициентом

$$\lambda = \lambda(a) := (\lambda + \mu)\frac{4}{\pi}a\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)\right)^{-1}\left(4a - (1 + 4a^2)\sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)\right) - \mu. \quad (1.24)$$

Уравнения (1.23) образуют систему двумерной теории упругости с постоянными Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ , причём согласно формулам (1.21) сумма  $\lambda + \mu$  положительна при всех допустимых значениях параметра  $a$ , однако сама новая постоянная Ламе (1.24) становится отрицательной при малом  $a > 0$ , так как  $\lambda(0) = -\mu < 0$ .

Напряжения, вычисленные по двумерному вектору смещений  $v = (v_1, v_2)$ , заданы аналогичными (1.6) равенствами

$$\sigma_{jk}(v; y) = \mu(\partial_k v_j(y) + \partial_j v_k(y)) + \lambda\delta_{j,k}\nabla_y \cdot v(y), \quad j, k = 1, 2, \quad (1.25)$$



где теперь  $\partial_j = \partial/\partial y_j$  и  $\nabla_y = (\partial_1, \partial_2)$ . Таким образом, при постановке условия Дирихле

$$v(y) = 0, \quad y \in \partial\omega, \quad (1.26)$$

в интегральном тождестве

$$\mathbf{E}(v, \psi; \omega) = \beta(v, \psi)_\omega \quad \forall \psi \in H_0^1(\omega; \gamma)^2, \quad (1.27)$$

обслуживающем задачу (1.23), (1.26), возникает удвоенный функционал (двумерной) упругой энергии

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(v, \psi; \omega) &= \frac{1}{2\mu} \int_\omega \left( \sum_{j,k=1}^2 |\sigma_{jk}(v; y)|^2 + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left| \sum_{j=1}^2 \sigma_{jj}(v; y) \right|^2 \right) dy \\ &= \int_\omega \left( 2\mu \sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial v_j}{\partial y_j}(y) \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial v_1}{\partial y_2}(y) + \frac{\partial v_2}{\partial y_1}(y) \right|^2 + \lambda \left| \frac{\partial v_1}{\partial y_1}(y) + \frac{\partial v_2}{\partial y_2}(y) \right|^2 \right) dy, \end{aligned} \quad (1.28)$$

для которого ввиду положительности суммы  $\lambda + \mu$  выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(v, v; \omega) &\geq \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \sum_{j,k=1}^2 \|\sigma_{jk}(v); L^2(\omega)\|^2 \\ &\geq \mathbf{k}_\omega^{-1} (\|\nabla_y v; L^2(\omega)\|^2 + \|v; L^2(\omega)\|^2) \end{aligned}$$

с независимым от вектор-функции  $v \in H_0^1(\omega; \gamma)^2$  множителем  $\mathbf{k}_\omega > 0$ . Оно обеспечено неравенствами Коши–Буняковского, Корна и Фридрихса. В итоге видим, что спектр задачи (1.27) является дискретным и образует положительную монотонную неограниченную последовательность нормальных собственных чисел

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \dots \leq \beta_m \leq \dots \rightarrow +\infty. \quad (1.29)$$

Вместе с тем возникает принципиальный вопрос: по какой причине было назначено краевое условие (1.26)? Дело в том, что даже гипотетически условие Дирихле (1.2) на части  $\gamma_\ell^h$  боковой поверхности  $\gamma^h = \partial\omega \times (0, h)$  недостаточно для такого вывода хотя бы потому, что  $\gamma_0^h = \emptyset$ , т.е. оно исчезает полностью при  $\ell = 0$ . Далее в §3 будет показано, что в самом деле условие Дирихле (1.27) возникает обоснованно в плоской предельной задаче только при  $\ell \in (\ell_*, 1]$ , но даже в случаях  $\ell = 0$  и  $\ell = \ell_*$  требуется постановка иных, смешанных краевых условий.

При  $\ell = 1$ , когда условия Дирихле (1.2) распространены на всю боковую поверхность  $\gamma_1^h$  пластины  $\Omega^h$ , дословное повторение рассуждений из работы [6, разд. 5] позволяют получить следующее утверждение

**Предложение 1.1.** *Для любого  $m \in \mathbb{N}$  найдутся такие положительные  $h_m$  и  $c_m$ , что при  $h \in (0, h_m]$  в последовательности (1.11) существует собственное число  $\Lambda_{N^h(m)}^h$  задачи (1.1)–(1.3) с параметром  $\ell = 1$ , для которого выполнена оценка*

$$|\Lambda_{N^h(m)}^h - \mu h^{-2} - \beta_m| \leq c_m h^{1/2}. \quad (1.30)$$

Здесь  $\beta_m$  – собственное число предельной задачи (1.23), (1.26) из упорядоченной последовательности (1.29) и  $N^h(m) \neq N^h(n)$  при  $m \neq n$ , т.е. отображение  $\mathbb{N} \ni m \mapsto N^h(m)$  – инъекция.

К сожалению, из-за усложнённого строения функционала упругой энергии (1.8) и неизвестной зависимости от  $\ell$  множителя  $\mathbf{K}_{\ell\omega}$  в неравенстве Корна (1.10) (см. п. 1 §6) не удалось проверить, что  $N^h(m) = m$ , т.е. установить взаимно однозначное соответствие между членами последовательностей (1.29) и (1.11). Серьёзные проблемы возникли при попытке распространить предложение 1.1 на случай  $\ell \in (\ell_*, 1)$ .

**Замечание 1.1.** В работе [6] при постановке условий Дирихле всюду на границе  $\partial\Omega^h$  был возможен переход от истинной упругой энергии  $\mathcal{E}(u^h, u^h; \Omega^h)$  к так называемой квазиэнергии

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{quasi}}(u^h, u^h; \Omega^h) &= \int_{\Omega^h} \left( \sum_{j=1}^3 |\nabla_x u_j^h(x)|^2 + (\lambda + \mu) |\nabla_x \cdot u^h(x)| \right) dx \\ &\geq \mu \frac{\pi^2}{\pi^2} \|u^h; L_2(\Omega^h)\|^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Именно благодаря последнему неравенству работа [6] содержит исчерпывающие результаты о пластине с полностью закреплённой поверхностью (ср. п. 1, §6).

**1.4. Пограничный слой.** В  $d$ -окрестности  $\mathcal{V}_d$  контура  $\gamma$  введем естественную систему  $(n, s)$  криволинейных координат, где  $n$  – ориентированное расстояние до  $\gamma$ ,  $n < 0$  в  $\omega \cap \mathcal{V}_d$ , а  $s$  – длина дуги, измеренная вдоль контура против часовой стрелки. Проекция на оси  $n, s$  и  $z$  тензора напряжений  $\sigma(u^h)$  с декартовыми компонентами (1.6) принимают вид (см. [1, 18] и др.)

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn}(u^h) &= (\lambda + 2\mu)\partial_n u_n^h + \lambda(J^{-1}(\partial_s u_s^h + \kappa u_n^h) + \partial_z u_z^h), \\
\sigma_{ss}(u^h) &= (\lambda + 2\mu)J^{-1}(\partial_s u_s^h + \kappa u_n^h) + \lambda(\partial_n u_n^h + \partial_z u_z^h), \\
\sigma_{zz}(u^h) &= (\lambda + 2\mu)\partial_z u_z^h + \lambda(\partial_n u_n^h + J^{-1}(\partial_s u_s^h + \kappa u_n^h)), \\
\sigma_{ns}(u^h) &= \sigma_{sn}(u^h) = \mu(\partial_n u_s^h + J^{-1}(\partial_s u_n^h - \kappa u_s^h)), \\
\sigma_{sz}(u^h) &= \sigma_{zs}(u^h) = \mu(J^{-1}\partial_s u_z^h + \partial_z u_s^h), \\
\sigma_{zn}(u^h) &= \sigma_{nz}(u^h) = \mu(\partial_n u_z^h + \partial_z u_n^h).
\end{aligned} \tag{1.32}$$

При этом  $\kappa(s)$  – кривизна контура в точке  $s \in \gamma$ , вообще говоря, переменного знака, т.е. отрицательная на вогнутых участках,  $J(n, s) = 1 + n\kappa(s)$  – якобиан, а проекции вектора смещений  $u^h$  вычисляются по формулам

$$u_n^h = \mathbf{n}_1 u_1^h + \mathbf{n}_2 u_2^h, \quad u_s^h = -\mathbf{n}_2 u_1^h + \mathbf{n}_1 u_2^h, \quad u_z^h = u_3^h, \tag{1.33}$$

где  $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  – единичный вектор внешней нормали к границе области  $\omega \subset \mathbb{R}^2$ . Наконец, в криволинейных координатах система уравнений (1.1) выглядит так:

$$\begin{aligned}
-\partial_n \sigma_{nn}(u^h) - J^{-1}(\partial_s \sigma_{ns}(u^h) + \kappa(\sigma_{nn}(u^h) - \sigma_{ss}(u^h))) - \partial_z \sigma_{nz}(u^h) &= \Lambda^h u_n^h, \\
-\partial_n \sigma_{sn}(u^h) - J^{-1}(\partial_s \sigma_{ss}(u^h) + 2\kappa \sigma_{sn}(u^h)) - \partial_z \sigma_{sz}(u^h) &= \Lambda^h u_s^h, \\
-\partial_n \sigma_{zn}(u^h) - J^{-1}(\partial_s \sigma_{zs}(u^h) + \kappa \sigma_{zn}(u^h)) - \partial_z \sigma_{zz}(u^h) &= \Lambda^h u_z^h.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Для всякой функции, записанной в криволинейных координатах, обозначение не изменяется.

Как обычно, для построения пограничного слоя сделаем растяжение координат

$$n \mapsto \eta = h^{-1}n, \quad z \mapsto \zeta = h^{-1}z, \tag{1.35}$$

но сохраним прежний масштаб для длины дуги  $s$ . В результате растяжения (1.35) и формального перехода к  $h = 0$  пластина  $\Omega^h = \omega \times (0, h)$  трансформируется в множество  $\Pi \times \gamma \ni (\eta, \zeta, s) =: (\xi, s)$ , где  $\Pi$  – упругая полуполоса (1.14). Одновременно система уравнений (1.32) после подходящих замен координат и спектрального параметра  $h^2 \Lambda^h \mapsto M$ , а также выделения главных асимптотических частей дифференциальных операторов и удаления производных по переменной  $s$  превращается в совокупность двумерной системы Ламе

$$-\mu \Delta_\xi w(\xi) - (\lambda + \mu) \nabla_\xi \nabla_\xi \cdot w(\xi) = Mw(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Pi, \tag{1.36}$$

и скалярного уравнения

$$-\mu \Delta_\xi w_s(\xi) = M w_s(\xi), \quad \xi \in \Pi. \quad (1.37)$$

При этом  $w = (w_1, w_2)$  – двумерный вектор (продольных) смещений в  $\omega$  и  $w_s$  – депланация, а  $w_1 = w_n$ ,  $w_2 = w_z$  и  $w_3 = w_s$  – образы компонент (1.33) трёхмерного вектора смещений. Система координат  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  рассматривается как декартова на плоскости, т.е.  $\nabla_\xi = (\partial_1, \partial_2)$  и  $\partial_j = \partial/\partial \xi_j$ , а  $\Delta_\xi$  – оператор Лапласа. Наконец, краевые условия на боковых сторонах  $\varsigma_0 = \mathbb{R}_- \times \{0\}$  и  $\varsigma_1 = \mathbb{R}_- \times \{1\}$  полуполосы (1.14), а также на её торце  $\varpi = \{0\} \times (0, 1)$  наследуются от краевых условий (1.2) и (1.3), а именно, систему (1.36) замыкаем краевыми условиями в смещениях (Дирихле) и напряжениях (Неймана)

$$w(\xi) = 0, \quad \xi \in \varpi_D^\ell := \varsigma_0 \cup \varpi_\ell, \quad (1.38)$$

$$\sigma^{(\mathbf{n})}(w; \xi) = 0, \quad \xi \in \varpi_N^\ell := \varsigma_1 \cup (\varpi \setminus \overline{\varpi_\ell}), \quad (1.39)$$

а уравнение (1.37) – смешанными краевыми условиями

$$w_s(\xi) = 0, \quad \xi \in \overline{\varpi_D^\ell}, \quad (1.40)$$

$$\mu \frac{\partial w_s}{\partial \xi_2}(\xi) = 0, \quad \xi \in \varsigma_0, \quad \mu \frac{\partial w_s}{\partial \xi_1}(\xi) = 0, \quad \xi \in \varpi \setminus \overline{\varpi_\ell}. \quad (1.41)$$

Здесь  $\varpi_\ell = \{\xi : \xi_1 = 0, \xi_2 \in (0, \ell)\}$  – заземлённая часть торца (ср. формулу (1.4)). Кроме того,  $\sigma^{(\mathbf{n})}(w) = (\sigma_{21}(w), \sigma_{22}(w))$  на боковых сторонах полуполосы и  $\sigma^{(\mathbf{n})}(w) = (\sigma_{11}(w), \sigma_{12}(w))$  на её торце, а компоненты тензора двумерных напряжений находятся по аналогичным (1.5), но приспособленным к двумерной задаче формулам

$$\sigma_{jk}(w) = \mu(\partial_k w_j + \partial_j w_k) + \lambda \delta_{j,k} \nabla_\xi \cdot w, \quad j, k = 1, 2.$$

Наконец,  $\sigma_{js}(w_s) = \mu \partial_j w_s$  – касательные напряжения, т.е. (1.36), (1.38), (1.39) и (1.37), (1.40), (1.41) – соответственно плоская и антиплоская задачи теории упругости (см. [1, 18] и др.).

## §2. СПЕКТРЫ ЗАДАЧ В УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЕ

**2.1. Самосопряжённый оператор.** Согласно неравенству Корна (1.10) вариационная формулировка задачи (1.36), (1.38), (1.39), т.е. интегральное тождество [2, 3]

$$E(w, \psi; \Pi) = M(w, \psi)_\Pi \quad \forall \psi \in H_0^1(\Pi; \varpi_D^\ell)^2, \quad (2.1)$$

включает симметричную, положительно определённую и замкнутую в пространстве Соболева  $H^1(\Pi)^2$  билинейную форму

$$E(w, \psi; \Pi) = \frac{1}{4}(E(w + \psi, w + \psi; \Pi) - E(w - \psi, w - \psi; \Pi))$$

(см. определение (1.9)), в которой квадратичный функционал  $E(v, v; \Pi)$  вычисляется по формулам (1.28), (1.25) с заменами  $\omega \mapsto \Pi$  и  $\lambda \mapsto \lambda$ . Таким образом, задаче (2.1) (или (1.36), (1.38), (1.39) в дифференциальной форме) ставится [19, гл. 10, §1] в соответствие самосопряжённый положительно определённый неограниченный оператор  $\mathcal{A}^\ell$  в гильбертовом пространстве  $L^2(\Pi)^2$ , область определения которого шире пространства  $H_0^1(\Pi; \varpi_D^\ell)^2 \cap H^2(\Pi)^2$  из-за сингулярностей напряжений в точке  $P^\ell = (0, \ell)$  смены типа краевых условий на торце (см., например, [18]). В следующих пунктах параграфа будет проверено, что непрерывный спектр этого оператора – луч

$$\wp_c^\ell = [M_\dagger, +\infty) = [\mu\pi^2/4, +\infty) \quad (2.2)$$

а затем приведена информация, впрочем, неполная, о его дискретном спектре  $\wp_d^\ell$ .

Аналогичный оператор можно ввести и для скалярной задачи (1.37), (1.40), (1.41), однако спектральные свойства этой задачи можно изучить элементарными средствами. В самом деле, её непрерывный спектр имеет ту же точку отсечки  $M_\dagger = \mu\pi^2/4$ , что и в соотношении (2.2), так как при  $M \geq M_\dagger$  смешанная краевая задача в целевой полосе  $\mathbb{R} \times (0, 1)$  приобретает ограниченное решение

$$e^{\pm i\eta\sqrt{M-M_\dagger}} \sin(\pi\zeta/2), \quad i = \sqrt{-1},$$

но в случае  $M < M_\dagger$  все аналогичные решения либо растут, либо затухают при  $\eta \rightarrow -\infty$  с экспоненциальной скоростью. Эти факты, обеспеченные методом Фурье, позволяют по привычной схеме построить сингулярную последовательность Вейля оператора в точках  $M \in [M_\dagger, +\infty)$ , а также правый регуляризатор оператора при  $M \in [0, M_\dagger)$  и тем самым установить формулу (2.2) для его существенного спектра, который, разумеется, совпадает с непрерывным.

Пустота дискретного спектра столь же очевидна: если  $M \in [0, M_\dagger)$  – собственное число задачи (1.37), (1.40), (1.41) в полуполосе (1.14), то одномерное неравенство Фридрихса на интервале  $(0, 1) \ni \xi_2$  для соответствующей собственной функции  $w_s \in H_0^1(\Pi; \varpi_D^\ell)$  приводит к

абсурдному соотношению

$$M \|w_s; L^2(\Pi)\|^2 = \mu \|\nabla_\xi w_s; L^2(\Pi)\|^2 \geq \mu \frac{\pi^2}{4} \|w_s; L^2(\Pi)\|^2.$$

**2.2. Непрерывный спектр задачи теории упругости.** Известно (см. первоисточник [20] и, например, монографию [21, гл. 3]), что существенный спектр оператора  $\mathcal{A}^\ell$  эллиптической краевой задачи в полуполосе совпадает с непрерывным и является связным лучом, а точка отсечки  $M_\dagger$  последнего – наименьшее число  $M$ , при котором у краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с каким-либо вещественном параметром  $\theta$

$$-\mu(\partial_2^2 - \theta^2)\mathcal{U}_1 - (\lambda + \mu)i\theta(i\theta\mathcal{U}_1 + \partial_2\mathcal{U}_2) = M\mathcal{U}_1 \text{ на } (0, 1) \ni \xi_2,$$

$$-\mu(\partial_2^2 - \theta^2)\mathcal{U}_2 - (\lambda + \mu)\partial_1(i\theta\mathcal{U}_1 + \partial_2\mathcal{U}_2) = M\mathcal{U}_2 \text{ на } (0, 1) \ni \xi_2, \quad (2.3)$$

$\mathcal{U}_1(0) = \mathcal{U}_2(0) = 0$ ,  $(\lambda + 2\mu)\partial_2\mathcal{U}_2(1) + \lambda i\theta\mathcal{U}_1(1) = \mu i\theta\mathcal{U}_2(1) + \mu\partial_2\mathcal{U}_2(1) = 0$  есть нетривиальное решение  $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ . Соотношения (2.3) получены преобразованием Фурье из системы (1.36) и краевых условий (1.38), (1.39), распространённых на целую полосу  $\mathbb{R} \times (0, 1)$  и её нижнюю и верхнюю стороны соответственно, т.е.  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица. Для точки  $M = \mu\pi^2/4$  искомым решением при  $\theta = 0$  служит вектор-функция

$$\mathcal{U}^0(\xi_2) = e_{(1)} \sin(\pi\xi_2/2), \quad (2.4)$$

так как задача (2.3) принимает вид (1.18). Здесь  $\partial_2 = \partial/\partial\xi_2$  и  $e_{(j)} = (\delta_{j,1}, \delta_{j,2})$  при  $j = 1, 2$ .

При малой величине  $\theta \in \mathbb{R}$  любого знака ищем собственную пару в виде

$$M^\theta = M_\dagger + \theta^2 M'' + O(|\theta|^3), \quad (2.5)$$

$$\mathcal{U}^\theta(\xi_2) = \mathcal{U}^0(\xi_2) + i\theta\mathcal{U}'(\xi_2) + \theta^2\mathcal{U}''(\xi_2) + O(|\theta|^3). \quad (2.6)$$

Подставим анзацы (2.5) и (2.6) в задачу (2.3) и соберем множители при одинаковых степенях малого параметра  $\theta$ . В результате получим для слагаемых  $\mathcal{U}' = (0, \mathcal{U}'_2)$  и  $\mathcal{U}'' = (\mathcal{U}''_1, 0)$  скалярные задачи

$$-(\lambda + 2\mu)\partial_2^2\mathcal{U}'_2 - M_\dagger\mathcal{U}'_2 = (\lambda + \mu)\partial_2\mathcal{U}''_1 \text{ на } (0, 1), \quad (2.7)$$

$$\mathcal{U}''_1(0) = 0, \quad (\lambda + 2\mu)\partial_2\mathcal{U}'_2(1) = -\lambda i\theta\mathcal{U}''_1(1)$$

и

$$-\mu\partial_2^2\mathcal{U}_1'' - M_{\dagger}\mathcal{U}_1'' = M''\mathcal{U}_1^0 - (\lambda + 2\mu)\mathcal{U}_1^0 + (\lambda + \mu)\partial_2\mathcal{U}_2' \text{ на } (0, 1) \ni \xi_2,$$

$$\mathcal{U}_1''(0) = 0, \quad \mu\partial_2\mathcal{U}_1''(1) = \mu\mathcal{U}_2'(1).$$

(2.8)

Решая первую из них, находим, что

$$\mathcal{U}_2'(\xi_2) = \frac{2}{\pi} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi_2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}a\xi_2\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}a\xi_2\right) \right), \quad (2.9)$$

причём  $a$  и  $b$  – величины (1.21). Поскольку  $M_{\dagger}$  – простое собственное число с собственной вектор-функцией (2.4), единственное условие разрешимости задачи (2.8) выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M'' &= M'' \int_0^1 |\mathcal{U}_1^0(\xi_2)|^2 d\xi_2 \\ &= \int_0^1 \mathcal{U}_1^0(\xi_2) \left( (\lambda + 2\mu)\mathcal{U}_1^0(\xi_2) + (\lambda + \mu)\partial_2\mathcal{U}_2'(\xi_2) \right) d\xi_2 \\ &= \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) + \mathcal{I} - \mu\mathcal{U}_2'(1), \quad \text{где } \mathcal{I} = (\lambda + \mu) \int_0^1 \mathcal{U}_1^0(\xi_2)\partial_2\mathcal{U}_2'(\xi_2)d\xi_2. \end{aligned}$$

Применив формулу интегрирования по частям дважды, получим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= -(\lambda + 2\mu) \int_0^1 \frac{d}{d\xi_2} \left( \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi_2\right) \right) \frac{d\mathcal{U}_2'}{d\xi_2}(\xi_2) d\xi_2 - \mu \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi_2\right) \frac{d\mathcal{U}_2'}{d\xi_2}(\xi_2) d\xi_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi_2\right) \left( (\lambda + 2\mu) \frac{d^2\mathcal{U}_2'}{d\xi_2^2}(\xi_2) + M_{\dagger}\mathcal{U}_2'(\xi_2) \right) d\xi_2 \\ &\quad + (\lambda + 2\mu) \frac{2}{\pi} \frac{d\mathcal{U}_2'}{d\xi_2}(0) - \mu\mathcal{U}_2'(1). \end{aligned}$$

Последний интеграл, вычисленный при помощи дифференциального уравнения из задачи (2.7), равен  $-(\lambda + \mu)/2$ . Кроме того, согласно формуле (2.9) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &:= \mathbf{b}(a) = (\lambda + 2\mu) \frac{2}{\pi} \partial_2 \mathcal{U}'_2(0) - 2\mu \mathcal{U}'_2(1) \\ &= (\lambda + 2\mu) \frac{2}{\pi} a(1 + 4a^2) \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} a \right) \right)^{-1} B(a), \end{aligned}$$

где

$$\left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \ni a \mapsto B(a) = \frac{4a}{1 + 4a^2} - \sin \left( \frac{\pi}{2} a \right). \quad (2.10)$$

Функция (2.10) положительна при малом  $a > 0$  и при  $a = 2^{-1/2}$ . Её производная, положительная в точке  $a = 0$ , аннулируется только в одной точке на заданном промежутке, а значит, сама функция положительна на всей области определения. В итоге видим, что  $M^\theta > M_\dagger$  при малом  $\theta \neq 0$ , так как  $M'' = \mu + 2\mathbf{b}(a) > 0$  в представлении (2.5).

Убедимся в том, что при  $M = M_\dagger$ ,  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  или  $M < M_\dagger$ ,  $\theta = 0$  задача (2.3) не имеет нетривиальных решений. Поскольку зависимость её собственных чисел от параметра  $\theta$  непрерывная [22, гл. 7], проверенные факты обеспечивают нужную формулу для точки отсечки  $M_\dagger$ : в силу добытой информации собственное число задачи (2.3) не может появиться ниже этой точки.

Реализуя намеченное, обозначим чертой комплексное сопряжение и умножим дифференциальные уравнения в задаче (2.3) на  $\bar{\mathcal{U}}_1$  и  $\bar{\mathcal{U}}_2$  соответственно, а затем проинтегрируем по  $\xi_2 \in (0, 1)$  при учёте краевых условий. В итоге получаем соотношение

$$M \int_0^1 |\mathcal{U}|^2 d\xi_2 \leq \int_0^1 \left( 2\mu\theta^2 |\mathcal{U}_1|^2 + 2\mu |\partial_2 \mathcal{U}_2|^2 + \mu |\partial_2 \mathcal{U}_1 + i\theta \mathcal{U}_2|^2 \right) d\xi_2. \quad (2.11)$$

При этом ввиду ненужности из второго подынтегрального выражения отброшено слагаемое  $\lambda |i\theta \mathcal{U}_1 + \partial_2 \mathcal{U}_2|^2 \geq 0$ . После несложных вычислений легко проверяемая алгебраическая формула

$$\begin{aligned} \mu |\partial_2 \mathcal{U}_1 + i\theta \mathcal{U}_2|^2 &= \mu(1 - \epsilon^2) |\partial_2 \mathcal{U}_1|^2 + \mu(\epsilon |\partial_2 \mathcal{U}_1| - \epsilon^{-1} |\theta \mathcal{U}_2|)^2 \\ &\quad + \mu(1 - \epsilon^{-2}) |\theta|^2 |\mathcal{U}_2|^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

используемая при  $\epsilon = 2\pi^{-1}|\theta| > 0$ , и неравенство Фридрихса

$$\int_0^1 |\partial_2 \mathcal{U}_j|^2 d\xi_2 \geq \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 |\mathcal{U}_j|^2 d\xi_2 \quad \text{для } \mathcal{U}_j \in H^1(0, 1), \mathcal{U}_j(0) = 0 \quad (2.13)$$



показывают, что правая часть формулы (2.11) превосходит интеграл

$$\mu \left( \frac{\pi^2}{4} + |\theta|^2 \right) \int_0^1 |\mathcal{U}|^2 d\xi_2.$$

Следовательно, при введённых ограничениях на параметры  $M$  и  $\theta$  соотношения (2.11) и (2.2) обеспечивают обращение в нуль вектор-функции  $\mathcal{U}$  всюду на отрезке  $(0, 1)$ , которая тем самым не может быть собственной. Итак, доказано

**Теорема 2.1.** *Непрерывный спектр оператора  $\mathcal{A}^\ell$  задачи (1.36), (1.38), (1.39) имеет вид (2.2) при любом  $\ell \in [0, 1]$ .*

**2.3. Дискретный спектр задачи теории упругости.** Известно, что  $\wp_d^1 = \emptyset$  и  $\wp_d^0 \neq \emptyset$  при постановке на всем торце  $\varpi$  полуполосы (2.2) условий Дирихле (1.38) или Неймана (1.39) соответственно (см. публикации [23, 24] и [14, 25] и др.). Пусть  $\{M_1^\ell; w^{\ell 1}\}$  – первая собственная пара задачи (1.36), (1.38), (1.39) при каком-то  $\ell \in [0, 1)$ , а параметр  $\varepsilon > 0$  мал настолько, что и при  $\ell + \varepsilon$  имеется собственная пара  $\{M_1^{\ell+\varepsilon}; w^{1\ell+\varepsilon}\} \in (0, M_1) \times H_0^1(\Pi; \varpi_D^{\ell+\varepsilon})^2$ . Поскольку  $w^{1\ell+\varepsilon} \in H_0^1(\Pi; \varpi_D^\ell)^2$ , минимальный принцип [19, теорема 10.2.1] показывает, что

$$M_1^\ell = \inf_{w \in H_0^1(\Pi; \varpi_D^\ell)^2 \setminus \{0\}} \frac{E(w, w; \Pi)}{\|w; L^2(\Pi)\|^2} \leq \frac{E(w^{1\ell+\varepsilon}, w^{1\ell+\varepsilon}; \Pi)}{\|w^{1\ell+\varepsilon}; L^2(\Pi)\|^2} = M_1^{\ell+\varepsilon},$$

причём равенство невозможно по причине теоремы о единственности продолжения решений системы Ламе (см. [26, гл. 4]). Следовательно, функция  $\ell \mapsto M_1^\ell$  строго монотонно возрастающая на области своего определения. Перечисленные факты устанавливают

**Предложение 2.2.** *Существует такая критическая относительная глубина паза  $l_* \in (0, 1)$ , что  $\wp_d^\ell = \emptyset$  при  $\ell \geq l_*$ , но дискретный спектр  $\wp_d^\ell$  оператора  $\mathcal{A}^\ell$  задачи (1.36), (1.38), (1.39) непустой при  $\ell \in [0, l_*)$ . Функция  $[0, l_*) \ni \ell \mapsto M_1^\ell$  строго монотонно возрастающая.*

Указанное предложением 2.2 собственное число  $M_1^\ell$ , разумеется, зависит от коэффициента Пуассона  $\nu := \lambda/(2(\lambda + \mu))$ . В следующем утверждении используем обозначение  $M_1^\ell(\lambda/\mu)$ .

**Предложение 2.3.** При фиксированном размере  $\ell \in [0, \ell_*)$  функция  $[0, +\infty) \ni \lambda/\mu \mapsto M_1^\ell(\lambda/\mu)$  строго монотонно возрастающая, и  $M_1^\ell(\lambda/\mu) \rightarrow \mu\pi^2/4$  при  $\lambda/\mu \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Придадим постоянной Ламе  $\lambda$  малое приращение  $\varepsilon\mu > 0$  и обозначим через  $w^{1\ell}(\xi; \varepsilon + \lambda/\mu)$  отвечающую  $M_1^\ell(\varepsilon + \lambda/\mu)$  собственную вектор-функцию задачи (1.36), (1.38), (1.39) с параметрами  $\lambda + \varepsilon\mu$ ,  $\mu$ . Применим ещё раз минимальный принцип [19, теорема 10.2.1]:

$$\begin{aligned} M_1^\ell\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) &= \inf_{w \in H_0^1(\Pi; \varpi_D^\ell) \setminus \{0\}} \frac{E_{\lambda, \mu}(w, w; \Pi)}{\|w; L^2(\Pi)\|^2} \\ &\leq \frac{E_{\lambda, \mu}(w^{1\ell}(\cdot; \varepsilon + \lambda/\mu), w^{1\ell}(\cdot; \varepsilon + \lambda/\mu); \Pi)}{\|w^{1\ell}(\cdot; \varepsilon + \lambda/\mu); L^2(\Pi)\|^2} \\ &\leq \frac{E_{\lambda + \varepsilon\mu, \mu}(w^{1\ell}(\cdot; \varepsilon + \lambda/\mu), w^{1\ell}(\cdot; \varepsilon + \lambda/\mu); \Pi)}{\|w^{1\ell}(\cdot; \varepsilon + \lambda/\mu); L^2(\Pi)\|^2} \\ &= M_1^\ell\left(\varepsilon + \frac{\lambda}{\mu}\right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Нижние индексы у функционала  $E$  указывают значения постоянных Ламе, а знаки  $\leq$  из цепочки (2.14) могут превратиться в знаки  $=$  только при условии  $\nabla_\xi \cdot w^{1\ell}(\cdot; \varepsilon + \lambda/\mu)(\xi) = 0$ , т.е. поле смещений  $w^{1\ell}(\cdot; \varepsilon + \lambda/\mu)$  соленоидальное. В этом случае его компоненты  $w_j^{1\ell}(\cdot; \varepsilon + \lambda/\mu)$ ,  $j = 1, 2$ , суть решения уравнения Гельмгольца с краевыми условиями Дирихле (1.38) и Неймана

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial w_2^{1\ell}}{\partial \xi_2}\left(\xi_1, 1; \varepsilon + \frac{\lambda}{\mu}\right) &= 0, \\ \mu \frac{\partial w_1^{1\ell}}{\partial \xi_2}\left(0, \xi_2; \varepsilon + \frac{\lambda}{\mu}\right) + \mu \frac{\partial w_2^{1\ell}}{\partial \xi_1}\left(0, \xi_2; \varepsilon + \frac{\lambda}{\mu}\right) &= 0, \quad \xi_1 > 0, \\ 2\mu \frac{\partial w_1^{1\ell}}{\partial \xi_1}\left(0, \xi_2; \varepsilon + \frac{\lambda}{\mu}\right) &= 0, \\ \mu \frac{\partial w_1^{1\ell}}{\partial \xi_2}\left(0, \xi_2; \varepsilon + \frac{\lambda}{\mu}\right) + \mu \frac{\partial w_2^{1\ell}}{\partial \xi_1}\left(0, \xi_2; \varepsilon + \frac{\lambda}{\mu}\right) &= 0, \quad \xi_2 \in (\ell, 1). \end{aligned}$$

Теперь получаем, что  $w_1^{1\ell}(\xi; \varepsilon + \lambda/\mu) = 0$  при  $\xi \in \Pi$ , так как  $\partial w_1^{1\ell}/\partial \xi_1 = 0$  и, следовательно,  $w_1^{1\ell} = 0$  на стороне  $\varsigma_1$  полуполосы, а затем и равенство  $w_2^{1\ell}(\xi; \varepsilon + \lambda/\mu) = 0$  всюду на  $\Pi$ .

Осуществим предельный переход при  $\lambda/\mu \rightarrow \infty$ , т.е. при  $\nu \rightarrow 1/2 - 0$ , но для краткости не будем указывать аргумент  $\lambda/\mu$ . С этой целью введём гидростатическое давление

$$p^\ell(\xi) = -(1 - 2\nu)^{-1} \nabla_\xi \cdot w^\ell(\xi), \quad \xi \in \Pi, \quad (2.15)$$

и перепишем систему (1.36) в виде

$$-\Delta_\xi w^\ell(\xi) + \nabla_\xi p^\ell(\xi) = \mu^{-1} M_\infty^\ell w^\ell(\xi), \quad \xi \in \Pi, \quad (2.16)$$

а краевые условия (1.39) – следующим образом:

$$w^\ell(\xi) = 0, \quad \xi \in \overline{\omega}_D^\ell, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} 2(1 - 2\nu) \frac{\partial w_1^\ell}{\partial \xi_1}(\xi_1, 1) - p^\ell(\xi_1, 1) &= 0, \\ \frac{\partial w_1^\ell}{\partial \xi_2}(\xi_1, 1) + \frac{\partial w_2^\ell}{\partial \xi_1}(\xi_1, 1) &= 0, \quad \xi_1 > 0, \\ 2(1 - 2\nu) \frac{\partial w_{\infty 1}^\ell}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) - p^\ell(0, \xi_2) &= 0, \\ \frac{\partial w_{\infty 1}^\ell}{\partial \xi_2}(0, \xi_2) + \frac{\partial w_{\infty 2}^\ell}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) &= 0, \quad \xi_2 \in (\ell, 1). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Теперь в задаче (2.15)–(2.18) можно положить  $\nu = 1/2$ , причём благодаря неизменности непрерывного спектра  $[\mu\pi^2/4, +\infty)$  собственные числа из дискретного спектра имеют пределы при  $\nu \rightarrow 1/2 - 0$ . В итоге получим систему уравнений Стокса, так как равенство (2.15) превращается в дивергентное уравнение

$$\nabla_\xi \cdot w^\ell(\xi) = 0, \quad \xi \in \Pi. \quad (2.19)$$

Вариационная постановка системы (2.16), (2.19) с краевыми условиями (2.17) и

$$p^\ell(\xi) = 0, \quad \frac{\partial w_1^\ell}{\partial \xi_2}(\xi) + \frac{\partial w_2^\ell}{\partial \xi_1}(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Pi \setminus \overline{\omega}_D^\ell. \quad (2.20)$$

сводится к интегральному тождеству (см., например, монографию [27])

$$(\nabla_\xi w^\ell, \nabla_\xi \psi^\ell)_\Pi = \mu^{-1} M(w^\ell, \psi^\ell)_\Pi \quad \forall \psi^\ell \in H_{0\nabla}^1(\Pi)^2 \quad (2.21)$$

и осуществляется на подпространстве  $H_{0\nabla}^1(\Pi)^2 = \{w^\ell \in H_0^1(\Pi)^2 : \nabla_\xi \cdot w^\ell(\xi) = 0, \xi \in \Pi\}$ . В силу неравенства Фридрихса–Пуанкаре (2.13), опирающегося на условие Дирихле (2.17), задача (2.21) (или (2.16),

(2.19), (2.17), (2.20) в дифференциальной форме) не может иметь собственных чисел  $\mu^{-1}M \in (0, \pi^2/4)$ . Остаётся одна возможность:  $\mu^{-1}M_1^\ell(\lambda/\mu) \rightarrow \pi^2/4$  при  $\nu \rightarrow 1/2 - 0$ . Предложение доказано в полном объёме.  $\square$

**2.4. Пороговые резонансы.** Сначала рассмотрим скалярную задачу (1.37), (1.40), (1.41). Согласно определениям из [15, 17] у неё появляется пороговый резонанс в том случае, если у задачи с параметром  $M = M_\dagger := \mu\pi^2/4$  имеется нетривиальное ограниченное решение. Ясно, что при  $\ell = 0$  (пластина  $\Omega^h$  представляет собой накладку; см. п. 1 §1) пороговый резонанс в самом деле реализуется, так как ввиду постановки условия Дирихле только на боковой стороне  $\zeta_0$  нужное решение приобретает простейший (без затухающего на бесконечности остатка) вид

$$w_s(\xi) = \sin(\pi\xi_2/2). \quad (2.22)$$

**Предложение 2.4.** *Пороговый резонанс в задаче (1.37), (1.40), (1.41) реализуется только при  $\ell = 0$ .*

**Доказательство.** Заметим, что (2.22) – отвечающая первому собственному числу  $m^0 = \mu\pi^2/4$  собственная функция оператора  $-\mu\Delta_y$  в квадрате  $(0, 1) \times (0, 1)$  с условием Дирихле на нижней стороне и условиями Неймана на трёх остальных. Если условие Дирихле распространено и на непустой ( $\ell > 0$ ) участок  $\varpi_\ell = \{\xi : \xi_1 = 0, \xi_2 \in (0, \ell)\}$ , то согласно минимальному принципу [19, теорема 10.2.1] первое собственное число  $m^\ell$  полученной задачи удовлетворяет неравенству  $m^\ell > m^0$ . Это наблюдение гарантирует отсутствие порогового резонанса согласно достаточным условиям из работ [16, 28] или первому критерию из работы [29]. Предложение доказано.  $\square$

По терминологии [17] пороговый резонанс в скалярной задаче при  $\ell = 0$  простой и правильный, так как (2.22) – единственное ограниченное решение, не затухающее на бесконечности, т.е. почти стоячая волна.

К сожалению, для векторной задачи получить полный результат не удалось, однако некоторая информация о пороговых резонансах всё-таки доступна. Пусть  $\#\varphi_d^0$  – кратность дискретного спектра задачи (1.36), (1.38), (1.39) при  $\ell = 0$ , т.е. с условием Неймана на всём торце  $\varpi$ . При помощи максиминимального принципа [19, теорема 10.2.2] утверждение о функции  $M_1^\ell$  из предложения 2.2 можно перенести на

все собственные числа из дискретного спектра, а значит, собственные числа  $M_{\#\varphi_d^0}^\ell \geq \dots \geq M_1^\ell$  возрастают при увеличении размера  $\ell$  и “садятся” на порог при некоторых его значениях

$$\ell_*^{(\#\varphi_d^0)} \leq \dots \leq \ell_*^{(1)} = \ell_*. \quad (2.23)$$

Как известно (см. [17, 30] и др.), при критических относительных глубинах паза (2.23) и только при них возникает явление порогового резонанса.

Весьма правдоподобна гипотеза о единственности собственного числа в дискретном спектре  $\varphi_d^0$ , т.е.  $\#\varphi_d^0 = 1$ , для проверки которой согласно известным схемам годятся многие вычислительные методы. В этом случае пороговый резонанс возникает в задаче (1.36), (1.38), (1.39) только для  $\ell = \ell_*$ . Впрочем, в исследовании нуждается само качество порогового резонанса: правильный генерирован почти стоячей волной – решением

$$\begin{aligned} w^\dagger(\xi) &= (w_1^\dagger(\xi), w_2^\dagger(\xi)) = (K_\dagger, 0) \sin(\pi\zeta/2) + \tilde{w}^\dagger(\xi) \\ &= K_\dagger e_{(1)} \sin(\pi\zeta/2) + \tilde{w}^\dagger(\xi) \end{aligned} \quad (2.24)$$

с экспоненциально затухающим на бесконечности остатком  $\tilde{w}^\dagger$  и ненулевым коэффициентом  $K_\dagger$ , или мнимый, порождённый захваченной волной, в которую превращается решение (2.24) при  $K_\dagger = 0$ . Опять-таки существуют приёмы (см. [29, 31]), сводящие выяснение качества порогового резонанса к вычислению некоторых устойчивых дифракционных характеристик задачи.

**Теорема 2.2.** *Если в точке  $\ell = \ell_0 \in [0, 1]$  у задачи (1.36), (1.38), (1.39) нет правильного порогового резонанса, то эта задача при  $M = M_\dagger$  имеет решение, представимое в виде*

$$w_{(1)}^\dagger(\xi) = (\xi_1 + K_\dagger) e_{(1)} \sin(\pi\zeta/2) + V_3(\zeta) e_{(2)} + \tilde{w}_{(1)}^\dagger(\xi), \quad (2.25)$$

где  $e_{(j)}$  – орт оси  $\xi_j$ ,  $K_\dagger$  – некоторый коэффициент, а  $V_3$  – функция (1.20).

**Доказательство.** Согласно результатам [21, гл. 5] у задачи (1.36), (1.38), (1.39) при  $M = M_\dagger$  есть лишь одно (с точностью до постоянного множителя) нетривиальное решение, не затухающее на бесконечности. По определению отсутствия порогового резонанса означает, что такое решение обладает линейным ростом при  $\eta \rightarrow -\infty$ . Вычисления, проведенные в п. 3, §1, в частности, соотношения (1.19), показывают, что

сумма двух первых членов из правой части формулы (2.25) удовлетворяет системе (1.36) в цельной полосе  $\mathbb{R} \times (0, 1)$  и нужным краевым условиям на её сторонах, причём результат из п. 2, §2 гарантирует, что других решений с полиномиальным ростом у указанной задачи нет. Следовательно, решение вида (2.25) действительно существует.  $\square$

### §3. РЕЗУЛЬТАТЫ О ЛОКАЛИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ МОД

**3.1. Экспоненциальное затухание собственных мод.** Пусть  $\Lambda_m^h$  – собственное число задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющее соотношению

$$\Lambda_m^h \in \left( 0, \frac{\mu}{h^2} \left( \frac{\pi^2}{4} - \delta \right) \right) \text{ при } \delta > 0, \quad (3.1)$$

а соответствующая собственная вектор-функция  $u_{(m)}^h$  нормирована в пространстве Лебега  $L^2(\Omega^h)^3$ . Для проверки её локализации в окрестности кромки  $\gamma^h$  пластины  $\Omega^h$  введем кусочно-гладкую непрерывную весовую функцию

$$\mathcal{R}_h^\tau(y) = \begin{cases} e^{\tau\rho(y)/h}, & \rho(y) \in (h, d), \\ e^\tau, & \rho(y) = |n| \leq h, \\ e^{\tau d/h}, & \rho(y) \geq d, \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $\rho(y) = \text{dist}(y, \partial\omega)$ , т.е.  $\rho(y) = -n$  в  $\mathcal{V}_d \cap \omega$ , а  $\tau$  – положительный показатель, подлежащий дальнейшей фиксации. Пусть ещё  $\chi_\omega^h \in C_c^\infty(\bar{\omega})$  – срезающая функция, равная нулю в окрестности  $\mathcal{V}_{h/2}$  и единице вне  $\mathcal{V}_h$ .

Подставим в интегральное тождество (1.7) пробную вектор-функцию  $\psi^h = \mathcal{R}_h^\tau \mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}$ , где  $\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h} = \mathcal{R}_h^\tau u_{(m)}^h$ . Благодаря определению (3.2) обе вектор-функции  $\psi^h$  и  $\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}$  попадают в пространство  $H_0^1(\Omega^h; \Gamma_D^h)^3$ . После несложных преобразований (неоднократное коммутирование градиент-оператора  $\nabla_x$  и весовой функции (3.2)) преобразуем указанное интегральное тождество к виду

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}, \mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; \Omega^h) - \Lambda_m^h \|\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; L^2(\Omega^h)\|^2 = \mathcal{T}^h(\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}). \quad (3.3)$$

При этом в силу очевидных формул

$$\begin{aligned} \nabla_y \mathcal{R}_h^\tau(y) &= 0 \text{ при } \rho(y) \notin [h, d] \text{ и} \\ |\nabla_y \mathcal{R}_h^\tau(y)| &\leq \frac{\tau}{h} \mathcal{R}_h^\tau(y) \text{ при } \rho(y) \in (h, d) \end{aligned} \quad (3.4)$$

для выражения из правой части равенства (3.3) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & |\mathcal{T}^h(\mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h})| \\ & \leq C_{\lambda,\mu} h^{-1} \tau (\|\nabla_y \mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}; L^2(\Omega_{\odot}^h)\| + h^{-1} \tau \|\mathcal{U}_{(m)}^{\tau}; L^2(\Omega_{\odot}^h)\|) \|\mathcal{U}_{(m)}^{\tau}; L^2(\Omega_{\odot}^h)\|^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

в которой  $\Omega_{\odot}^h = \{x \in \Omega^h; \rho(y) > h\}$ , а множитель  $C_{\lambda,\mu}$  не зависит от параметра  $h \in (0, 1]$  и поля  $\mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}$ . Пояснение: упомянутое двукратное коммутирование превращает разность

$$\mathcal{E}(u_{(m)}^h, (\mathcal{R}_h^{\tau})^2 u_{(m)}^h; \Omega^h) - \mathcal{E}(\mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}, \mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}; \Omega^h)$$

в линейную комбинацию интегралов по  $\Omega_{\odot}^h$  произведений  $u_{(m)q}^h \partial_j \mathcal{R}_h^{\tau} \partial_k \mathcal{U}_{(m)p}^{\tau,h}$  и  $u_{(m)p}^h u_{(m)q}^h \partial_j \mathcal{R}_h^{\tau} \partial_k \mathcal{R}_h^{\tau}$ , а именно,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^h} \frac{\partial u_{(m)p}^h}{\partial x_j} \frac{\partial (\mathcal{R}_h^{\tau})^2 u_{(m)q}^h}{\partial x_k} dx \\ & = \int_{\Omega^h} \left( \mathcal{R}_h^{\tau} \frac{\partial u_{(m)p}^h}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{U}_{(m)q}^{\tau,h}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{(m)p}^h}{\partial x_j} \mathcal{U}_{(m)q}^{\tau,h} \frac{\partial \mathcal{R}_h^{\tau}}{\partial x_k} \right) dx \\ & = \int_{\Omega^h} \frac{\partial \mathcal{U}_{(m)p}^{\tau,h}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{U}_{(m)q}^{\tau,h}}{\partial x_k} dx \\ & - \int_{\Omega^h} \left( \frac{\mathcal{U}_{(m)p}^{\tau,h}}{\mathcal{R}_h^{\tau}} \frac{\partial \mathcal{R}_h^{\tau}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{U}_{(m)q}^{\tau,h}}{\partial x_k} - \frac{\mathcal{U}_{(m)q}^{\tau,h}}{\mathcal{R}_h^{\tau}} \frac{\partial \mathcal{R}_h^{\tau}}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{U}_{(m)p}^{\tau,h}}{\partial x_j} + \frac{\mathcal{U}_{(m)p}^{\tau,h}}{\mathcal{R}_h^{\tau}} \frac{\partial \mathcal{R}_h^{\tau}}{\partial x_j} \frac{\mathcal{U}_{(m)q}^{\tau,h}}{\mathcal{R}_h^{\tau}} \frac{\partial \mathcal{R}_h^{\tau}}{\partial x_k} \right) dx, \end{aligned}$$

т.е. для вывода оценки (3.5) достаточно воспользоваться соотношениями (3.4). Наконец,

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{\chi}^h(\mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}) = \mathcal{E}(\mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}, \mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}; \Omega^h) - \mathcal{E}(\chi_{\omega}^h \mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}, \chi_{\omega}^h \mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}; \Omega^h), \\ & |\mathcal{T}_{\chi}^h(\mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h})| \leq C_{\lambda,\mu} (\|\nabla_x \mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}; L^2(\Omega^h \setminus \Omega_{\odot}^h)\|^2 + h^{-2} \|\mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}; L^2(\Omega^h \setminus \Omega_{\odot}^h)\|^2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Лемма 3.1.** Для вектор-функции  $\mathbf{U}_{(m)}^{\tau,h} = \chi_{\omega}^h \mathcal{U}_{(m)}^{\tau,h}$ , обращаемой в нуль на боковой поверхности  $\gamma^h = \partial\omega \times (0, h)$  и нижнем основании  $\Gamma_-^0 = \omega \times \{0\}$  пластины  $\Omega^h$ , выполнены неравенства

$$\mu \|\nabla_x \mathbf{U}_{(m)}^{\tau,h}; L^2(\Omega^h)\|^2 \leq K_{\omega} \mathcal{E}(\mathbf{U}_{(m)}^{\tau,h}, \mathbf{U}_{(m)}^{\tau,h}; \Omega^h), \quad (3.7)$$

$$\mu \frac{\pi^2}{4h^2} \|\mathbf{U}_{(m)}^{\tau,h}; L^2(\Omega^h)\|^2 \leq \mathcal{E}(\mathbf{U}_{(m)}^{\tau,h}, \mathbf{U}_{(m)}^{\tau,h}; \Omega^h). \quad (3.8)$$

**Доказательство.** Первая формула (3.7) – непосредственное следствие неравенства Корна (см., например, [4] и [5, гл. 3]). Проверим вторую формулу.

Продолжим вектор-функцию  $\mathbf{U}_{(m)}^{\tau,h}$  нулём с цилиндра  $\Omega^h$  на слой  $\Xi^h = \mathbb{R}^2 \times (0, h)$  и обозначим через  $\widehat{\mathbf{U}}_{(m)}^{\tau,h}(\theta, z)$  её частичное преобразование Фурье по переменным  $x' = (x_1, x_2)$ ; при этом  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$  – двойственные переменные. Индексы  $h, m$  и  $\tau$  для краткости не пишем. Равенство Парсеваля и формула (1.8) для функционала упругой энергии показывают, что

$$\begin{aligned} 2\pi \mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{U}; \Omega^h) &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^h \left( \mu \sum_{j=1}^2 \left( 2\theta_j^2 |\widehat{\mathbf{U}}_j|^2 + |\partial_z \widehat{\mathbf{U}}_j + i\theta_j \widehat{\mathbf{U}}_3|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\mu |\partial_z \widehat{\mathbf{U}}_3|^2 + \mu |\theta_1 \widehat{\mathbf{U}}_2 + \theta_2 \widehat{\mathbf{U}}_1|^2 + \lambda |i\theta_1 \widehat{\mathbf{U}}_1 + i\theta_2 \widehat{\mathbf{U}}_2 + \partial_z \widehat{\mathbf{U}}_3|^2 \right) d\theta dz \\ &=: \mathbf{J}^h(\mathbf{U}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таким образом, достаточно убедиться в справедливости соотношения

$$\mathbf{J}^h(\mathbf{U}) \geq \mu \frac{\pi^2}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^h \left( \sum_{j=1}^2 |\widehat{\mathbf{U}}_j|^2 + |\widehat{\mathbf{U}}_3|^2 \right) d\theta dz. \quad (3.10)$$

Заметим, что в случае  $|\theta_j| \geq \pi/2$ ,  $j = 1, 2$ , благодаря присутствию первой суммы в правой части равенства (3.9) формула (3.10) очевидна в силу неравенства Фридрикса (при  $k = 3$ )

$$\mu \|\partial_z \widehat{\mathbf{U}}_k; L^2(\Xi^h)\|^2 \geq \mu \frac{\pi^2}{4h^2} \|\partial_z \widehat{\mathbf{U}}_k; L^2(\Xi^h)\|^2. \quad (3.11)$$

В общем случае воспользуемся формулой (2.12) при  $\epsilon(\theta_j) = 2h\pi^{-1}|\theta_j| > 0$  и получим, что

$$\mu |\partial_z \widehat{\mathbf{U}}_j + i\theta_j \widehat{\mathbf{U}}_3|^2 \geq \mu(1 - \epsilon(\theta_j)^2) |\partial_z \widehat{\mathbf{U}}_j|^2 + \mu(1 - \epsilon(\theta_j)^{-2}) |\theta_j \widehat{\mathbf{U}}_3|^2. \quad (3.12)$$



Таким образом, при помощи неравенства Фридрикса (3.11) и соотношений (3.12) выводим оценку

$$\begin{aligned}
& \mathbf{J}^h(\mathbf{U}) \\
& \geq 2\mu \sum_{j=1}^2 \|\theta_j \widehat{\mathbf{U}}_j; L^2(\Xi^h)\|^2 + \mu \sum_{j=1}^2 \|\partial_z \widehat{\mathbf{U}}_j + i\theta_j \widehat{\mathbf{U}}_3 L^2(\Xi^h)\|^2 + 2\mu \|\partial_z \widehat{\mathbf{U}}_3 L^2(\Xi^h)\|^2 \\
& \geq \mu \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^h \left( 2|\theta_j|^2 |\widehat{\mathbf{U}}_j|^2 + \left(1 - \frac{4h^2}{\pi^2} |\theta_j|^2\right) |\partial_z \widehat{\mathbf{U}}_j|^2 \right) d\theta dz \\
& \quad + \mu \int_0^h \left( 2|\partial_z \widehat{\mathbf{U}}_3| + \left(1 - \frac{\pi^2}{4h^2 |\theta_j|}\right) |\theta_j|^2 |\widehat{\mathbf{U}}_3|^2 \right) d\theta dz \\
& \geq \mu \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^h \left( |\theta_j|^2 + \frac{\pi^2}{4h^2} \right) |\widehat{\mathbf{U}}_j|^2 d\theta dz + \mu \int_0^h \left( \frac{\pi^2}{4h^2} + \sum_{j=1}^2 |\theta_j|^2 \right) |\widehat{\mathbf{U}}_3|^2 d\theta dz.
\end{aligned}$$

Нужное соотношение (3.10) проверено. Лемма 3.1 доказана.  $\square$

Перепишем равенство (3.3) в виде

$$\begin{aligned}
& \Lambda_m^h \|\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; L^2(\Omega^h \setminus \Omega_{\odot}^h)\|^2 + \mathcal{T}_x^h(\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}) \\
& = \mathcal{E}(\chi_{\omega}^h \mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}, \chi_{\omega}^h \mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; \Omega^h) - \Lambda_m^h \|\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; L^2(\Omega_{\odot}^h)\|^2 + \mathcal{T}^h(\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}).
\end{aligned}$$

Согласно формулам (1.7), (1.10), (1.13) и (3.1), (3.6) левая часть не превосходит  $c_{m,t} h^{-2}$ . Для всех  $\epsilon > 0$  правая часть при учёте формул (3.8), (3.7) и (3.5) оценивается снизу величиной

$$\begin{aligned}
& \mu \epsilon K_{\omega}^{-1} \|\nabla_x \mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; L^2(\Omega_{\odot}^h)\|^2 \\
& \quad + (\mu \pi^2 (2h^{-2} (1 - \epsilon) - \Lambda_m^h) \|\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; L^2(\Omega_{\odot}^h)\|^2 - |\mathcal{T}^h(\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h})|,
\end{aligned}$$

причём

$$|\mathcal{T}^h(\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h})| \leq \mu \epsilon (2K_{\omega})^{-1} \|\nabla_x \mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; L^2(\Omega_{\odot}^h)\| + C_{\mathcal{T}} \epsilon^{-1} \tau^2 h^{-2} \|\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; L^2(\Omega_{\odot}^h)\|^2.$$

Теперь воспользуемся предположением (3.1) и, зафиксировав  $\epsilon > 0$  и  $\tau > 0$  малыми, обнаружим, что

$$h^2 \|\nabla_x \mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; L^2(\Omega_{\odot}^h)\|^2 + \|\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; L^2(\Omega_{\odot}^h)\|^2 \leq C_m. \quad (3.13)$$

Сформулируем утверждение, гарантирующее экспоненциальное затухание мод собственных колебаний при удалении от боковой поверхности пластины.

**Теорема 3.3.** *Для нормированной в пространстве  $L^2(\Omega^h)^3$  собственной вектор-функции  $u_{(m)}^h$  задачи (1.1)–(1.3), отвечающей собственному числу (3.1), выполнено неравенство*

$$h^2 \|\mathcal{R}_h^\tau \nabla_x u_{(m)}^h; L^2(\Omega^h)\|^2 + \|\mathcal{R}_h^\tau u_{(m)}^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \leq c_m \text{ при } h \in (0, h_m], \quad (3.14)$$

где  $\mathcal{R}_h^\tau$  – весовая функция (3.2), а величины  $c_m$  и  $h_m > 0$  не зависят от малого параметра  $h$ .

**Доказательство.** Осталось заметить, что оценка (3.14) с заменой  $\Omega^h \mapsto \Omega_\otimes^h$  вытекает из соотношения (3.13) и второй формулы (3.4), а равномерная ограниченность суммы

$$h^2 \|\nabla_x \mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; L^2(\Omega^h \setminus \Omega_\otimes^h)\|^2 + \|\mathcal{U}_{(m)}^{\tau, h}; L^2(\Omega^h \setminus \Omega_\otimes^h)\|^2$$

обеспечена нормировкой (1.13) собственных функций и оценкой  $\Lambda_m^h \leq \mu\pi^2/4h^2$ .  $\square$

**3.2. Начальные члены последовательности  $\{\Lambda_m^h\}_{m \in \mathbb{N}}$ .** Собственные числа задачи (1.1)–(1.3) при любом  $\ell \in (0, 1)$  удовлетворяют неравенству (1.12). Убедимся в том, что для всякого  $\delta > 0$  существует такое  $h_\delta > 0$ , что при  $h \in (0, h_\delta]$  в последовательности (1.11) найдётся заданное наперёд количество членов (3.1).

Поскольку билинейная форма (1.8) симметрична, положительно определена и замкнута в пространстве  $H_0^1(\Omega^h; \Gamma_D^h)^3$ , задаче (1.7) (или (1.1)–(1.3) в дифференциальной постановке) ставится в соответствие [19, гл.10, §1] неограниченный самосопряжённый положительно определённый оператор  $\mathcal{A}^h$  в пространстве  $L^2(\Omega^h)^3$ . Дискретный спектр (1.11) этого оператора вычисляются при помощи максиминимального принципа (см., например, [19, теорема 10.2.2])

$$\Lambda_m^h = \max_{\mathcal{L}_m^h} \inf_{\psi^h \in \mathcal{L}_m^h \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{E}(\psi^h, \psi^h; \Omega^h)}{\|\psi^h; L^2(\Omega^h)\|^2}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

Здесь  $\mathcal{L}_m^h$  – любое подпространство в  $H_0^1(\Omega^h; \Gamma_D^h)^3$  с коразмерностью  $m - 1$ , т.е.  $\mathcal{L}_1^h = H_0^1(\Omega^h; \Gamma_D^h)^3$ .

Для каждого  $m \in \mathbb{N}$  выделим на границе  $\gamma$  сечения  $\omega$  непустые попарно непересекающиеся (связные) дуги  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ . Для нетривиальных функций  $\phi_k \in C_c^\infty(\gamma_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , зададим проекции вектор-функций  $\Phi_{(k)}^h$  на оси  $n$ ,  $z$  и  $s$  равенствами

$$\begin{aligned}\Phi_{(k)n}^h(x) &= \chi_d(y)\phi_k(s)w_1^1(h^{-1}n, h^{-1}z), \\ \Phi_{(k)z}^h(x) &= \chi_d(y)\phi_k(s)w_2^1(h^{-1}n, h^{-1}z), \quad \Phi_{(k)s}^h(x) = 0.\end{aligned}$$

Здесь  $\chi_d \in C^\infty(\bar{\omega})$  – срезающая функция,

$$\chi_d(y) = 0 \text{ при } \text{dist}(y, \gamma) > d, \quad \chi_d(y) = 1 \text{ при } \text{dist}(y, \gamma) < d/2, \quad 0 \leq \chi_d \leq 1.$$

и, как обычно,  $w^1$  – собственная вектор-функция задачи (1.36), (1.38), (1.39), отвечающая собственному числу  $M_1 < M_\dagger$  и нормированная в пространстве  $L^2(\Pi)^2$ . В силу тождества (2.1) при  $\psi = w^1$  и  $M = M_1$  имеем

$$\begin{aligned}\|\Phi_{(k)}^h; L^2(\Omega^h)\| &= \int_{\partial\omega-d}^0 \int_0^h |\chi_d(y)|^2 |\phi_k(s)|^2 \left| w^1\left(\frac{n}{h}, \frac{z}{h}\right) \right|^2 J(n, s) dn dz ds \\ &= h^2 \|\phi_k; L^2(\gamma_k)\|^2 (\|w^1; L^2(\Pi)\|^2 + O(h)) \\ &= h^2 \|\phi_k; L^2(\gamma_k)\|^2 (1 + O(h)), \\ \mathcal{E}(\Phi_{(k)}^h, \Phi_{(k)}^h; \Omega^h) &= \|\phi_k; L^2(\gamma_k)\|^2 (E(w^1, w^1; \Pi) + O(h)) \\ &= \|\phi_k; L^2(\gamma_k)\|^2 (M_1 \|w^1; L^2(\Pi)\|^2 + O(h)) \\ &= \|\phi_k; L^2(\gamma_k)\|^2 (M_1 + O(h)).\end{aligned}\tag{3.16}$$

При этом учтены экспоненциальное затухание моды  $w^1$  и представление  $J(n, s) = 1 + O(|n|)$  якобиана.

Положив  $\Psi_{(k)}^h = \|\Phi_{(k)}^h; L^2(\Omega^h)\|^{-1} \Phi_{(k)}^h$ , получим набор ортонормированных в  $L^2(\Omega^h)^3$  пробных вектор-функций  $\Psi_{(1)}^h, \dots, \Psi_{(m)}^h$ , причём в силу соотношений (3.16) всякая их линейная комбинация  $\Psi^h = a_1^h \Psi_{(1)}^h + \dots + a_m^h \Psi_{(m)}^h$  со столбцом коэффициентов  $(a_1^h, \dots, a_m^h)$ , нормированным в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^m$ , удовлетворяет оценке

$$\mathcal{E}(\Psi^h, \Psi^h; \Omega^h) \leq (M_1 h^{-2} + C_m h^{-1}) \|\Psi^h; L^2(\Omega^h)\|^2.\tag{3.17}$$

Более того, любое подпространство  $\mathcal{L}_m^h \subset H_0^1(\Omega^h; \Gamma_D^h)^3$  с коразмерностью  $m - 1$  содержит свою нетривиальную линейную комбинацию

$\Psi_{(\mathcal{L}_m^h)}^h$ . В результате выводим из формул (3.15) и (3.17) соотношение

$$\Lambda_m^h \leq \max_{\mathcal{L}_m^h} \frac{\mathcal{E}(\Psi_{(\mathcal{L}_m^h)}^h, \Psi_{(\mathcal{L}_m^h)}^h; \Omega^h)}{\|\Psi_{(\mathcal{L}_m^h)}^h; L^2(\Omega^h)\|^2} \leq \frac{M_1}{h^2} + \frac{C_m}{h}.$$

Сформулируем установленный факт.

**Теорема 3.4.** *Для всяких  $\delta > 0$  и  $m \in \mathbb{N}$  найдётся такая положительная величина  $h_{\delta m}$ , что при  $h \in (0, h_{\delta m}]$  собственные числа  $\Lambda_1^h, \dots, \Lambda_m^h$  задачи (1.1)–(1.3) подчинены неравенству (3.1), т.е. расположены ниже нормированной точки отсечки  $h^{-2}M_{\dagger}$  из §2.*

#### §4. О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

**4.1. Обсуждение.** Как показывают теоремы 3.4 и 3.3, появление точки  $M_1^\ell$  дискретного спектра  $\wp_d^\ell$  у модельной задачи (1.36), (1.38), (1.39) обеспечивает локализацию собственных мод исходной задачи (1.1)–(1.3) в низкочастотном диапазоне её спектра. Именно проверенная в предложении 2.2 пустота дискретного спектра  $\wp_d^\ell$  при  $\ell > \ell_*$  указывает на правильность постановки условия Дирихле (1.26) для предельной двумерной системы (1.23). В случае  $\ell < \ell_*$  формальный вывод предельных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих низкочастотный диапазон спектра, представлен в §5. Однако и в этом случае существуют собственные числа  $\Lambda_{N^h(m)}^h$  задачи (1.1)–(1.3) из среднечастотного диапазона, приобретающие асимптотику

$$\lambda_{N^h(m)}^\varepsilon = \mu\pi^2(2h)^{-2} + \beta_m + \dots, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

в которой фигурируют собственные числа (1.29) системы (1.23) с некоторыми краевыми условиями на контуре  $\partial\omega$ . Собственные числа (4.1) расположены выше нормированной точки отсечки  $h^{-2}M_{\dagger}$  и из-за наполненности интервала  $(0, \mu\pi^2(2h)^{-2})$  собственными числами одномерных предельных задач (ср. теорему 3.4) номера  $N^h(m)$  таких собственных чисел в последовательности (1.11) не определяются и, более того, они неограниченно возрастают при  $h \rightarrow +0$ . Вместе с тем обоснование подобных асимптотических формул упрощается до привычного применения упоминавшейся леммы о “почти собственных” числах и векторах (см. первоисточник [32] и ср. её применение в [6]).

Краевые условия, замыкающие систему (1.23), изменяются при варьировании параметра  $\ell \in [0, \ell_*]$ . Способ их вывода, основанный на методе сращиваемых асимптотических разложений (см. [33, 34], [13, гл. 2] и др.) и учитывающий явление порогового резонанса, изложен в очередных пунктах параграфа. Отметим статью [16], в которой разработан сходный алгоритм постановки условий сопряжения в узлах конечных решёток тонких квантовых и акустических волноводов.

**4.2. Отсутствие пороговых резонансов.** Сначала рассмотрим ситуацию общего положения: при каком-то  $\ell \in (0, \ell_*)$  в обеих задачах (1.36), (1.38), (1.39) и (1.37), (1.40), (1.41) пороговых резонансов нет. В этом случае правильными краевыми условиями для системы (1.23) служат условия Дирихле (1.26). Поясним этот факт при помощи метода сращиваемых асимптотических разложений. Формула Тейлора

$$v(y) = v(0, s) + n\partial_n v(0, s) + O(n^2) = v(0, s) + h\eta\partial_n v(0, s) + O(h^2\eta^2) \quad (4.2)$$

для гладкого решения  $v \in C^2(\overline{\omega})^2$  системы (1.23) показывает, что главный член – след  $v(0, \cdot) \in C^2(\gamma)^2$  поля  $v$  на контуре  $\gamma$  – нужно срастить с какими-то решениями упомянутых однородных задач в полуполосе  $\Pi$ , однако по предположению при  $M = M_{\dagger}$  ограниченных решений у них нет, а значит, названный след должен быть нулевым, что и написано в формуле (1.26).

**4.3. Пороговые резонансы.** Рассмотрим три возможных случая.

(i) Пусть сначала при  $\ell \in (0, \ell_*]$  у задачи (1.36), (1.38), (1.39) при  $M = M_{\dagger}$  имеется решение (2.24) с ненулевым коэффициентом  $K_{\dagger}$  (пороговый резонанс правильный). Тогда процедура сращивания внешнего разложения (4.2) предписывает компонентам главного члена внутреннего разложения собственной вектор-функции

$$u^h(x) = Z^0(\xi, s) + hZ^1(\xi, s) + \dots, \quad (4.3)$$

следующие выражения:

$$Z^{0r}(\xi, s) := (Z_n^0(\xi, s), Z_z^0(\xi, s)) = v_n(0, s)K_{\dagger}^{-1}w^{\dagger}(\xi), \quad Z_s^0(\xi, s) = 0. \quad (4.4)$$

Здесь  $w^{\dagger}$  – вектор-функция (2.24), а последнее равенство вытекает из предложения 2.4. Таким образом, компонента  $v_n(0, s)$  может быть любой, но на границе сечения  $\omega$  следует назначить условие

$$v_s(y) = 0, \quad y \in \gamma, \quad (4.5)$$

так как у скалярной задачи порогового резонанса нет при  $\ell > 0$ . Общие результаты [35] по асимптотическому анализу формально самосопряжённых эллиптических краевых задач в тонких областях показывают, что дополняющее (4.5) краевое условие – скалярное условие в напряжениях, парное (естественное по терминологии [36]) в смысле формулы Грина для отвергнутого (устойчивого по терминологии [36]) условия Дирихле  $v_n = 0$ , а именно,

$$\sigma_{nn}(v; y) := (\lambda + 2\mu)\partial_n v_n(0, s) + \lambda(\partial_s v_s(0, s) + \kappa(s)v_n(0, s)) = 0, \quad y \in \gamma. \quad (4.6)$$

Здесь и далее  $\sigma_{nn}(v)$  и  $\sigma_{ns}(v)$  – проекции тензора напряжений на оси криволинейных координат (ср. п. 4, §1 и формулы (1.32)).

(ii) Пусть теперь  $\ell = 0$ , т.е.  $\Omega^h$  – упругая накладка, а у скалярной задачи (1.37), (1.40), (1.41) есть ограниченное решение (2.22). Если в векторной задаче (1.36), (1.38), (1.39) правильного порогового резонанса нет, то по прежним причинам следует назначить пару условий

$$v_n(y) = 0, \quad y \in \gamma, \quad (4.7)$$

$$\sigma_{ns}(v; y) := \mu(\partial_n v_s(0, s) + \partial_s v_n(0, s) - \kappa(s)v_s(0, s)) = 0, \quad y \in \gamma, \quad (4.8)$$

которые принято называть линеаризованными условиями Синьорини (идеальный контакт упругого тела и абсолютно жёсткого профиля без трения).

**Замечание 4.2.** Вывод краевых условий (4.6) и (4.8) можно провести и на основе процедуры сращивания. Продемонстрируем это на более простом примере последнего краевого условия. В силу формулы Тейлора (4.2) и по причине отсутствия порогового резонанса у векторной задачи компонента  $Z_3^0 = Z_s^0$  главного члена анзаца (4.3) принимает вид

$$Z_3^0(\xi, s) = e_{(3)} v_s(0, s) \sin(\pi\xi/2),$$

а компоненты  $Z_1^0 = Z_n^0$  и  $Z_2^0 = Z_z^0$  обращаются в нуль. При этом согласно выражению (1.32) для напряжения  $\sigma_{ns}(u^h)$  компоненту  $Z_3^1$  следующего члена нужно искать из задачи

$$-\mu\Delta_\xi Z_3^1(\xi, s) = \mu\frac{\pi^2}{4}Z_3^1(\xi, s), \quad \xi \in \Pi,$$

$$Z_3^1(\xi_1, 0, s) = 0, \quad \xi_1 > 0,$$

$$-\mu\partial_2 Z_3^1(\xi_1, 1, s) = 0, \quad \xi_1 > 0,$$

$$-\mu\partial_1 Z_3^1(0, \xi_2, s) = \mu\kappa(s)v_s(0, s) \sin(\pi\zeta/2), \quad \xi_2 \in (0, 1),$$

с асимптотическим условием на бесконечности

$$Z_3^1(\xi, s) = (\xi_1\partial_n v_s(0, s) + C_3^1(s)) \sin(\pi\zeta/2) + O(e^{\pi\sqrt{3}\xi_1}) \text{ при } \xi_1 \rightarrow -\infty.$$

Как обычно, условие разрешимости такой задачи получается применением формулы Грина в длинном прямоугольнике  $\Pi(R) = \{\xi \in \Pi : \eta > -R\}$  при  $R \rightarrow +\infty$ , принимает вид равенства

$$\mu(\partial_n v_s(0, s) - \kappa(s)v_s(0, s)) = 0, \quad s \in \partial\omega,$$

и не отличается от условия (4.8) в силу условия Дирихле (4.7).  $\boxtimes$

При наличии правильного порогового резонанса у упругой полуполосы  $\Pi$  в случае  $\ell = 0$  пара краевых условий (4.6) и (4.8), происходящая от процедуры сращивания и результатов [35], превращаются в классические условия свободного края

$$\sigma^{(n)}(v; y) = 0, \quad y \in \gamma.$$

Впрочем, если пороговый резонанс мнимый, т.е.  $K_{\dagger} = 0$  у решения (2.24), которое тем самым становится захваченной волной, то возможность срастить с ограниченной волной (4.4) исчезает, а значит, искомая пара краевых условий принимает вид (4.5), (4.6).

(iii) Пусть при  $\ell = \ell_*$  у задачи теории упругости (1.36), (1.38), (1.39) реализуется правильный пороговый резонанс. Согласно предложению 2.4 пороговый резонанс в скалярной задаче отсутствует. Следовательно, краевые условия, замыкающие систему (1.23) принимают вид (4.5), (4.6). Если случилось, что обсуждаемый пороговый резонанс отсутствует или оказывается мнимым, то опять получаем краевые условия (4.5) и (4.7), т.е. векторное условие Дирихле (1.26).

Точно такие же выводы можно сделать при наличии нескольких (положительных) точек (2.23), в которых реализуется пороговый резонанс у задачи (1.36), (1.38), (1.39) (ср. п. 4, §2).

В каждой из рассмотренных ситуаций справедливо похожее на предложение 1.1 утверждение, т.е. формальному анзацу (4.1) можно придать вид оценки (1.30), однако ввиду понятности, но громоздкости формулировок делать это не будем.

§5. НЕДОСТАТОЧНО ГЛУБОКИЙ ПАЗ – ПОПЫТКА  
ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ

**5.1. Асимптотические расщепления дифференциальных операторов.** Как обычно, для описания явления пограничного слоя около края пластины понадобятся разложения  $(3 \times 3)$ -матриц дифференциальных операторов

$$L^h(n, z, s, \partial_n, \partial_z, \partial_s) \text{ и } B^{h+}(n, s, \partial_n, \partial_z, \partial_s), B^{h0}(s, \partial_n, \partial_z, \partial_s) \quad (5.1)$$

из левых частей системы (1.1) в цилиндре  $\Omega^h$  и краевых условий (1.3) на верхнем основании  $\Gamma_+^h$  и части боковой поверхности  $\gamma_\ell^h$ . Операторы (5.1) действуют на вектор  $(u_n^h, u_z^h, u_s^h)$ , записанный в системе криволинейных координат  $(n, z, s)$ . После введения растянутых координат (1.35) получаем для первого оператора (5.1) при учёте соотношений (1.34) и (1.32) следующее расщепление:

$$L^h(n, z, s, \partial_n, \partial_z, \partial_s) = h^{-2}L^0(\partial_\eta, \partial_\zeta) + h^{-1}L^{(1)}(s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) + L^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) + \dots \quad (5.2)$$

При этом

$$L^0(\partial_\eta, \partial_\zeta) = - \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_\eta^2 + \mu\partial_\zeta^2 & (\lambda + \mu)\partial_\eta\partial_\zeta & 0 \\ (\lambda + \mu)\partial_\zeta\partial_\eta & (\lambda + 2\mu)\partial_\zeta^2 + \mu\partial_\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\partial_\eta^2 + \mu\partial_\zeta^2 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

$$L^{(1)}(s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) = - \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\eta & 0 & (\lambda + \mu)\partial_s\partial_\eta \\ (\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\zeta & \mu\kappa(s)\partial_\eta & (\lambda + \mu)\partial_s\partial_\zeta \\ (\lambda + \mu)\partial_\eta\partial_s & (\lambda + \mu)\partial_\zeta\partial_s & -\mu\kappa(s)\partial_\eta \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$L^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) = \begin{pmatrix} -\mu\partial_s^2 + 2(\lambda + \mu)\kappa(s)^2\eta\partial_\eta - 2\mu\kappa(s)^2 & 0 & L_{ns}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) \\ (\lambda + \mu)\kappa(s)^2\eta\partial_\zeta & -\mu\partial_s^2 + \mu\kappa(s)^2\eta\partial_\eta & L_{zs}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) \\ L_{sn}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) & L_{sz}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) & L_{ss}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

В дальнейших вычислениях востребованы не будут следующие скалярные дифференциальные операторы из матрицы (5.5):

$$L_{ns}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) = 2(\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\eta\partial_s + (\lambda + \mu)\kappa(s)\eta\partial_s - \mu\partial_s\kappa(s),$$

$$L_{sn}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) = -(\lambda + 2\mu)\partial_s\kappa(s) + (\lambda + \mu)\kappa(s)\eta\partial_\eta\partial_s - \mu\kappa(s)\partial_s,$$



$$L_{zs}^{(2)}(\eta, s, \partial_z, \partial_s) = (\lambda + \mu)\kappa(s)\eta\partial_\zeta\partial_s, \quad L_{sz}^{(2)}(\eta, s, \partial_\zeta, \partial_s) = (\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\zeta\partial_s,$$

$$L_{ss}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) = -(\lambda + 2\mu)\partial_s^2 + \mu\kappa(s)^2\eta\partial_\eta + \mu\kappa(s)^2.$$

Для матрицы-функции  $B^{h+}u^h = (\sigma_{zn}(u^h), \sigma_{zz}(u^h), \sigma_{zs}(u^h))$  члены расщепления

$$B^{h+}(n, z, s, \partial_n, \partial_z, \partial_s) = h^{-1}B^{0+}(\partial_\eta, \partial_\zeta) + B^{(1)+}(s, \partial_s, \partial_s) + hB^{(2)+}(\eta, s, \partial_s) + \dots \quad (5.6)$$

имеют вид

$$B^{0+}(\partial_\eta, \partial_\zeta) = \begin{pmatrix} \mu\partial_\zeta & \mu\partial_\eta & 0 \\ \lambda\partial_\eta & (\lambda + 2\mu)\partial_\zeta & 0 \\ 0 & 0 & \mu\partial_\zeta \end{pmatrix},$$

$$B^{(1)+}(s, \partial_s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda\kappa(s) & 0 & \lambda\partial_s \\ 0 & \mu\partial_s & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

$$B^{(2)+}(\eta, s, \partial_s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\lambda\kappa(s)^2\eta & 0 & -\lambda\kappa(s)\eta\partial_s \\ 0 & -\mu\kappa(s)\eta\partial_s & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, справедливы равенство  $B^{h0}u^h = (\sigma_{nn}(u^h), \sigma_{nz}(u^h), \sigma_{ns}(u^h))$  и расщепление

$$B^{h0}(n, z, s, \partial_n, \partial_z, \partial_s) = h^{-1}B^{00}(\partial_\eta, \partial_\zeta) + B^{(1)0}(s, \partial_s) + hB^{(2)0}(\eta, s, \partial_s) + \dots, \quad (5.8)$$

включающее такие матрицы дифференциальных операторов:

$$B^{00}(\partial_\eta, \partial_\zeta) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_\eta & \lambda\partial_\zeta & 0 \\ \mu\partial_\zeta & \mu\partial_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \mu\partial_\eta \end{pmatrix},$$

$$B^{(1)0}(s, \partial_s) = \begin{pmatrix} \lambda\kappa(s) & 0 & \lambda\partial_s \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu\partial_s & 0 & -\mu\kappa(s) \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$B^{(2)0}(\eta, s, \partial_s) = \begin{pmatrix} -\lambda\kappa(s)^2\eta & 0 & -\lambda\kappa(s)\eta\partial_s \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mu\kappa(s)\eta\partial_s & 0 & \mu\kappa(s)^2\eta \end{pmatrix}.$$

**5.2. Случай кругового сечения.** Пусть  $\omega = \mathbb{B}_1 = \{y : |y| < 1\}$  – единичный круг и  $(r, \varphi, z) = (1 + n, s, z)$  – система цилиндрических координат. Кроме того, кривизна  $\kappa$  постоянная, но значение  $\kappa(s) = \kappa_0 = 1$  конкретизируем не всегда для использования формул в следующем пункте.

Следуя работе [25], изучающей спектральную смешанную краевую задачу для оператора Лапласа, примем для собственных пар трёхмерной задачи теории упругости (1.1)–(1.3) следующие асимптотические анзацы:

$$\Lambda^h = h^{-2}M_1 + h^{-1}\mathbf{A} + \beta + \dots, \quad (5.10)$$

$$u^h(x) = \mathbf{w}^1(\eta, \zeta)v(s) + hW(\eta, \zeta, s) + h^2\mathcal{W}(\eta, \zeta, s) + \dots \quad (5.11)$$

Здесь  $\{M_1; w^1\}$  – первая собственная пара модельной задачи (1.36), (1.38), (1.39) в полуполосе (1.14),  $\mathbf{w}^1 = (w_1^1, w_2^1, 0)$ , т.е. проекция вектора  $\mathbf{w}^1$  на ось  $s$  нулевая, а экспоненциально затухающая вектор-функция  $w^1 = (w_n^1, w_z^1) = (w_1^1, w_2^1)$  нормирована в пространстве  $L^2(\Pi)^2$ . Остальные ингредиенты разложений (5.10) и (5.11) подлежат дальнейшему определению.

Подставим разложения (5.10), (5.11) и (5.2) в систему (1.1) и соберем множители при  $h^{-2}$  и  $h^{-1}$ . Видим, что в силу формул (1.36) и (5.3) главные члены невязки взаимно уничтожаются. Первое поправочное слагаемое из анзаца (5.11) представим в виде

$$W(\eta, \zeta, s) = (v(s)W_1(\eta, \zeta), v(s)W_2(\eta, \zeta), \partial_s v(s)W_s(\eta, \zeta)). \quad (5.12)$$

В итоге для вектор-функции  $W' = (W_1, W_2)$  выводим систему уравнений

$$-\mu\Delta_\xi W'(\xi) - (\lambda + \mu)\nabla_\xi \nabla_\xi \cdot W'(\xi) - MW'(\xi) = BU'(\xi) + \kappa(s)F'(\xi), \quad (5.13)$$

$$\xi \in \Pi,$$

правая часть которой включает вектор  $F' = (F_1, F_2)$  с декартовыми компонентами

$$F_1(\xi) = 2(\lambda + \mu)\partial_\eta w_1^1(\xi), \quad F_2(\xi) = (\lambda + \mu)\partial_\zeta w_1^1(\xi) + \mu\partial_\eta w_2^1(\xi). \quad (5.14)$$

Однородные условия Дирихле (1.38), разумеется, сохраняются для  $W'$ , но согласно формулам (5.6)–(5.8) краевые условия в напряжениях принимают вид

$$B^{0+}(\nabla_\xi)W'(\xi_1, 1) = \kappa(s)G'^+(\xi_1) := -\lambda\kappa(s)(0, w_1^1(\xi_1, 1)), \quad \xi_1 > 0,$$

$$B^{00}(\nabla_\xi)W'(0, \xi_2) = \kappa(s)G'^0(\xi_2) := -\lambda\kappa(s)(w_1^1(0, \xi_2), 0), \quad \xi_2 \in (\ell, 1), \quad (5.15)$$

где постоянное значение  $\kappa(s) = 1$  – важный момент (ср. п. 3, §5). В предположении простоты собственного числа  $M_1$  задача (5.13), (5.15), (1.38) имеет затухающее на бесконечности решение при выполнении одного условия ортогональности

$$0 = \mathbf{A} \int_{\Pi} |w^1(\xi)|^2 d\xi + \int_{\Pi} w^1(\xi) \cdot F'(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^0 w^1(\xi_1, 1) \cdot G'^+(\xi_1) d\xi_1 + \int_{\ell}^1 w^1(0, \xi_2) \cdot G'^0(\xi_2) d\xi_2. \quad (5.16)$$

Первый интеграл в правой части в равенстве (5.16) равен единице, а сумму трёх остальных, найденных согласно представлениям (5.14) и (5.15), обозначим через  $-\mathbf{A}_0(w^1)$ . Знак величины  $\mathbf{A}_0(w^1)$ , играющий важную роль в п. 3 §5, остаётся неясным (важный открытый вопрос), так как явный вид собственной моды  $w^1$  в полуполосе неизвестен, а всевозможные способы интегрирования по частям не помогают. Вместе с тем формула

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 := \mathbf{A}_0(w^1) \quad (5.17)$$

обеспечивает существование затухающего на бесконечности решения задачи (5.13), (5.15), (1.38) и конкретизирует первый поправочный член анзаца (5.10).

Согласно формулам (5.4), (5.7) и (5.9) для последней компоненты вектора (5.12) получаем неоднородное уравнение Гельмгольца, а также краевые условия Дирихле (1.41) и Неймана

$$-\mu\Delta_\xi W_s(\xi) - M_1 W_s(\xi) = (\lambda + \mu)\nabla_\xi \cdot w^1(\xi), \quad \xi \in \Pi,$$

$$\mu\partial_\zeta W_s(\eta, 1) = -\mu w_2^1(\eta, 1), \quad \eta \in (0, +\infty), \quad (5.18)$$

$$\mu\partial_\eta W_s(0, \zeta) = -\mu w_1^1(0, \zeta), \quad \zeta \in (\ell, 1).$$

Поскольку  $M < M_{\dagger}$ , т.е. точка  $M$  не является собственным числом, задача (5.18), (1.40) имеет единственное решение, затухающее на бесконечности с экспоненциальной скоростью.

Скалярная задача для компоненты  $\mathcal{W}_s$  третьего члена анзаца (5.11) также однозначно разрешима и потому не представляет дальнейшего интереса. В силу формул (5.10), (5.11) и (5.4), (5.5), (5.7), (5.9) вектор  $\mathcal{W}' = (\mathcal{W}_n, \mathcal{W}_z)$  удовлетворяет задаче вида (5.13), (5.15), (1.38) с правыми частями  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{G}'^+$ ,  $\mathcal{G}'^0$  в системе уравнений и краевых условиях в напряжениях

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' &= \beta w^1 - L^{(1)'}(W'v) - L_s^{(1)}(W_s \partial_s v) - L^{(2)'}(w^1 v) \\ &= \beta w^1 + (\lambda + \mu) \partial_s^2 v \nabla_{\xi} W_s + \mathcal{F}^{\bullet} v, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'^+ &= -\lambda(0, W_s) \partial_s^2 v - \lambda v \kappa(0, w_1^1 - \kappa \eta w_1^1) = -\lambda(0, W_s) \partial_s^2 v - v \mathcal{G}^{\bullet+}, \\ \mathcal{G}'^0 &= -\lambda(W_s, 0) \partial_s^2 v - \lambda v (\kappa w_1^1, -\kappa \eta w_1^1) = -\lambda(W_s, 0) \partial_s^2 v - v \mathcal{G}^{\bullet 0}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Здесь  $L^{(1)'}$ ,  $L^{(2)'}$  и  $L_s^{(1)}$ ,  $L_s^{(2)}$  – верхние левые  $(2 \times 2)$ -блоки и правые столбцы высотой два матриц (5.4), (5.5) соответственно. Правые части соотношений (5.20) составлены при учёте формул (5.7) и (5.9).

Особенно важно то, что в формулах (5.19) и (5.20) присутствует только сама функция  $v$  и её вторая производная, а первая производная  $\partial_s v$  отсутствует. Таким образом, условие разрешимости полученной задачи

$$\begin{aligned} 0 &= \beta \int_{\Pi} |w^1(\xi)|^2 d\xi v(s) + \int_{\Pi} w^1(\xi) \cdot \mathcal{F}'(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^0 w^1(\eta, 1) \cdot \mathcal{G}'^+(\eta) d\eta \\ &\quad + \int_{\ell}^1 w^1(0, \zeta) \cdot \mathcal{G}'^0(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (5.21)$$

принимает вид формально самосопряжённого обыкновенного дифференциального уравнения на окружности

$$-\mathbf{B} \partial_s^2 v(s) + \mathbf{b} v(s) = \beta v(s), \quad s \in \mathbb{S}^1 = \partial\omega. \quad (5.22)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (5.21) превращается в левую часть уравнения (5.22) по причине нормировки вектор-функции  $w^1$  в пространстве Лебега  $L^2(\Pi)^2$ . Коэффициент  $\mathbf{b}$ , получающийся в результате подбора интегрирования последних слагаемых из

списка (5.19), (5.20), не играет существенной роли, так как приводит лишь к сдвигу спектра оператора  $-\mathbf{B}\partial_s^2$  на  $\mathbb{S}^1$ :

$$\beta_1^0 = 0, \quad \beta_{2k}^0 = \beta_{2k+1}^0 = \mathbf{B}k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.23)$$

Соответствующие собственные функции: постоянная при  $k=0$  и  $\sin(ks)$ ,  $\cos(ks)$  при  $k \geq 1$ .

Имеющий принципиальное значение коэффициент  $\mathbf{B}$  принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = (\lambda + \mu) \int_{\Pi} w^1(\xi) \cdot \nabla_{\xi} W_s(\xi) d\xi - \lambda \int_{-\infty}^0 w^1(\eta, 1) W_s(\eta, 1) d\eta \\ - \lambda \int_{\ell}^1 w^1(0, \zeta) W_s(0, \zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Как и в случае коэффициента  $\mathbf{A}$ , автору не удалось определить знак коэффициента (5.24), в котором помимо собственной моды  $w^1$  фигурирует решение  $W_s$  скалярной задачи (5.18), (1.41), и даже убедиться в том, что  $\mathbf{B} \neq 0$ . Нахождение этого коэффициента требует применения вычислительных схем и остаётся важным открытым вопросом (см. п. 1, §6). Подчеркнём, что в случае  $\mathbf{B} = 0$  все числа (5.23) нулевые, а асимптотические анзацы (5.10) и (5.11) нуждаются в коренной переработке, но автор не знает, как это сделать и тем самым увеличивает количество открытых вопросов.

Сформулируем условный результат, обеспеченный леммой о “почти собственных” числах и векторах (см. первоисточник [32] и её применение, например, в статье [6]).

**Предложение 5.5.** *Если  $\partial\omega$  – окружность  $\mathbb{S}^1$  и  $\mathbf{B} \neq 0$ , то для каждого  $k \in \mathbb{N}$  найдутся такие положительные величины  $h_k$ ,  $c_k$  и собственное число  $\Lambda_{N^h(k)}^h$  задачи (1.1)–(1.3), что справедлива асимптотическая формула*

$$|\Lambda_{N^h(k)}^h - h^{-2}M_1 - \beta_k^0 + \mathbf{b}| \leq c_k h^{1/2} \text{ при } h \in (0, h_k].$$

Здесь  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{b}$  – коэффициенты уравнения (5.22),  $\beta_k^0$  – собственные числа (5.23), а  $M_1$  – первое собственное число задачи (1.36), (1.38), (1.39), существующее в силу ограничения  $\ell < \ell_*$ , но простое по предположению.

**5.3. Сечение произвольной формы.** Если кривизна  $\kappa$  контура  $\partial\omega$  переменная, то в противоположность п. 2, §5 не удаётся соблюсти условие разрешимости задачи задача (5.13), (5.15), (1.38) путём выбора второго члена  $\mathbf{A}$  в анзаце (5.10) постоянным (см. формулу (5.17)). Допустим, что в какой-то точке  $s_{\#} \in \partial\omega$  кривизна  $\kappa$  принимает экстремальное значение, т.е.

$$\kappa(s) = \kappa_{\#} \pm \mathbf{k}(s - s_{\#})^2 + O(|s - s_{\#}|^3), \quad (5.25)$$

причём  $\mathbf{k} > 0$ , и в случае максимума (минус) и минимума (плюс) справедливы неравенства

$$\pm\kappa(s) < \pm\kappa_{\#} \text{ при } s \in \partial\omega, s \neq s_{\#}. \quad (5.26)$$

Иными словами, экстремум является глобальным и строгим.

Как и в работе [25], для скалярной задачи, в дополнение к заменам (1.35) введем растянутую координату

$$t = h^{-1/4}(s - s_{\#}) \quad (5.27)$$

и изменим асимптотические анзацы (5.10) и (5.11) для собственных пар задачи (1.1)–(1.3) следующим образом:

$$\Lambda^h = h^{-2}M_1 + h^{-1}\kappa_{\#}\mathbf{A}_0 + h^{-1/2}\beta + \dots,$$

$$u^h(x) = \mathbf{w}^1(\eta, \zeta)\mathbf{v}(t) + h^{3/4}W^h(\eta, \zeta, t) + h^{3/2}\mathcal{W}(\eta, \zeta, t) + \dots$$

Теперь  $\mathbf{v}$  – функция на оси  $\mathbb{R}$ , подлежащая определению и затухающая на бесконечности с экспоненциальной скоростью, а остальные ингредиенты анзацев вполне аналогичны использованным в формулах (5.10) и (5.11), но находятся при помощи несколько иных соображений, чем в п. 2, §5. Сохраним выражение (5.17) для величины  $\mathbf{A}$  и возьмём постоянный коэффициент  $\kappa_{\#}$  из соотношения (5.25), но в соответствии с заменой (5.27) и аналогично формуле (5.12) положим

$$W^h(\eta, \zeta, t) = (h^{1/4}\mathbf{v}(t)W_n(\eta, \zeta), h^{1/4}\mathbf{v}(t)W_z(\eta, \zeta), \partial_t\mathbf{v}(t)W_s(\eta, \zeta))$$

Компонента  $W_s$  определяется из прежней, однозначно разрешимой, задача (5.18), (1.40), а компоненты  $W_n$  и  $W_z$  оказываются ненужными. При учёте дополнительных невязок в системе дифференциальных уравнений в полуполосе  $\Pi$  и в краевых условиях на её торце и верхней боковой стороне

$$h^{-1}(\kappa(s) - \kappa_{\#})F'(\xi) = \pm h^{-1}\mathbf{k}(s - s_{\#})^2 F'(\xi) + \dots = \pm h^{-1/2}\mathbf{k}t^2 F'(\xi) + \dots,$$

$$(\kappa(s) - \kappa_{\#})G'^b(\xi) = \pm \mathbf{k}(s - s_{\#})^2 G'^b(\xi) + \dots = \pm h^{1/2}\mathbf{k}t^2 G'^b(\xi) + \dots, \quad b=0, +.$$

Эти члены невязок содержат векторы (5.14), (5.15) и появились в результате замен  $s \mapsto t$  и  $\kappa(s) - \kappa_{\#} \mapsto \pm \mathbf{k}(s - s_{\#})^2$  (см. формулы (5.27) и (5.25)), а многочлен заменяет неустребованные далее члены. В итоге правые части  $\mathcal{F}'$  и  $G'^b$  задачи (5.13), (5.15), (1.38) для составляющей  $\mathcal{W}' = (\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$  анзаца (5.26) определены равенствами, отличающимися от указанных в списке (5.19), (5.20):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(\xi, t) &= (\mu \partial_t^2 \mathbf{v}(t) + \beta \mathbf{v}(t)) w^1(\xi) \pm \mathbf{k} t^2 F'(\xi) v(t) \\ &\quad - (\lambda + \mu) \partial_t^2 \mathbf{v}(t) \nabla_{\xi} W_s(\xi), \\ \mathcal{G}'^+(\eta, \tau) &= \pm \mathbf{k} t^2 G'^+(\eta) \mathbf{v}(t) - \lambda(0, W_s(\eta, 0)) \partial_t^2 \mathbf{v}(t), \\ \mathcal{G}'^0(\eta, \tau) &= \pm \mathbf{k} t^2 G'^0(\zeta) \mathbf{v}(t) - \lambda(W_s(0, \zeta), 0) \partial_t^2 \mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Ещё раз отметим, что слагаемые  $\mathcal{F}^{\bullet}$  и  $\mathcal{G}^{\bullet b}$ , присутствующие в формулах (5.19) и (5.16) исчезли из выражений (5.28) потому, что равенство  $\partial_s = h^{-1/2} \partial_t^2$  придаёт им следующий порядок малости по сравнению с оставленными.

Теперь выкладки из п. 2, §5 превращают условие разрешимости сформированной задачи для  $\mathcal{W}'$  в обыкновенное дифференциальное уравнение гармонического осциллятора [37]

$$-\mathbf{B} \partial_t^2 \mathbf{v}(t) \pm \mathbf{k} \mathbf{A} t^2 \mathbf{v}(t) = \beta \mathbf{v}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.29)$$

с прежними коэффициентами (5.17) и (5.24).

Для того чтобы обеспечить свойства затухания собственных функций уравнения (5.29), приходится ввести ограничение

$$\pm \mathbf{k} \mathbf{A} \mathbf{B} > 0. \quad (5.30)$$

Таким образом, если  $\mathbf{A} \mathbf{B} > 0$ , то требуется, чтобы у кривизны  $\kappa$  в точке  $s_{\#}$  был строгий глобальный минимум (знак плюс в (5.25)), но при  $\mathbf{A} \mathbf{B} < 0$  – строгий глобальный максимум (знак минус в (5.25)). Как и ранее, в случае  $\mathbf{A} \mathbf{B} = 0$  асимптотические анзацы нуждаются в полной перестройке, но автор не знает, как они выглядят.

При выполнении неравенства (5.30) уравнение (5.29) приобретает дискретный спектр, а его собственные числа уравнения (5.29) имеют явный вид (см., например, [37])

$$\beta_k = (2k - 1) \operatorname{sign} \mathbf{B} \sqrt{\frac{|\mathbf{k} \mathbf{A}|}{|\mathbf{B}|}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.31)$$

где  $\text{sign} \mathbf{B} = |\mathbf{B}|^{-1} \mathbf{B}$  – знак выражения (5.24). Соответствующие собственные функции уравнения гармонического осциллятора затухают при  $t \rightarrow \pm\infty$  с экспоненциальной скоростью. Перечисленные свойства спектральных пар предельного уравнения позволяют соорудить приемлемые приближения к собственным парам исходной задачи и, как и в п. 2, §5, получить при помощи леммы о “почти собственных” числах и векторах следующий условный результат.

**Предложение 5.6.** Пусть в точке  $s_{\#}$  реализуется строгий глобальный экстремум (см. соотношения (5.25) и (5.26)), качество которого определяется требованием (5.30). Тогда для каждого  $k \in \mathbb{N}$  найдутся такие положительные величины  $h_k, c_k$  и собственное число  $\lambda_{N^h(k)}^h$  задачи (1.1)–(1.3), что справедлива асимптотическая формула

$$|\lambda_{N^h(k)}^h - h^{-2}M_1 - h^{-1}\kappa_{\#}\mathbf{A} - h^{-1/2}\beta_k| \leq c_k h^{-1/4} \text{ при } h \in (0, h_k].$$

Здесь  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – величины (5.17) и (5.24),  $\beta_k$  – собственные числа (5.31), а  $M_1$  – первое собственное число задачи (1.36), (1.38), (1.39), существующее (предложение 2.2) и простое по предположению.

**Замечание 5.3.** Выбор показателя  $-1/4$  в замене координаты (5.27) обусловлен предположением (5.25) при учёте формул  $h^{-1}(s - s_{\#})^2 = h^{-1/2}t^2$  и  $h^0\partial_s^2 = h^{-1/2}\partial_t^2$  с одинаковыми финальными показателями степени малого параметра. Если экстремум кривизны вырожденный, т.е. при сохранении условия (5.26) выполнено соотношение

$$\kappa(s) = \kappa_{\#} \pm \mathbf{k}(s - s_{\#})^{2j} + O(|s - s_{\#}|^{2j+1}) \text{ при } j \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

то вместо (5.27) требуется замена  $s \mapsto t = h^{-\phi/2}(s - s_{\#})$ , где  $\phi = 1/(1 + j)$ .

## §6. РАЗНОЕ

**6.1. Существенно открытые вопросы.** Абсолютное большинство изъянов проведенного асимптотического анализа устраняется при помощи известных вычислительных методов, впрочем недостижимых для автора. Перечислим их ещё раз: формулы для первой пары  $\{M_1; w^1\}$  и проверка простоты первого собственного числа задачи (1.36), (1.38), (1.39), зависящей от параметра  $\ell \in [0, \ell_*)$ , выявление феномена порогового резонанса для всех относительных глубин  $\ell$  паза  $\Omega_{\ell}^h$  и нахождение



коэффициентов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{b}$  предельных обыкновенных дифференциальных уравнений из §5.

Автору не удалось разобраться в том, как ограничения  $\ell \in [0, \ell_*)$  и  $\ell \in [\ell_*, 1]$ , обеспечивающие соответственно наличие собственного числа  $M_1$  и пустоту дискретного спектра задачи (1.36), (1.38), (1.39), влияют на множитель  $\mathbf{K}_{\ell\omega}$  в неравенстве Корна (1.10). Ясно, что в силу минимального принципа [19, теорема 10.2.1] множитель  $K_\ell$  в оценке

$$E(w, w; \Pi) \geq K_\ell \|w; L^2(\Pi)\|^2 \quad \forall w \in H_0^1(\Pi; \varpi_D^\ell)^2 \quad (6.1)$$

для оператора двумерной задачи теории упругости из п.1 §2 равен соответственно  $M_1$  и  $\mu\pi^2/4$  в указанных случаях. Однако получить какое-либо следствие оценки (6.1), полезное для исследования пространственной задачи (1.1)–(1.3), затруднительно по причине искривлённости контура  $\partial\omega$  и сложности строения функционала упругой энергии (1.8) (по сравнению с квазиэнергией (1.31)). Вместе с тем точное значение множителя  $\mathbf{K}_{\ell\omega}$  позволяет выяснить номер собственного числа  $\lambda_{N^h(m)}^h$ , фигурирующего в предложениях 1.1 и 5.5, 5.6.

**6.2. Гладкость границы продольного сечения.** Введённое в п.1 §1 требование  $\gamma = \partial\omega \in C^\infty$ , разумеется, избыточно. Поскольку для решений предельных задач использовалась “двучленная” формула Тейлора, достаточно предположить, что контур  $\gamma$  принадлежат классу Гёльдера  $C^{3,\delta}$ . Вместе с тем, большое прикладное значение имеет и случай кусочно-гладкого контура. Например, для прямоугольного сечения  $\omega$  стороны имеют нулевую кривизну, а значит, применима асимптотическая процедура из п.2 §5, которая кстати претерпевает значительные упрощения и даёт обыкновенные дифференциальные уравнения на сторонах прямоугольника. Вместе с тем непонятно, какие граничные условия или условия сопряжения следует назначить в вершинах прямоугольника. Для постановки названных условий необходимо исследовать спектр предельной задачи теории упругости в четвертушке  $\Xi_\perp = \{\xi : \xi_1, \xi_2 > 0, \xi_3 \in (0, 1)\}$  единичного слоя с краевыми условиями, унаследованными от исходной задачи (1.1)–(1.3). Какие-либо результаты в этом направлении автору неизвестны. Более того, если указанная смешанная краевая задача теории упругости в области  $\Xi_\perp$  обладает непустым дискретным спектром, возникает новый эффект – локализация собственных мод около углов прямоугольной пластины.

**6.3. Отслоение накладки.** В случае  $\ell = 0$  локализация мод собственных колебаний сопровождается концентрацией напряжений в узкой окрестности кромки накладки, которая (концентрация) провоцирует процессы разрушения. В результате происходит отслоение накладки от основания, которое зачастую выражается уменьшением зоны соединения пластины с абсолютно жёстким основанием, т.е., например, в случае равномерного проникновения трещины условия Дирихле (1.2) ставится на части основания

$$\Gamma_D^h = \Gamma_T^h := \{x = (y, 0) : y \in \omega, \text{dist}(y, \gamma) \geq Th\}, \quad T > 0. \quad (6.2)$$

Система Ламе (1.36) с условиями Дирихле (1.38) на луче  $\{\xi : \xi_1 < -T, \xi_2 = 0\}$  и условиями Неймана (1.39) на остальной части полуполосы (1.14) имеет собственное число  $M_1(T) \in (0, M_+)$  в дискретном спектре (см. статью [14]). Таким образом, применимы асимптотические процедуры из §5 с незначительными изменениями, а значит, по-прежнему наблюдается локализация собственных колебаний в окрестности трещины  $\Gamma_T^h \setminus \Gamma_D^h$ , вызывающая продвижение её края. Обычно рост трещины не происходит равномерно, т.е. величина  $T$  в формуле (6.2) может зависеть от переменной  $s \in \partial\omega$ . В этом случае первое (наименьшее) собственное число  $M_1(T(s))$  задачи в полуполосе  $\Pi$  изменяется вдоль контура  $\partial\omega$ , а локализация мод собственных колебаний происходит в малых окрестностях точек глобальных и локальных минимумов функции  $\partial\omega \ni s \mapsto M_1(T(s))$  (ср. асимптотический анализ в работах [25, 38–43] и др.).

Если ширина трещины на основании накладки значительно превосходит относительную толщину пластины  $h$ , то процедура построения асимптотики изменяется существенно и, в частности, на множестве  $(\Gamma_-^h \setminus \Gamma_T^h) \times (0, h)$  следует привлечь известные анзацы теории пластин Кирхгофа (см. [5, 44–46] и др.). Анализ напряжённо-деформированного состояния такой накладки выходит за рамки данной работы. Следует подчеркнуть, что в случае весомой пластины на отслоившейся части основания накладки логично было бы поставить односторонние условия идеального контакта с абсолютно жёстким профилем без трения или с трением, однако такие условия делают задачу нелинейной (см., например, монографии [47, 48]).

**6.4. Анизотропный материал пластины.** Модельная задача в полуполосе распадается на двумерную и скалярную только в том случае, когда плоскость ортотропии материала совпадает со срединной

плоскостью пластины, а в общем случае анизотропии задача включает трёхмерную систему дифференциальных уравнений. Исследование спектра таких задач не проводилось, хотя нетрудно предсказать, что, например, в ситуации ортотропии непрерывный спектр (наверняка для скалярной задачи) находится по схеме из §2, хотя совпадение непрерывных спектров обеих задач требует наложения нескольких ограничений на модули упругости материала. Вопрос о непустоте дискретного спектра остаётся открытым. Кроме того, модельная задача зависит от переменной  $s \in \gamma$ , и эта зависимость передаётся точкам отсечки непрерывного спектра, что не только привносит существенные осложнения в алгоритмы из §5, но также может исказить финальные асимптотические формулы.

Если порог непрерывного спектра, наименьший из двух  $\varphi_{\dagger}^{vect}$  и  $\varphi_{\dagger}^{scal}$ , оказался простым и невырожденным, то изложенные асимптотические процедуры сохраняются по существу. Это требование заведомо выполнено в случае  $\varphi_{\dagger}^{vect} > \varphi_{\dagger}^{scal}$ , однако ограничения на упругие модули, обеспечивающие такое неравенство, неизвестны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 22-11-00046).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Н. Работнов, *Механика деформируемого твердого тела*. М., Наука, 1988.
2. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*. М., Наука, 1973.
3. Г. Фикера, *Теоремы существования в теории упругости*. М., Мир, 1974.
4. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна*. — Успехи матем. наук **43**, No. 5 (1988) 55–98.
5. С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки*. Новосибирск, Научная книга, 2002.
6. С. А. Назаров, *Двумерные асимптотические модели тонких цилиндрических упругих прокладок*. — Дифференциальные уравнения **58**, No. 12 (2022), 1666–1682.
7. G. R. Kirchhoff, *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*. — J. Reine Angew. Math. **40** (1850), 51–88.
8. G. R. Kirchhoff, *Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes*. — J. Reine Angew. Math. **56** (1859), 285–313.
9. И. С. Зорин, С. А. Назаров, *Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины*. — Прикладная матем. и механика **53**, No. 4 (1989), 642–650.

10. И. С. Зорин, С. А. Назаров, *Двучленная асимптотика решения задачи о продольной деформации пластины, защемленной по краю*. — Вычисл. механика деформ. твердого тела **2** (1992), . 10–21.
11. M. Dauge, I. Gruias, *Edge layers in thin elastic plates*. — Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering **157** (1998), 335–347.
12. С. А. Назаров, *Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях*. — Вестник ЛГУ. Серия 1. Вып. 2, No. 7 (1982), 65–68.
13. W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1 & 2* Berlin: Akademie-Verlag. 1991.
14. С. А. Назаров, *Собственные колебания упругой полуполосы при различном расположении участков фиксации ее краев*. — Акустический журнал **69**, No. 4 (2023), 338–409.
15. S. Molchanov, B. Vainberg, *Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics*. — Comm. Math. Phys. **273**, No. 2 (2007), 533–559.
16. D. Grieser, *Spectra of graph neighborhoods and scattering*. — Proc. London Math. Soc. **97**, No. 3 (2008), 718–752.
17. С. А. Назаров, *Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов*. — Известия РАН. Серия матем. **84**, No. 6 (2020), 73–130.
18. В. З. Партон, П. И. Перлин, *Методы математической теории упругости*. М., Наука, 1981.
19. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. Л., изд-во Ленингр.ун-та, 1980.
20. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. — Труды Московск. матем. общества **16** (1963), 219–292.
21. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. Berlin, New York, Walter de Gruyter. 1994.
22. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*. М., Мир, 1972.
23. С. А. Назаров, *Упругие волны, захваченные однородным анизотропным полцилиндром*. — Матем. сборник **204**, No. 11 (2013), 99–130.
24. С. А. Назаров, *Дискретный спектр коленчатых квантовых и упругих волноводов*. — Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **56**, No. 5 (2016), 879–895.
25. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области*. — Проблемы матем. анализа. Вып. 19. Новосибирск, Научн. книга, 1999. С. 105–148.
26. R. Leis, *Initial boundary value problems of mathematical physics*. Stuttgart, B.G. Teubner, 1986.
27. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*. М., Наука, 1961.
28. K. Pankrashkin, *Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions*. — J. Math. Anal. and Appl. **449**, No. 1 (2017), 907–925.
29. Ф. Л. Бахарев, С. А. Назаров, *Критерии наличия и отсутствия ограниченных решений на пороге непрерывного спектра в объединении квантовых волноводов*. — Алгебра и анализ **32**, No. 6 (2020), 1–23.

30. С. А. Назаров, *Сохранение пороговых резонансов и отцепление собственных чисел от порога непрерывного спектра квантового волновода*. — Матем. сборник **212**, No. 7 (2021), 84–121.
31. С. А. Назаров, *Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода*. — Функци. анализ и его прилож. **46**, No. 3 (2013), 37–53.
32. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*. — Успехи матем. наук **12**, No. 5 (1957), 3–122.
33. М. Д. Ван Дайк, *Методы возмущений в механике жидкостей*. М., Мир, 1967. 310 с.
34. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. М., Наука, 1989.
35. С. А. Назаров, *Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких*. — Алгебра и анализ **7**, No. 5 (1995), 1–92.
36. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. М., Мир, 1971.
37. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*. М., Наука, 1974.
38. L. Friedlander, M. Solomyak, *On the spectrum of narrow periodic waveguides*. — Russ. J. Math. Phys. **15**, No. 2 (2008), 238–242.
39. L. Friedlander, M. Solomyak, *On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip*. — Israel J. Math. **170** (2009), 337–354.
40. D. Borisov, P. Freitas, *Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains*. — Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire. **26**, No. 2 (2009), 547–560.
41. D. Borisov, P. Freitas, *Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in  $\mathbb{R}^d$* . — J. Funct. Anal. **258**, No. 3 (2010), 893–912.
42. С. А. Назаров, *Околовершинная локализация собственных функций задачи Дирихле в тонких многогранниках*. — Сибирск. матем. журнал **54**, No. 3 (2013), 655–672.
43. S. A. Nazarov, E. Perez, J. Taskinen, *Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains*. — Transactions of the American Mathematical Society **368**, No. 7 (2016), 4787–4829.
44. Б. А. Шойхет, *Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры*. — Прикладная математика и механика **37**, No. 5 (1973), 913–924.
45. P. G. Ciarlet, *Mathematical elasticity, II: Theory of plates*. Studies in Mathematics and its Applications. Vol. 27. Amsterdam, 1997.
46. G. Panasenko, *Multi-scale modelling for structures and composites*. Dordrecht: Springer, 2005.
47. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*. М., Наука, 1980.
48. И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек, *Решение вариационных неравенств в механике*. М., Мир, 1986.

Nazarov S. A. Distribution of natural oscillations models in a plate imbedded into absolutely rigid half-space.

We study oscillations of a thin isotropic cylindrical plate imbedded into a notch and attached to its absolutely rigid surface. We demonstrate that only in the case of sufficiently deep notch, in particular, completely submerged plate, its natural oscillations are described by the two-dimensional model, that is, elasticity theory plane problem in the longitudinal cross-section with the Dirichlet conditions at its boundary. In other cases we establish the exponential decay of eigenmodes at a distance of the lateral side of the plate. Moreover, a formal asymptotic analysis leads to other models of reduced dimension in the low-frequency range of the spectrum, namely multifarious ordinary differential equations while the corresponding modes of natural oscillations concentrate near the whole lateral side or some points on it.

Институт Проблем Машиноведения РАН,  
В.О., Большой пр., 61,  
199034 Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail*: [srgnazarov@yahoo.co.uk](mailto:srgnazarov@yahoo.co.uk)

Поступило 29 сентября 2023 г.