Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 521, 2023 г.

А. С. Михайлов, В. С. Михайлов

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ

**Посвящается памяти Натальи Яковлевны Кирпичниковой
и Михаила Михайловича Попова**

§1. Ведение

Для заданных последовательностей комплексных чисел $\{a_1,\dots\}$, $\{b_1,b_2,\dots\}$, $a_i\neq 0$ мы рассмотрим следующую матрицу Якоби

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots\\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Для $N\in\mathbb{N}$, через A^N мы обозначим $N\times N$ матрицу Якоби, которая представляет собой блок, состоящий из пересечения первых N столбцов с первыми N строками матрицы A. С матрицей A и дополнительным параметром $a_0\in\mathbb{C}$ мы свяжем динамическую систему с дискретным временем:

$$\begin{cases} u_{n,t+1}+u_{n,t-1}-a_nu_{n+1,t}-a_{n-1}u_{n-1,t}-b_nu_{n,t}=0, & n,t\in\mathbb{N},\\ u_{n,-1}=u_{n,0}=0, & n\in\mathbb{N},\\ u_{0,t}=f_t, & t\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases} \tag{2}$$

Эта дискретная система является естественным аналогом динамической системы, ассоциированной с волновым уравнением на полуоси с управлением в нуле [2,5,6]. По аналогии с непрерывными задачами [4] мы рассматриваем комплексную последовательность $f=(f_0,f_1,\dots)$ как *граничное управление*. Решение задачи (2) обозначим $u^f_{n,t}$. Зафиксировав $T\in\mathbb{N}$, мы вводим *оператор реакции* системы (2), который переводит управление $f=(f_0,\dots f_{T-1})$ в $u^f_{1,t}$:

$$\left(R^Tf\right)_t:=u^f_{1,t},\quad t=1,\dots,T.$$

Ключевые слова: обратная задача, матрицы Якоби, метод граничного управления, характеризация обратных данных.

Обратная задача, с которой мы будем иметь дело, состоит в восстановлении последовательностей $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ из R^T при фиксированном T. Эта задача является естественным дискретным аналогом обратной задачи для волнового уравнения на полупрямой, где в качестве обратных данных используется динамическое отображение Дирихле–Неймана, см. [4].

Мы будем использовать несамосопряженный вариант [1, 5] метода Граничного управления (ГУ) [4], который изначально был разработан для решения многомерных динамических обратных задач, но с тех пор был применен и к одномерным обратным динамическим и спектральным задачам, и к обратным задачам рассеяния, и к задачам обработки сигналов и проблемам идентификации. Применение метода ГУ к одномерным задачам описано в [2,6], случай вещественной матрицы Якоби рассматривается в [8–10].

Во втором разделе мы изучаем прямую задачу, для (2) доказываем аналог формулы интегрального представления Дюамеля. Мы также вводим вспомогательную задачу, выводим представления для основных операторов метода ГУ: операторов управления и реакции для (2) и для вспомогательной задачи, а также выводим представление для связующего оператора. В третьем разделе мы описываем два метода восстановления неизвестных коэффициентов из оператора реакции, а именно уравнения Крейна и метод факторизации. В отличие от самосопряженного случая, мы сможем восстановить только квадраты a_k, $k = 1, 2, \ldots$. Далее мы поясним эту особенность задачи и ответим на вопрос о характеризации динамических обратных данных.

§2. Прямая задача, вспомогательная задача, операторы метода граничного управления

Зафиксируем некоторое целое положительное число T и обозначим через $\mathcal{F}^T$ *внешнее пространство* системы (2), пространство управлений: $\mathcal{F}^T := \mathbb{C}^T$, $f \in \mathcal{F}^T$, $f = (f_0, \ldots, f_{T-1})$, $f, g \in \mathcal{F}^T$, $(f, g)_{\mathcal{F}^T} = \sum_{k=0}^{T-1} f_k \overline{g_k}$. Мы используем обозначение $\mathcal{F}^\infty = \mathbb{C}^\infty$, когда управление действует для всех $t \geqslant 0$. Следующую формулу представления решения задачи (2) можно рассматривать как аналог формулы представления Дюамеля начально-краевой задачи для волнового уравнения с потенциалом на полупрямой [2].

Лемма 1. *Решение задачи* (2) *допускает представление*

$$u^f_{n,t}=\prod_{k=0}^{n-1}a_kf_{t-n}+\sum_{s=n}^{t-1}w_{n,s}f_{t-s-1},\quad n,t\in\mathbb{N},\tag{3}$$

где $w_{n,s}$ *является решением задачи Гурса*

$$\begin{cases}w_{n,s+1}+w_{n,s-1}-a_nw_{n+1,s}-a_{n-1}w_{n-1,s}-b_nw_{n,s} & \\ \quad=-\delta_{s,n}(1-a_n^2)\prod_{k=0}^{n-1}a_k, & n,s\in\mathbb{N}, s>n,\\ w_{n,n}-b_n\prod_{k=0}^{n-1}a_k-a_{n-1}w_{n-1,n-1}=0, & n\in\mathbb{N},\\ w_{0,t}=0, & t\in\mathbb{N}\cup\{0\}.\end{cases}\tag{4}$$

Доказательство. Предположим, что решение $u^f_{n,t}$ имеет форму (3) с неизвестным коэффициентами $w_{n,s}$ и подставим его в (2):

$$\begin{gathered}0=\prod_{k=0}^{n-1}a_kf_{t+1-n}+\prod_{k=0}^{n-1}a_kf_{t-1-n}-a_n\prod_{k=0}^{n}a_kf_{t-n-1}-a_{n-1}\prod_{k=0}^{n-2}a_kf_{t-n+1}\\ -b_n\prod_{k=0}^{n-1}a_kf_{t-n}+\sum_{s=n}^{t}w_{n,s}f_{t-s}+\sum_{s=n}^{t-2}w_{n,s}f_{t-s-2}\\ -a_n\sum_{s=n+1}^{t-1}w_{n+1,s}f_{t-s-1}-a_{n-1}\sum_{s=n-1}^{t-1}w_{n-1,s}f_{t-s-1}-\sum_{s=n}^{t-1}b_nw_{n,s}f_{t-s-1}.\end{gathered}$$

Меняя порядок суммирования получаем

$$\begin{aligned}0&=\left(1-a_n^2\right)\prod_{k=0}^{n-1}a_kf_{t-n-1}-b_n\prod_{k=0}^{n-1}a_kf_{t-n}\\ &-\sum_{s=n}^{t-1}f_{t-s-1}\left(b_nw_{n,s}+a_nw_{n+1,s}+a_{n-1}w_{n-1,s}\right)+a_nw_{n+1,n}f_{t-n-1}\\ &-a_{n-1}w_{n-1,n-1}f_{t-n}+\sum_{s=n-1}^{t-1}w_{n,s+1}f_{t-s-1}+\sum_{s=n+1}^{t-1}w_{n,s-1}f_{t-s-1}\\ &=\sum_{s=n}^{t-1}f_{t-s-1}\left(w_{n,s+1}+w_{n,s-1}-a_nw_{n+1,s}-a_{n-1}w_{n-1,s}-b_nw_{n,s}\right)\\ &\quad-b_n\prod_{k=0}^{n-1}a_kf_{t-n}+\left(1-a_n^2\right)\prod_{k=0}^{n-1}a_kf_{t-n-1}+a_nw_{n+1,n}f_{t-n-1}\end{aligned}$$

$$- a_{n-1}w_{n-1,n-1}f_{t-n} + w_{n,n}f_{t-n} - w_{n,n-1}f_{t-n-1}.$$

Наконец мы приходим к

$$\sum_{s=n}^{t-1} f_{t-s-1}(w_{n,s+1} + w_{n,s-1} - a_n w_{n+1,s} - a_{n-1}w_{n-1,s} - b_n w_{n,s}$$
$$+ \left(1 - a_n^2\right) \prod_{k=0}^{n-1} a_k \delta_{sn}) + f_{t-n}\left(w_{n,n} - a_{n-1}w_{n-1,n-1} - b_n \prod_{k=0}^{n-1} a_k\right) = 0.$$

Считая, что $w_{n,s} = 0$ при $n > s$ и используя произвольность f, приходим к (4). □

Определение 1. *Для* $f, g \in \mathcal{F}^\infty$ *определим свертку* $c = f * g \in \mathcal{F}^\infty$ *по формуле*

$$c_t = \sum_{s=0}^{t} f_s g_{t-s}, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Введем аналог динамического *оператора реакции* (динамического отображения Дирихле-Неймана) [4] для системы (2):

Определение 2. *Для системы* (2) оператор реакции $R^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathbb{C}^T$ *определяется по правилу*

$$\left(R^T f\right)_t = u^f_{1,t}, \quad t = 1, \ldots, T.$$

Определим *вектор реакции* — ядро свертки оператора реакции, $r = (r_0, \ldots, r_{T-1}) = (a_0, w_{1,1}, w_{1,2}, \ldots w_{1,T-1})$. В соответствии с (3)

$$\left(R^T f\right)_t = u^f_{1,t} = a_0 f_{t-1} + \sum_{s=1}^{t-1} w_{1,s} f_{t-1-s} \quad t = 1, \ldots, T. \tag{5}$$
$$\left(R^T f\right) = r * f_{\cdot-1}.$$

Выбрав специальное управление $f = \delta = (1, 0, 0, \ldots)$, ядро оператора реакции можно определить как

$$\left(R^T \delta\right)_t = u^\delta_{1,t} = r_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Обратная задача которая нас интересует, состоит в восстановлении матрицы Якоби (т.е. последовательностей $\{a_1, a_2, \ldots\}$, $\{b_1, b_2, \ldots\}$) и a_0 из оператора реакции.

Введем *внутреннее пространство* динамической системы (2) $\mathcal{H}^T := \mathbb{C}^T$, $h \in \mathcal{H}^T$, $h = (h_1, \ldots, h_T)$ со скалярным произведением $h, l \in$

$\mathcal{H}^T$, $(h,g)_{\mathcal{H}^T} = \sum_{k=1}^T h_k\overline{g_k}$. *Оператор управления* $W^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{H}^T$ определяется по правилу

$$W^T f := u^f_{n,T}, \quad n = 1,\dots,T.$$

Из (3) выводим представление для W^T:

$$\left(W^T f\right)_n = u^f_{n,T} = \prod_{k=0}^{n-1} a_k f_{T-n} + \sum_{s=n}^{T-1} w_{n,s} f_{T-s-1}, \quad n = 1,\dots,T. \tag{7}$$

Следующее утверждение эквивалентно граничной управляемости системы (2).

Лемма 2. *Оператор* W^T *является изоморфизмом между* $\mathcal{F}^T$ *и* $\mathcal{H}^T$.

Доказательство. Фиксируем произвольный вектор $a \in \mathcal{H}^T$ и ищем управление $f \in \mathcal{F}^T$ такое, что $W^T f = a$. Запишем действие оператора W^T в виде

$$W^T f = \begin{pmatrix} u_{1,T} \\ u_{2,T} \\ \cdot \\ u_{k,T} \\ \cdot \\ u_{T,T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,T-1} \\ 0 & a_0 a_1 & w_{2,2} & \dots & w_{2,T-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \prod_{j=0}^{k-1} a_j & \dots & w_{k,T-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \prod_{k=0}^{T-1} a_{T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{T-1} \\ f_{T-2} \\ \cdot \\ f_{T-k-1} \\ \cdot \\ f_0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Введя обозначения

$$J_T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T, \quad \left(J_T f\right)_n = f_{T-1-n}, \quad n = 0,\dots,T-1,$$
$$A \in \mathbb{R}^{T\times T}, \quad a_{ii} = \prod_{k=0}^{i-1} a_i, \quad a_{ij} = 0,\, i \neq j,$$
$$K \in \mathbb{R}^{T\times T}, \quad k_{ij} = 0,\ i \geqslant j,\ k_{ij} = w_{ij-1},\ i < j,$$

получим

$$W^T = V^T J^T = (A + K)\, J^T. \tag{9}$$

Очевидно, этот оператор обратим, что и завершает доказательство леммы. □

Наряду с системой (2) рассмотрим вспомогательную систему, связанную с комплексно-сопряженной матрицей $\overline{A}$:

$$\begin{cases} v_{n,t+1}+v_{n,t-1}-\overline{a_n}v_{n+1,t}-\overline{a_{n-1}}v_{n-1,t}-\overline{b_n}v_{n,t}=0, & n,t\in\mathbb{N},\\ v_{n,-1}=v_{n,0}=0, & n\in\mathbb{N},\\ v_{0,t}=f_t, & t\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases} \qquad (10)$$

Величины, относящиеся к системе (10), снабдим символом #. Непосредственные расчеты показывают, что верна следующая лемма.

Лемма 3. *Операторы управления и реакции системы* (10) *связаны с операторами управления и реакции исходной системы* (2) *следующими соотношениями*

$$W_{\#}^T=\overline{W^T},\quad R_{\#}^T=\overline{R^T}, \qquad (11)$$

то есть матрица $W_{\#}^T$ *и вектор реакции* $r_{\#}$ *равны комплексно-сопряженным матрице* W^T *и вектору* r.

Для систем (2), (10) введем *связывающий оператор* $C^T:\mathcal{F}^T\mapsto\mathcal{F}^T$ через квадратичную форму: для произвольных $f,g\in\mathcal{F}^T$ определим

$$\left(C^Tf,g\right)_{\mathcal{F}^T}=\left(u^f_{\cdot,T},v^g_{\cdot,T}\right)_{\mathcal{H}^T}=\left(W^Tf,W_{\#}^Tg\right)_{\mathcal{H}^T}. \qquad (12)$$

Следующее утверждение играет важную роль при решении динамической обратной задачи:

Теорема 1. *Связывающий оператор* C^T *является изоморфизмом в* $\mathcal{F}^T$, *он допускает представление через обратные данные:*

$$C^T=a_0C_{ij}^T,\quad C_{ij}^T=\sum_{k=0}^{T-\max i,j}r_{|i-j|+2k},\quad r_0=a_0, \qquad (13)$$

$$C^T=\begin{pmatrix} r_0+r_2+\ldots+r_{2T-2} & r_1+r_3+\ldots+r_{2T-3} & \cdot & r_T+r_{T-2} & r_{T-1}\\ r_1+r_3+\ldots+r_{2T-3} & r_0+r_2+\ldots+r_{2T-4} & \cdot & \ldots & r_{T-2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ r_{T-3}+r_{T-1}+r_{T+1} & \ldots & \cdot & r_1+r_3 & r_2\\ r_T+r_{T-2} & \ldots & \cdot & r_0+r_2 & r_1\\ r_{T-1} & r_{T-2} & \cdot & r_1 & r_0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Заметим, что $C^T=\left(W_{\#}^T\right)^*W^T$, поэтому по лемме 2, C^T является изоморфизмом в $\mathcal{F}^T$. Мы используем вариант метода ГУ для несамосопряженных задач [1]. При фиксированных $f,g\in\mathcal{F}^T$

вводим *функцию Благовещенского* по правилу

$$\psi_{n,t} := \left(u^f_{\cdot,n}, v^g_{\cdot,t}\right)_{\mathcal{H}^T} = \sum_{k=1}^{T} u^f_{k,n}\overline{v^g_{k,t}}.$$

Покажем, что $\psi_{n,t}$ удовлетворяет некоторому разностному уравнению. Действительно, проводя вычисления мы видим что

$$\psi_{n,t+1} + \psi_{n,t-1} - \psi_{n+1,t} - \psi_{n-1,t} = \sum_{k=1}^{T} u^f_{k,n}\overline{\left(v^g_{k,t+1} + v^g_{k,t-1}\right)}$$
$$- \sum_{k=1}^{T}\left(u^f_{k,n+1} + u^f_{k,n-1}\right)\overline{v^g_{k,t}} = \sum_{k=1}^{T} u^f_{k,n}\overline{\left(\overline{a_k}v^g_{k+1,t} + \overline{a_{k-1}}v^g_{k-1,t} + \overline{b_k}v^g_{k,t}\right)}$$
$$- \sum_{k=1}^{T}\left(a_k u^f_{k+1,n} + a_{k-1}u^f_{k-1,n} + b_k u^f_{k,n}\right)\overline{v^g_{k,t}}$$
$$= \sum_{k=1}^{T} u^f_{k,n}\left(a_k\overline{v^g_{k+1,t}} + a_{k-1}\overline{v^g_{k-1,t}}\right) - \sum_{k=1}^{T}\left(a_k u^f_{k+1,n} + a_{k-1}u^f_{k-1,n}\right)\overline{v^g_{k,t}}$$
$$= +a_0 u^f_{1,n}\overline{v^g_{0,t}} - a_0 u^f_{0,n}\overline{v^g_{1,t}} + a_T u^f_{T,n}\overline{v^g_{T+1,t}} - a_T u^f_{T+1,n}\overline{v^g_{T,t}}$$
$$= a_0\left[(Rf)_n\overline{g_t} - f_n\overline{(R_\# g)_t}\right].$$

Таким образом, мы пришли к следующему разностному уравнению на функцию $\psi_{n,t}$:

$$\begin{cases}\psi_{n,t+1} + \psi_{n,t-1} - \psi_{n+1,t} - \psi_{n-1,t} = h_{n,t}, \quad n,t \in \mathbb{N}_0,\\ \psi_{0,t} = 0, \psi_{n,0} = 0,\end{cases} \tag{14}$$
$$h_{n,t} = a_0\left[g_t(Rf)_n - f_n(Rg)_t\right].$$

Определим множество

$$K(n,t) := \{(n,t)\}\cup\{(n-1,t-1),(n+1,t-1)\}\cup\{(n-2,t-2),(n,t-2),$$
$$(n+2,t-2)\}\cup\ldots\cup\{(n-t,0),(n-t+2,0),\ldots,(n+t-2,0),(n+t,0)\}$$
$$= \bigcup_{\tau=0}^{t}\bigcup_{k=0}^{\tau}(n-\tau+2k, t-\tau).$$

Решение (14) определяется формулой (см. [8, 9])

$$\psi_{n,t} = \sum_{(k,\tau)\in K(n,t-1)} h(k,\tau).$$

Заметим, что $\psi_{T,T} = \big(C^T f, g\big)$, поэтому

$$\big(C^T f, g\big) = \sum_{(k,\tau)\in K(T,T-1)} h(k,\tau). \tag{15}$$

Обратим внимание на то, что в правой части (15) аргумент k принимает значения от 1 до $2T-1$. Доопределим $f \in \mathcal{F}^T$, $f = (f_0, \ldots, f_{T-1})$ до $f \in \mathcal{F}^{2T}$ как

$$f_T = 0, \quad f_{T+k} = -f_{T-k},\ k = 1, 2, \ldots, T-1$$

и тогда $\sum_{k,\tau\in K(T,T-1)} f_k(R^T g)_\tau = 0$. Поэтому из (15) получим, что

$$\begin{aligned}\big(C^T f, g\big) &= \sum_{k,\tau\in K(T,T-1)} g_\tau \left(R^{2T} f\right)_k \\ &= g_0 \left[\left(R^{2T} f\right)_1 + \left(R^{2T} f\right)_3 + \ldots + \left(R^{2T} f\right)_{2T-1}\right] \\ &+ g_1 \left[\left(R^{2T} f\right)_2 + \left(R^{2T} f\right)_4 + \ldots + \left(R^{2T} f\right)_{2T-2}\right] + \ldots + g_{T-1} \left(R^{2T} f\right)_T.\end{aligned}$$

Последнее соотношение дает

$$\begin{aligned}&C^T f \\ &= \left(\left(R^{2T}f\right)_1 + \ldots + \left(R^{2T}f\right)_{2T-1}, \left(R^{2T}f\right)_2 + \ldots + \left(R^{2T}f\right)_{2T-2}, \ldots, \left(R^{2T}f\right)_T\right),\end{aligned}$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Через B^τ обозначим матрицу, транспонированную к $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Используя соотношения (11) сформулируем следующее замечание.

Замечание 1. Связывающий оператор является комплексно-симметричным:

$$\left(C^T\right)^* = \overline{C^T} \quad \text{или} \quad \left(C^T\right)^\tau = C^T.$$

§3. Обратная задача

Ввиду конечной скорости распространения волн в системе (2), решение u^f зависит от коэффициентов a_n, b_n следующим образом: для $M \in \mathbb{N}$, $u^f_{M-1,M}$ зависит от $\{a_0, \ldots, a_{M-1}\}$, $\{b_1, \ldots, b_{M-1}\}$, из чего следует, что $u^f_{1,2M-1}$ зависит от того же набора параметров:

Замечание 2. Оператор реакции R^{2T}, или, что эквивалентно, вектор реакции $(r_0, r_1, \ldots, r_{2T-2})$ зависит от $\{a_0,\ldots,a_{T-1}\}$, $\{b_1,\ldots,b_T\}$.

Таким образом, естественная постановка динамической обратной задачи для системы (2) следующая: по оператору реакции R^{2T} восстановить $\{a_0, \ldots, a_{T-1}\}$ и $\{b_1, \ldots, b_{T-1}\}$.

Также отметим, что $a_0 = r_0$, что следует из (5).

3.1. Уравнения Крейна. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и y – решение задачи

$$\begin{cases} a_k y_{k+1} + a_{k-1} y_{k-1} + b_k y_k = 0, & \\ y_0 = \alpha, & y_1 = \beta. \end{cases} \tag{16}$$

Поставим следующую задачу управления: найти $f^T \in \mathcal{F}^T$ такое, что

$$\left(W^T f^T\right)_k = y_k, \quad k = 1, \ldots, T. \tag{17}$$

Согласно Лемме 2 эта задача имеет единственное решение. Пусть $\varkappa^T$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \varkappa^T_{t+1} + \varkappa^T_{t-1} = 0, & t = 0, \ldots, T, \\ \varkappa^T_T = 0, \ \ \varkappa^T_{T-1} = 1. \end{cases} \tag{18}$$

Покажем, что f^T удовлетворяет уравнению Крейна:

Теорема 2. *Управление f^T, определенное задачей (17), удовлетворяет следующему уравнению в $\mathcal{F}^T$:*

$$C^T f^T = a_0 \left[\beta \varkappa^T - \alpha \left(R^T_{\#}\right)^* \varkappa^T\right]. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть f^T – решение (17). Заметим, что для любого фиксированного $g \in \mathcal{F}^T$

$$v^g_{k,T} = \sum_{t=1}^{T-1} \left(v^g_{k,t+1} + v^g_{k,t-1}\right) \varkappa^T_t, \quad k \leqslant T. \tag{20}$$

Действительно, изменение порядка суммирования в правой части (20) дает

$$\sum_{t=1}^{T-1} \left(v^g_{k,t+1} + v^g_{k,t-1}\right) \varkappa^T_t = \sum_{t=1}^{T-1} \left(\varkappa^T_{t+1} + \varkappa^T_{t-1}\right) v^g_{k,t} + v^g_{k,0} \varkappa^T_1 - v^g_{k,T} \varkappa^T_{T-1},$$

что, в силу (18), доказывает равенство (20). Используя это наблюдение, мы можем преобразовать

$$\left(C^T f^T, g\right) = \sum_{k=1}^{T} y_k \overline{v^g_{k,T}} = \sum_{k=1}^{T}\sum_{t=0}^{T-1} \varkappa^T_t y_k \overline{\left(v^g_{k,t+1} + v^g_{k,t-1}\right)}$$
$$= \sum_{t=0}^{T-1} \varkappa^T_t \left(\sum_{k=1}^{T}\left(a_k \overline{v^g_{k+1,t}} y_k + a_{k-1}\overline{v^g_{k-1,t}} y_k + b_k \overline{v^g_{k,t}} y_k\right)\right)$$
$$= \sum_{t=0}^{T-1} \varkappa^T_t \left(\sum_{k=1}^{T}\left(\overline{v^g_{k,t}}(a_k y_{k+1} + a_{k-1}y_{k-1} + b_k y_k\right) + a_0\overline{v^g_{0,t}} y_1\right.$$
$$\left. + a_T \overline{v^g_{T+1,t}} y_T - a_0 \overline{v^g_{1,t}} y_0 - a_T \overline{v^g_{T,t}} y_{T+1}\right) = \sum_{t=0}^{T-1} \varkappa^T_t \left(a_0 \beta \overline{g_t} - a_0 \alpha \overline{\left(R^T_{\#} g\right)_t}\right)$$
$$= \left(\varkappa^T, \overline{a_0}\left[\overline{\beta} g - \overline{\alpha}\left(R^T_{\#} g\right)\right]\right)_{\mathcal{F}^T} = \left(a_0\left[\beta \varkappa^T - \alpha\left(\left(R^T_{\#}\right)^* \varkappa^T\right)\right], g\right)_{\mathcal{F}^T}.$$

Откуда следует утверждение теоремы (19). □

Теперь опишем процедуру восстановления коэффициентов a_0, a_n, b_n, $n = 1, \ldots, T-1$ из решений уравнений Крейна (19) $f^\tau \in \mathcal{F}^\tau$ для $\tau = 1, \ldots, T$. Из (3) и (4) мы делаем вывод, что

$$u^{f^T}_{T,T} = \prod_{k=0}^{T-1} a_k f^T_0,$$
$$u^{f^T}_{T-1,T} = \prod_{k=0}^{T-2} a_k f^T_1 + \prod_{k=0}^{T-2} a_k (b_1 + b_2 + \ldots + b_{T-1}) f^T_0.$$

Заметим, что мы знаем, что $a_0 = r_0$. Пусть $T = 2$, тогда вышестоящие тождества превратятся в

$$y_2 = u^{f^2}_{2,2} = a_0 a_1 f^2_0, \tag{21}$$
$$y_1 = u^{f^2}_{1,2} = a_0 f^2_1 + a_0 b_1 f^2_0. \tag{22}$$

В (22) мы знаем $y_1 = \beta$, a_0, f^2_1, f^2_0, поэтому мы можем восстановить b_1. С другой стороны, используя (16), получим систему

$$\begin{cases} y_2 = a_0 a_1 f^2_0, \\ a_1 y_2 + a_0 \alpha + b_1 \beta = 0 \end{cases}$$

Поскольку $a_1 \neq 0$, мы можем восстановить $(a_1)^2$. Будем действовать по индукции: предполагая, что мы уже восстановили b_{k-2}, $(a_{k-2})^2$ для $k \leqslant n$ и мы знаем, что $y_{k-1} = \prod_{i=0}^{k-2} a_i f_0^{k-1}$, восстанавливаем $(a_{n-1})^2$, b_{n-1}, учитывая, что

$$y_n = u_{n,n}^{f^n} = \prod_{k=0}^{n-2} a_k a_{n-1} f_0^n, \tag{23}$$

$$y_{n-1} = u_{n-1,n}^{f^n} = \prod_{k=0}^{n-2} a_k f_1^n + \prod_{k=0}^{n-2} a_k (b_1 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1}) f_0^n, \tag{24}$$

и что мы знаем f_0^n, f_1^n и $(a_k)^2$, b_k, $k \leqslant n-2$, подставляем $y_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-2} a_k f_0^{n-1}$ в (24), сокращаем $\prod_{k=0}^{n-2} a_k$ и восстанавливаем b_{n-1}. Используя (16) и (23) приходим к следующим равенствам

$$y_n = \prod_{k=0}^{n-2} a_k a_{n-1} f_0^n,$$
$$a_{n-1} y_n + a_{n-2} y_{n-2} + b_{n-1} y_{n-1} = 0.$$

Перепишем последнее, используя представления для y_n, y_{n-1} и y_{n-2}:

$$(a_{n-1})^2 \prod_{k=0}^{n-2} a_k f_0^n + \prod_{k=0}^{n-2} a_k f_0^{n-2} + b_{n-1} \prod_{k=0}^{n-2} a_k f_0^{n-1} = 0,$$

откуда мы можем восстановить $(a_{n-1})^2$.

Замечание 3. Описанная процедура позволяет восстановить только $(a_k)^2$, $k = 1, \ldots$.

3.2. Метод факторизации. Воспользуемся тем, что матрица C^T имеет особую структуру (12) – она является произведением треугольной матрицы и ее транспонированной. Перепишем оператор W^T как $W^T = V^T J_T$, где

$$W^T f = \begin{pmatrix} a_0 & w_{1,1} & w_{1,2} & \ldots & w_{1,T-1} \\ 0 & a_0 a_1 & w_{2,2} & \ldots & w_{2,T-1} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & \prod_{j=1}^{k-1} a_j & \ldots & w_{k,T-1} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \prod_{j=1}^{T-1} a_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ . \\ f_{T-k-1} \\ . \\ f_{T-1} \end{pmatrix}$$

Используя определение (12) и обратимость W^T (см. лемму 2), получаем, что

$$C^T = \left(W^T_{\#}\right)^* W^T, \quad \text{или} \quad \left(\left(W^T_{\#}\right)^{-1}\right)^* C^T \left(W^T\right)^{-1} = I.$$

Используя (11), мы можем переписать последнее равенство как

$$\left(\left(V^T\right)^{-1}\right)^\tau C_T \left(V^T\right)^{-1} = I, \quad C_T = J_T C^T J_T, \tag{25}$$

где матрица C_T содержит элементы $c_{i,j} = \{C_T\}_{ij} = C_{T+1-j,T+1-i}$,

$$C_T = a_0 \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{T-1} \\ r_1 & r_0 + r_2 & r_1 + r_3 & \dots & .. \\ r_2 & r_1 + r_3 & r_0 + r_2 + r_4 & \dots & .. \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \tag{26}$$

и $\left(V^T\right)^{-1}$ имеет вид

$$\left(V^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,T} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & .. \\ . & . & . & a_{T-1,T-1} & a_{T-1,T} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{T,T} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Мы умножаем k-ю строку V^T на k-й столбец $\left(V^T\right)^{-1}$, чтобы получить $a_{k,k} a_0 a_1 \dots a_{k-1} = 1$, поэтому диагональные элементы (27) удовлетворяют соотношению:

$$a_{k,k} = \left(\prod_{j=0}^{k-1} a_j\right)^{-1}. \tag{28}$$

Умножение k-й строки V^T на $k+1$-й столбец $\left(V^T\right)^{-1}$ приводит к соотношению

$$a_{k,k+1} a_0 a_1 \dots a_{k-1} + a_{k+1,k+1} w_{k,k} = 0,$$

откуда мы делаем вывод, что

$$a_{k,k+1} = -\left(\prod_{j=0}^{k} a_j\right)^{-2} a_k w_{k,k}, \quad k = 1, \dots, T-1. \tag{29}$$

Все вышесказанное приводит к эквивалентной форме (25):

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & . & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 0 & . \\ . & . & . & . \\ a_{1,T} & . & . & a_{T,T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & .. & .. & c_{1T} \\ .. & .. & .. & .. \\ . & . & . & . \\ c_{T1} & .. & & c_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .. & a_{1,T} \\ 0 & a_{2,2} & .. & a_{2,T} \\ . & . & . & . \\ 0 & \dots & \dots & a_{T,T} \end{pmatrix} = I \tag{30}$$

В приведенном выше равенстве c_{ij} заданы (см. (26)), элементы a_{ij} неизвестны. Прямым следствием (30) является равенство определителей:

$$\det\left(\left(V^T\right)^{-1}\right)^{\tau} \det C_T \det\left(\left(V^T\right)^{-1}\right) = 1,$$

которое дает

$$(a_{1,1})^2 * \dots * (a_{T,T})^2 = (\det C_T)^{-1}.$$

Из приведенного выше равенства получаем, что

$$(a_{1,1})^2 = (\det C_1)^{-1}, \ (a_{2,2})^2 = \left(\frac{\det C_2}{\det C_1}\right)^{-1}, \ (a_{k,k})^2 = \left(\frac{\det C_k}{\det C_{k-1}}\right)^{-1}.$$

Объединив последние соотношения с (28), мы приходим к выводу, что

$$(a_0)^2 * \dots * (a_{k-1})^2 = \frac{\det C_k}{\det C_{k-1}},$$

аналогично для $k+1$:

$$(a_0)^2 * \dots * (a_k)^2 = \frac{\det C_{k+1}}{\det C_k}.$$

Два приведенных выше соотношения приводят к

$$(a_k)^2 = \frac{\det C_{k+1} \det C_{k-1}}{\det C_k}, \quad k = 1, \dots, T-1. \tag{31}$$

Здесь мы положили, что $\det C_0 = 1$, $\det C_{-1} = 1$.

Теперь, используя равенство (30), мы записываем уравнение для последнего столбца $\left(V^T\right)^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & . & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 0 & . \\ . & . & . & . \\ a_{1,T} & . & . & a_{T,T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & .. & .. & c_{1,T} \\ .. & .. & .. & .. \\ . & . & . & . \\ c_{T,1} & .. & & c_{T,T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,T} \\ a_{2,T} \\ . \\ a_{T,T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $a_{T,T}$ нам известно, мы перепишем приведенное выше равенство в виде уравнения на $(a_{1,T},\dots,a_{T-1,T})^*$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & . & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 0 & . \\ . & . & . & . \\ a_{1,T-1} & . & . & a_{T-1,T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & .. & .. & c_{1,T} \\ .. & .. & .. & .. \\ . & . & . & . \\ c_{T-1,1} & .. & & c_{T-1,T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,T} \\ a_{2,T} \\ . \\ a_{T-1,T} \end{pmatrix}$$
$$+a_{T,T} \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & . & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 0 & . \\ . & . & . & . \\ a_{1,T-1} & . & . & a_{T-1,T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,T} \\ c_{2,T} \\ . \\ c_{T-1,T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix},$$

что эквивалентно уравнению

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & .. & .. & c_{1,T} \\ .. & .. & .. & .. \\ . & . & . & . \\ c_{T-1,1} & .. & & c_{T-1,T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,T} \\ a_{2,T} \\ . \\ a_{T-1,T} \end{pmatrix} = -a_{T,T} \begin{pmatrix} c_{1,T} \\ c_{2,T} \\ . \\ c_{T-1,T} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Введем обозначения:

$$C_{k-1,k} := \begin{pmatrix} c_{1,1} & .. & .. & c_{1,k-2} & c_{1,k} \\ .. & .. & .. & .. & \\ . & . & . & . & \\ c_{k-1,1} & .. & & c_{k-1,k-2} & c_{k-1,k} \end{pmatrix},$$

то есть $C_{k-1,k}$ получается из C_{k-1} путем замены последнего столбца на $(c_{1,k},\dots,c_{k-1,k})^T$. Затем из (32) делаем вывод, что

$$a_{T-1,T} = -a_{T,T}\frac{\det C_{T-1,T}}{\det C_{T-1}}, \tag{33}$$

где предполагается, что $\det C_{-1,0} = 0$. С другой стороны, из (28), (29) видно, что

$$a_{T-1,T} = \left(\prod_{j=0}^{T-1} a_j\right)^{-1} \sum_{k=1}^{T-1} b_k. \tag{34}$$

Приравнивание (33) и (34) дает равенства

$$\sum_{k=1}^{T-1} b_k = -\frac{\det C_{T-1,T}}{\det C_{T-1}}, \quad \sum_{k=1}^{T} b_k = -\frac{\det C_{T,T+1}}{\det C_T},$$

откуда

$$b_k = -\frac{\det C_{k,k+1}}{\det C_k} + \frac{\det C_{k-1,k}}{\det C_{k-1}}, \quad k = 1, \dots, T-1. \tag{35}$$

Соотношения (31), как и в подходе с использованием уравнения Крейна, показывают, что, в отличие от случая вещественной матрицы Якоби, применение метода факторизации позволяет восстановить $(a_k)^2$, $k = 1, \dots, T-1$. Для восстановления a_k необходимо использовать дополнительную информацию, например последовательность знаков. Обратим внимание, что результаты, полученные для динамических обратных данных, соответствуют результатам, полученным для спектральных обратных данных в [7].

Мы использовали два метода для восстановления коэффициентов $(a_k)^2$, b_k, $k = 1, \dots$. Теперь мы покажем, что невозможность восстановления коэффициентов a_k не является слабым местом метода, а является особенностью задачи.

Теорема 3.

(1) *Для $f \in \mathcal{F}$ значение $u^f_{n,t}$ нечетно относительно $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ и четно относительно $a_n, a_{n+1}, \dots$.*

(2) *Вектор реакции зависит от $(a_1)^2, (a_2)^2, \dots$*

Доказательство. Второе утверждение следует из того, что $r_{k+1} = u^\delta_{1,k}$, $k = 0, 1, \dots$. Итак, нам осталось доказать первое. При $t = 1, 2, 3$ утверждение можно проверить прямыми вычислениями, далее действуем по индукции: предполагая, что утверждение справедливо для некоторых t, мы докажем, что оно верно для $t+1$. Перепишем уравнение в виде

$$u_{n,t+1} = -u_{n,t-1} + a_n u_{n+1,t} + a_{n-1} u_{n-1,t} + b_n u_{n,t} = 0 \tag{36}$$

Первое и последнее слагаемое в правой части приведенного выше равенства удовлетворяют предположению индукции. Во втором слагаемом множитель $u_{n+1,t}$ нечетен относительно $a_1, \dots, a_n$ и четен относительно $a_{n+1}, \dots$, поэтому второе слагаемое нечетно относительно $a_1, \dots, a_{n-1}$ и четно относительно $a_n, \dots$. Аналогично, множитель $u_{n-1,t}$ в третьем члене нечетен относительно $a_1, \dots, a_{n-2}$ и четен относительно $a_{n-1}, \dots$. Таким образом, после умножения на a_{n-1} третье слагаемое нечетно относительно $a_1, \dots, a_{n-1}$ и четно относительно $a_n, \dots$, что завершает доказательство. □

Эта теорема показывает что динамические обратные данные (оператор реакции R) содержит информацию только о квадратах a_k, $k = 1, 2 \ldots$. Поэтому для восстановления значений a_k требуется дополнительно задать последовательность знаков.

3.3. Характеризация обратных данных. Во втором разделе мы рассмотрели прямые задачи для систем (2) и (10): для $(a_0, \ldots, a_{T-1})$, $(b_1, \ldots, b_{T-1})$ мы построили матрицы W^T, $W^T_\#$ (3), (4), вектор реакции $(r_0, r_1, \ldots, r_{2T-2})$ (см. (5)) и связывающий оператор C_T, определенный в (13), (26). Из Леммы 2 мы знаем, что C^T (и C_T) – изоморфизм в $\mathcal{F}^T$. Мы также показали, что если вектор $(r_0, r_1, \ldots, r_{2T-2})$ является вектором реакции, соответствующим системе (2) с коэффициентами $a_0, \ldots, a_{T-1}$, $b_1, \ldots, b_{T-1}$,, то можно восстановить эти b_k и $(a_k)^2$ по $a_0 = r_0$ и формулам (31) и (35).

Теперь поставим вопрос: можно ли определить, является ли вектор $(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{2T-2})$ вектором реакции динамической системы (2) с некоторым $(a_0, \ldots, a_{T-1})$ $(b_1, \ldots, b_{T-1})$? Ответом является следующая теорема.

Теорема 4. *Вектор* $(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{2T-2})$ *является вектором реакции динамической системы* (2) *тогда и только тогда, когда комплексная симметричная матрица* C^{T-k}, $k = 0, 1, \ldots, T-1$, *построенная по* (13)*, является изоморфизмом в* $\mathcal{F}^{T-k}$.

Доказательство. Сначала заметим, что в условиях теоремы мы можем заменить C^T на C_T (26). Необходимая часть теоремы доказана в предыдущих разделах. Нам осталось доказать достаточность этого условия.

Пусть у нас есть вектор $(r_0, r_1, \ldots, r_{2T-2})$ такой, что матрица C_T, построенная из него с помощью (26), удовлетворяет условиям теоремы.

Тогда мы можем построить последовательности $(a_0, b_1, \ldots, b_{T-1})$, используя $a_0 = r_0$ и формулы (35) и взять произвольную последовательность знаков для восстановления $(a_1, \ldots, a_{T-1})$ с помощью (31). Рассмотрим динамическую систему (2) с этими коэффициентами. Для этой системы мы строим вектор реакции $(r_0^{\text{new}}, r_1^{\text{new}}, \ldots, r_{2T-2}^{\text{new}})$, связывающий оператор K^T и K_T с помощью (13) и (26). Покажем, что вектор реакции совпадает с заданным.

У нас есть две матрицы, построенные с помощью (26), одна происходит из вектора $(r_0, r_1, \ldots, r_{2T-2})$, а другая – из $(r_0^{\text{new}}, r_1^{\text{new}}, \ldots, r_{2T-2}^{\text{new}})$. Их обеих объединяет то, что C_T и K_T являются изоморфизмами

(C_T по условию теоремы и K_T как связывающий оператор). Заметим, что если вычислить коэффициенты $(a_1^2,\dots,a_{T-1}^2)$, $(b_1,\dots,b_{T-1})$ с помощью (31) и (35) из любой из матриц C_T и K_T, мы получим один и тот же ответ. Но тогда получаем, что для $k=1,\dots,T-1$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\det C_{k-1,\,k}}{\det C_{k-1}}-\frac{\det C_{k,\,k+1}}{\det C_k}=\frac{\det K_{k-1,\,k}}{\det K_{k-1}}-\frac{\det K_{k,\,k+1}}{\det K_k},\\
&\frac{(\det C_{k+1})\,(\det C_{k-1})}{(\det C_k)^2}=\frac{(\det K_{k+1})\,(\det K_{k-1})}{(\det K_k)^2},\\
&\det C_0=\det K_0=1,\quad \det C_{-1}=\det K_{-1}=1,\\
&\det C_{-1,\,0}=\det K_{-1,\,0}=0.
\end{aligned}$$

Из этих равенств получаем, что

$$\det C_k=\det K^k,$$
$$\det C_{k,\,k+1}=\det K_{k,\,k+1}.$$

Из приведенных выше соотношений сразу следует, что

$$r_k=r_k^{\mathrm{new}},\quad k=1,\dots,2T-2.$$

что завершает доказательство. □

Приведем ниже простой пример матрицы C_T, который покажет необходимость условия того, что каждый блок C^{T-k}, $k=0,1,\dots T-1$ является изоморфизмом (а не только последний C^T, как в самосопряженном случае), см. [5]. Возьмем $r_0=1$, $r_1=1$, $r_2=0$, $r_3=0$, $r_4=-1$, в данном случае в соответствии с (13), (26)

$$C_T=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{37}$$

поэтому C_T — изоморфизм, но C_{T-1} не обратим и формулы (31) и (35) неприменимы.

Список литературы

1. S. A. Avdonin, M. I. Belishev, *Boundary control and the dynamic inverse problem for a nonseladjoint Sturm-Louivllle operator.* — Control and Cybernetics **25**, No. 3 (1996), 429–440.
2. S. A. Avdonin, V. S. Mikhaylov, *The boundary control approach to inverse spectral theory.* — Inverse Problems, **26**, No. 4 (2010), 045009, 19 pp.
3. F. V. Atkinson *Discrete and continuous boundary problems*, Acad. Press, 1964.

4. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.*— Inverse Problems, **23** (2007), R1.
5. M. I. Belishev, T. Sh. Khabibullin, *Characterization of data in dynamical inverse problem for the 1d wave equation with matrix potential.* — Зап. научню семиню ПОМИ **493** (2020), 48–72.
6. M. I. Belishev, V. S. Mikhailov, *Unified approach to classical equations of inverse problem theory.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **20**, No. 4 (2012), 461–488.
7. G. Sh. Guseinov, *Determination of an infinite non-self-adjoint Jacobi matrix from its generalized spectral function.* — Mat. Zametki **23**, No. 2 (1978), 237–248.
8. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Dynamical inverse problem for the discrete Schrödinger operator.* — Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics **7**, No. 5 (2016), 842–854.
9. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Dynamic inverse problem for Jacobi matrices.* — Inverse Problems and Imaging **13**, No. 3 (2019), 431–447.
10. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Inverse problem for dynamical system associated with Jacobi matrices and classical moment problems.* — J. Math. Analys. Appl. **487**, No. 1 (2020), 12397.

Mikhailov A. S., Mikhailov V. S. Dynamic inverse problem for complex Jacobi matrices.

We consider the dynamic inverse problem for a dynamical system with discrete time associated with a semi-infinite complex Jacobi matrix. We propose two approaches of recovering coefficients from dynamic response operator and provide a characterization of dynamic inverse data.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук,
наб. р. Фонтанки 27; С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9, Санкт-Петербург 199034, Россия
E-mail: mikhaylov@pdmi.ras.ru

Поступило 5 октября, 2023 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук,
наб. р. Фонтанки 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ftvsm78@gmail.com