

М. А. Лялинов

**СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ СУЩЕСТВЕННОГО
СПЕКТРА В ЗАДАЧЕ ОБ АКУСТИЧЕСКИХ
КОЛЕБАНИЯХ В КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ,
ОГРАНИЧЕННОЙ УГЛОВЫМ СОЧЛЕНЕНИЕМ
ДВУХ ТОНКИХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ УПРУГИХ
МЕМБРАН**

§1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Данная работа продолжает изучение собственных функций в задаче о колебаниях в акустической среде, ограниченной угловым сочленением двух тонких мембран, предложенное в статье [1], где подробно описана мотивация и физическая постановка задачи, а также построены собственные функции дискретного спектра соответствующего оператора. Теперь мы обращаемся к исследованию (обобщенных) собственных функций отрицательного непрерывного (существенного) спектра.

Рассмотрим полярные координаты в области $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup Ox = \{(r, \varphi) : r > 0, |\varphi| < \Phi\}$, (Рис. 1), $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\partial\Omega = l_+ \cup l_-$. Мы ищем классические решения u в Ω , которые удовлетворяют уравнению

$$-\Delta u(r, \varphi; \varkappa) = -\varkappa^2 u(r, \varphi; \varkappa), \quad (1)$$

$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$. В нашем случае спектральный параметр $\lambda = -\varkappa^2$ отрицательный и удовлетворяет неравенству $-v_0^2 < -\varkappa^2 < 0$, v_0 постоянная такая, что $0 < v_0 < 1$ и является корнем уравнения $v^3 - (k_M^2 - k^2)v + \nu_* = 0$, см. [1].¹

Краевое условие на l_{\pm} имеет вид

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2 \right\} \frac{\pm 1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \nu_* u \Big|_{\varphi=\pm\Phi} = 0, \quad (2)$$

Ключевые слова: собственные функции, существенный спектр, клин, функциональные уравнения, тонкие мембраны.

Работа поддержана Российским Научным Фондом, <https://rscf.ru/project/22-11-00070>.

¹Значение $\lambda_* = -v_0^2$ определяет нижнюю границу существенного спектра соответствующего полуограниченного самосопряженного оператора.

где $\nu_* = \rho\omega^2\mathcal{N}_* > 0$, $k_0^2 = k_M^2 - k_e^2 > 0$ описаны работе [1], нормаль n на l_{\pm} направлена из Ω_{\pm} и $\frac{\partial}{\partial n}\Big|_{l_{\pm}} = \pm\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\pm\Phi}$.

Однако, мы рассмотрим только симметричные относительно оси Ox решения, $u(r, \varphi; \varkappa) = u(r, -\varphi; \varkappa)$. Тем самым, достаточно найти u в Ω_+ . В итоге, мы имеем краевое условие на Ox

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad r > 0. \quad (3)$$

Известно, что для формулировки краевой задачи для уравнения второго порядка и краевого условия более высокого порядка, т.е. условия (2) на поверхности тонкой мембраны, необходимо добавить так называемое контактное условие, см. [2], главу 8 в [3]. В нашем случае это условие жестко зажима края мембраны at the point O ,

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0, r=0+} = 0. \quad (4)$$

Контактное условие (4) подразумевает, что мембрана жестко зафиксирована и неподвижна в точке O так, что отсутствует ее смещение в направлении ортогональном к линии l_+ в этой точке.

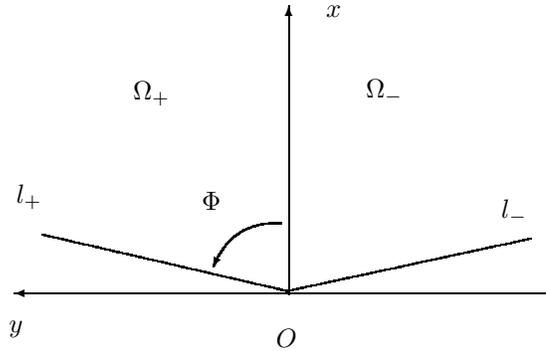
Мы ищем классическое решение, которое удовлетворяет условию Мейкснера в угловой точке

$$u(r, \varphi) = B + O(r^{\delta}), \quad r \rightarrow 0, \quad \delta > 0, \quad (5)$$

равномерно по φ , B постоянная. Условие (5) означает, что $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_+)$.

Мы хотим рассмотреть $-\varkappa^2 \in (-v_0^2, 0)$, для которых задача (1)–(5) имеет нетривиальные решения, не принадлежащие $H^1(\Omega_+)$, ввиду поведения решений на бесконечности в Ω_+ . Мы увидим, что эти решения могут быть интерпретированы как поверхностные волны, сосредоточенные вблизи мембраны.

Классическое решение задачи в угловой области естественно искать в виде интеграла Зоммерфельда с неизвестной мероморфной функцией в подынтегральном выражении – трансформантой Зоммерфельда. Из краевых условий следует, что неизвестная трансформанта удовлетворяет функциональным уравнениям (Малюжинца). Основная техническая часть работы связана с построением этой неизвестной трансформанты в специальном классе мероморфных функций, не имеющих полюсов в некоторой симметричной относительно начала полосе. Последнее обстоятельство обеспечивает правильное асимптотическое

Рис. 1. Область $\overline{\Omega_+ \cup \Omega_-}$, занятая акустической средой

поведение решений задачи на бесконечности в Ω_+ , а ограниченность трансформанты на бесконечности в этой полосе обеспечивает правильное поведение в окрестности вершины угла. Вычисление асимптотики интеграла Зоммерфельда при $r \rightarrow \infty$ производится с помощью метода перевала. Мы покажем, что решения имеют вид поверхностных волн, которые экспоненциально локализованы в окрестности мембран и распространяются вдоль их поверхности.

§2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Естественно искать решение уравнения (1) в виде интегрального представления Зоммерфельда в Ω_+ ,

$$u(r, \varphi; \varkappa) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\varkappa r \cos(z)} f(z + \varphi), \quad (6)$$

f мероморфная функция (трансформанта Зоммерфельда), зависящая от $\varkappa > 0$ и других параметров. Контур интегрирования Γ показан на Рис. 2, $\Gamma_+ = (i\infty + \pi, ib_0 + \pi] \cup [ib_0 + \pi, ib_0 - \pi] \cup [ib_0 - \pi, \pi + i\infty)$, $b_0 > 0$ и Γ_- симметричен с Γ_+ относительно начала O .

Подстановка интеграла в краевое условие (2) приводит в функциональному уравнению, см. [1],

$$[\sin^3 z - (1+D) \sin z + \nu] f(z+\Phi) - [\sin^3(-z) + (1+D) \sin(-z) + \nu] f(-z+\Phi) = \sin z (c_0 + c_1 \cos z), \quad (7)$$

где введены обозначения

$$D = \frac{k_0^2}{\varkappa^2}, \quad \nu = \frac{\nu_*}{\varkappa^3}$$

и

$$1 + D = 1 + \frac{k_M^2 - k_e^2}{k_e^2 - k^2} = \frac{k_M^2 - k^2}{\varkappa^2}.$$

Постоянные c_0, c_1 неизвестны. Уравнение (7) необходимо решать в некотором классе мероморфных функций.

Аналогично, из краевого условия (3) находим

$$f(z) + f(-z) = 0, \quad (8)$$

т.е. трансформанта Зоммерфельда f нечетна. Ввиду (8) и симметрии контура интегрирования мы запишем (6) в виде

$$u(r, \varphi; \varkappa) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\varkappa r \cos(z)} \frac{1}{2} [f(z + \varphi) + f(z - \varphi)] \quad (9)$$

так, что $u(r, \varphi; \varkappa) = u(r, -\varphi; \varkappa)$.

Будем считать, что f мероморфна, имеет полюсы в лишь в ограниченной полосе $|\operatorname{Im}(z)| < b_0$, голоморфна в

$$\Pi(-a, a) = \{z : -a < \operatorname{Re}(z) < a\}$$

для некоторого $a > 0$ и имеет конечные пределы $f(\pm i\infty)$, причем, $f(i\infty) = -f(-i\infty)$. Потребуем также

$$|f(z) - f(\pm i\infty)| \leq C \exp(-\delta|z|) \quad (10)$$

при $z \rightarrow \pm i\infty$ в $\Pi(-a, a)$ для некоего $\delta > 0$. Обозначим этот класс функций через \mathcal{M} .

Пусть $w = \sin z$. Рассмотрим разложение на множители полинома, коэффициента в уравнении (7)

$$w^3 - \frac{k_M^2 - k^2}{\varkappa^2} w + \frac{\nu_*}{\varkappa^3} = (w - v_0/\varkappa)(w - v_1/\varkappa)(w - v_2/\varkappa),$$

где $v_j, j = 0, 1, 2$ вещественные корни полинома $v^3 - (k_M^2 - k^2)v + \nu_* = 0$. Относительно этих корней и, тем самым, относительно ‘физических’

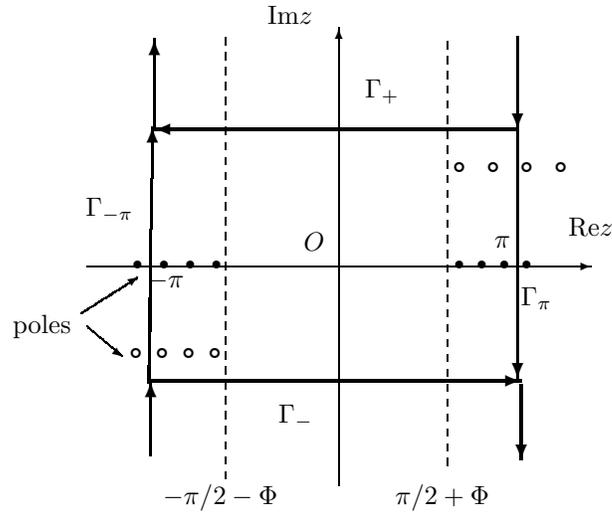


Рис. 2. Контур интегрирования $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ и полюсы $f(\cdot)$

параметров задачи k_M, k, ν_*, Φ , в нашей работе [1] сделаны предположения, которые достаточны для существования дискретного спектра левее существенного. А именно, введено непустое множество G_* параметров k_M, k, ν_*, Φ , для которых дискретный спектр не пуст. Мы считаем, что эти условия выполнены.

Мы хотим построить решения для значений спектрального параметра $-\varkappa^2 \in (-v_0^2, 0)$. Дополнительно к сказанному выше предположим, что корни $v_j, j = 0, 1, 2$ таковы, что

$$\frac{v_0}{\varkappa} > 1, \quad \frac{v_1}{\varkappa} > 1, \quad \frac{v_2}{\varkappa} < -1 \quad (11)$$

для $-\varkappa^2 \in (-v_0^2, 0)$.

Условия (11) и принадлежность физических параметров множеству G_* позволят построить искомые собственные функции непрерывного (существенного) спектра в условиях существования его непустой дискретной компоненты. В этих условиях удобно ввести параметризацию

корней полинома

$$\begin{aligned}\frac{v_0}{\varkappa} &= \sin \vartheta_0, & \vartheta_0 &= \pi/2 + i\tau_0(\varkappa), \\ \frac{v_1}{\varkappa} &= \sin \vartheta_1, & \vartheta_1 &= \pi/2 + i\tau_1(\varkappa), \\ \frac{v_2}{\varkappa} &= \sin \vartheta_2, & \vartheta_2 &= -\pi/2 + i\tau_2(\varkappa),\end{aligned}$$

где ϑ_j , $j = 0, 1, 2$ определяются коэффициентами $1 + D$ и ν полинома, т.е. k_M, k, ν_* и \varkappa . Отметим, что выбор знака значений $\tau_j(\varkappa) = \pm \operatorname{arccosh}(v_j/\varkappa)$, $j = 0, 1, 2$ произволен.

Запишем функциональное (7) уравнение в виде

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^2 [\sin z - \sin \vartheta_j] f(z + \Phi) - \prod_{j=0}^2 [-\sin z - \sin \vartheta_j] f(-z + \Phi) \\ = \sin z (c_0 + c_1 \cos z),\end{aligned}\quad (12)$$

где f нечетна.

Основная идея наших дальнейших построений состоит в следующем. Мы найдем нечетные решения $f \in \mathcal{M}$ уравнения (12), которые не имеют полюсов внутри полосы $\Pi(-\Phi - \pi/2, \pi/2 + \Phi)$, тогда применение метода перевала к интегралу Зоммерфельда в (9) позволит показать, что решения ограничены при $r \rightarrow \infty$. Действительно, при вычислении асимптотики интеграла контур Γ деформируется в перевальные $\Gamma_\pi \cup \Gamma_{-\pi}$. Захваченные при этом полюсы, некоторые из которых показаны на Рис. 2, приводят к ограниченному или экспоненциально убывающему слагаемому в асимптотике. Убывающий на бесконечности вклад дают и точки перевала $\pm\pi$. Решения, представленные интегралом Зоммерфельда, не убывают на бесконечности на границе и не принадлежат $H^1(\Omega_+)$.

§3. ПОСТРОЕНИЕ ТРАНСФОРМАНТЫ ЗОММЕРФЕЛЬДА

Будем строить решения уравнения (12) в виде произведения вспомогательных функций

$$f(z) = f_0(z)F(z)S(z),\quad (13)$$

где f_0 четная и решает вспомогательное уравнение

$$[\sin z - \sin \vartheta_0]f_0(z + \Phi) - [-\sin z - \sin \vartheta_0]f_0(-z + \Phi) = 0.\quad (14)$$

F четная и является решением уравнения

$$\prod_{j=1}^2 [\sin z - \sin \vartheta_j] F(z + \Phi) - \prod_{j=1}^2 [-\sin z - \sin \vartheta_j] F(-z + \Phi) = 0. \quad (15)$$

Следствием (12)–(15), в результате прямой подстановки, является следующее утверждение.

Лемма 3.1. Пусть нечетная мероморфная функция $S(\cdot)$ решает неоднородные уравнения

$$\begin{aligned} S(z + \Phi) - S(-z + \Phi) &= \chi(z), \\ S(z - \Phi) - S(-z - \Phi) &= \chi(z), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\chi(z) = \frac{\sin z (c_0 + c_1 \cos z)}{\prod_{j=0}^2 [\sin z - \sin \vartheta_j] f_0(z + \Phi) F(z + \Phi)}.$$

Тогда f , определенное в (13), является мероморфным нечетным решением уравнения (12).

Обратимся к построению решений вспомогательных уравнений (14)–(16). Заметим, требуемое мероморфное решение F уравнения (15) приведено в работе [1]. Искомое решение принимает вид

$$F(z) = \exp \left\{ \frac{1}{4\Phi} \int_{i\mathbb{R}} \frac{d\tau \sin(2\mu\tau)}{\cos(2\mu\tau) + \cos(2\mu z)} \log(R(\tau; \vartheta_1) R(\tau; \vartheta_2)) \right\}, \quad (17)$$

является голоморфной ограниченной функцией в полосе $\Pi(-\Phi - \pi/2, \pi/2 + \Phi)$,

$$R(z, \vartheta) = \frac{\sin z + \sin \vartheta}{\sin z - \sin \vartheta}.$$

Для выделения голоморфной ветви $\log(R(z; \vartheta_1) R(z; \vartheta_2))$ в полосе $z \in \Pi(-\pi/2, \pi/2)$, необходимо провести разрезы из нулей и полюсов² у $R(z; \vartheta_1) R(z; \vartheta_2)$, т.е. из $\vartheta_1, -\vartheta_1, \pi - \vartheta_1, -\pi + \vartheta_1$ и $\vartheta_2, -\vartheta_2, \pi + \vartheta_2, -\pi - \vartheta_2$ на бесконечность $\pm\infty$ параллельно вещественной оси и так, чтобы не было пересечения с полосой $\Pi(-\pi/2, \pi/2)$. Кроме того, мы фиксируем ветвь условием $\log(R(z; \vartheta_1) R(z; \vartheta_2))|_{z=0} = 0$. Аналитическое продолжение F в (17) из полосы голоморфности вправо на комплексной

²Эти точки расположены на границе полосы $\Pi(-\pi/2, \pi/2)$.

плоскости проводится посредством функционального уравнения (15), см. [1].

Обратимся к построению решения f_0 уравнения (13), рассмотрим логарифмическую производную $\chi_0(z) = \frac{d}{dz} \log f_0(z)$. Из уравнения (14) находим

$$\chi_0(z + \Phi) - \chi_0(z - \Phi) = W_0(z), \quad (18)$$

где

$$W_0(z) := \frac{d}{dz} \log(-R(z, \vartheta_0)) = W_0(-z).$$

$\chi_0(z) = -\chi_0(-z)$ нечетная, так как f_0 четная. Голоморфная ветвь $\log(-R(z, \vartheta_0))$ задана условием $\log(-R(z, \vartheta_0))|_{z=i\infty} = -i\pi$, а разрезы проведены из $\vartheta_0, -\vartheta_0, \pi - \vartheta_0, -\pi + \vartheta_0$ на бесконечность $\pm\infty$ параллельно вещественной оси и так, чтобы не было пересечения с полосой $\Pi(-\pi/2, \pi/2)$. Очевидно, что $W_0(z) = O(1/\cos(z))$ при $z \rightarrow i\infty$ вдоль мнимой оси. Воспользуемся преобразованием Фурье

$$\chi_0(z) = -\frac{v.p.}{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} e^{-izt} W(t) dt, \quad W(t) = \int_{i\mathbb{R}} e^{iz\zeta} \chi_0(\zeta) d\zeta.$$

Аналогично получим

$$W_0(z) = -\frac{v.p.}{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} e^{-izt} r_0(t) dt,$$

и

$$r_0(t) = \int_{i\mathbb{R}} e^{iz\zeta} W_0(\zeta) d\zeta.$$

Из уравнения следует

$$-\frac{v.p.}{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} e^{-izt} W(t) [e^{-i\Phi t} - e^{i\Phi t}] dt = -\frac{v.p.}{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} e^{-izt} r_0(t) dt,$$

используя обратное преобразование Фурье, получим

$$W(t) = \frac{i}{2} \frac{r_0(t)}{\sin(\Phi t)}.$$

Искомое решение легко вычисляется,

$$\begin{aligned}\chi_0(z) &= -\frac{v.p.}{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} e^{-izt} \frac{i}{2} \frac{r_0(t)}{\sin(\Phi t)} dt \\ &= -i \frac{v.p.}{4\pi} \int_{i\mathbb{R}} dt \frac{e^{-izt}}{\sin(\Phi t)} \left(\int_{i\mathbb{R}} e^{it\tau} W_0(\tau) d\tau \right).\end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и используя четность W_0 , имеем ($z \in \Pi(-\Phi, \Phi)$)

$$\begin{aligned}g(z) &= -i \frac{v.p.}{4\pi} \int_{i\mathbb{R}} W_0(\tau) d\tau \left(\int_{i\mathbb{R}} dt \frac{i \sin(t[\tau - z])}{\sin(\Phi t)} \right) \\ &= \frac{i}{4\Phi} \int_{i\mathbb{R}} W_0(\tau) \tan(\mu[\tau - z]) d\tau \\ &= \frac{i}{4\Phi} \int_{i\mathbb{R}} W_0(\tau) \frac{1}{2} [\tan(\mu[\tau - z]) + \tan(\mu[-\tau - z])] d\tau,\end{aligned}$$

где мы также воспользовались формулой 3.981(1) из [8]. Наконец, находим

$$\chi_0(z) = \frac{1}{4\Phi i} \int_{i\mathbb{R}} \frac{d\tau \sin(2\mu z)}{\cos(2\mu\tau) + \cos(2\mu z)} W_0(\tau),$$

где $z \in \Pi(-\Phi, \Phi)$, $\mu = \frac{\pi}{2\Phi}$. Стоит отметить, что χ_0 голоморфна и ограничена в полосе $\Pi(-\Phi, \Phi)$. Фактически, она голоморфна в более широкой полосе $\Pi(-\Phi - \pi/2, \pi/2 + \Phi)$. Действительно, мы можем продеформировать контур интегрирования в выражении для χ_0 вправо, $i\mathbb{R} \rightarrow i\mathbb{R} + h$, где $0 < h < \pi/2$. Отметим, что $W_0(\tau)$ в подынтегральном выражении голоморфен в $\Pi(-\pi/2, \pi/2)$. Тогда полоса голоморфности χ_0 совпадает с $\Pi(-\Phi + h, \Phi + h)$. Используя принцип аналитического продолжения, находим, что χ_0 голоморфна в $\Pi(-\Phi, \pi/2 + \Phi)$ и, ввиду нечетности, в $\Pi(-\Phi - \pi/2, \pi/2 + \Phi)$.

Восстановим теперь искомую вспомогательную функцию f_0 в полосе голоморфности равенством

$$f_0(z) = \exp \left\{ \int_0^z d\tau \left(\frac{-i}{4\Phi} \int_{i\mathbb{R}} \frac{d\zeta \sin(2\mu\tau)}{\cos(2\mu\zeta) + \cos(2\mu\tau)} W_0(\zeta) \right) \right\}.$$

Изменим порядок интегрирований, что оправдано при $z \in \Pi(-\Phi - \pi/2, \pi/2 + \Phi)$, вычислим внутренний интеграл, получим

$$f_0(z) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{i\mathbb{R}} d\zeta \log \left(\frac{1 + \cos(2\mu\zeta)}{\cos(2\mu z) + \cos(2\mu\zeta)} \right) W_0(\zeta) \right\}.$$

Мероморфное продолжение этого выражения на всю комплексную плоскость из полосы голоморфности $\Pi(-\Phi - \pi/2, \pi/2 + \Phi)$ осуществляется с помощью уравнения (14), кроме того, $f_0(z) = O(\cos \mu z)$ при $z \rightarrow \pm i\infty$ в полосе голоморфности.

Частное решение уравнений для S имеет вид (см. [6, глава 1])

$$S_1(z) = \frac{i}{8\Phi} \int_{i\mathbb{R}} \frac{d\tau \chi(\tau) \sin(\mu\tau)}{\cos \mu\tau - \sin \mu z} - \frac{i}{8\Phi} \int_{i\mathbb{R}} \frac{d\tau \chi(\tau) \sin(\mu\tau)}{\cos \mu\tau + \sin \mu z}$$

и тогда для S находим

$$S(z) = \frac{i}{2\Phi} \int_{i\mathbb{R}} d\tau \frac{\chi(\tau) \sin(\mu\tau) \sin(\mu z)}{\cos(2\mu\tau) + \cos(2\mu z)}, \quad (19)$$

которое голоморфно в полосе $\Pi(-\Phi, \Phi)$. Пользуясь свойствами $\chi(\cdot)$, мы видим, что эта мероморфная функция не имеет полюсов в полосе $\Pi(-\pi/2, \pi/2)$ в силу свойств построенных функций $f_0(\tau + \Phi)$, $F(\tau + \Phi)$. Мы легко убедимся, деформируя контур интегрирования как указано выше, что S голоморфна в полосе $\Pi(-\Phi - \pi/2, \pi/2 + \Phi)$ и мероморфно продолжима на всю комплексную плоскость с помощью функциональных уравнений, кроме того, $S(z) = O(1/\sin(\mu z))$ при $z \rightarrow i\infty$ в полосе голоморфности. Решение (19) также легко получается применением преобразования Фурье вдоль мнимой оси к функциональным уравнениям.

Заметим, что $S(z)$, а значит и $f(z)$, зависят от двух произвольных постоянных. Пространство собственных функций непрерывного спектра не одномерно. Трансформанта $f(z)$ ограничена в полосе голоморфности и, значит, решение u также ограничено и выполнено условие (5). Используя асимптотику трансформанты f при $z \rightarrow i\infty$, можно проверить также условие закрепления мембраны (4).

§4. АСИМПТОТИКА И ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Асимптотика $u(r, \varphi; \varkappa)$ при $r \rightarrow \infty$ вычисляется с помощью метода перевала. Точки перевала $\pm\pi$ решают уравнение $(\cos z)' = 0$. Продеформируем контур интегрирования в перевальные $\Gamma_{\pm\pi}$, которые показаны на Рис. 2, $\Gamma_{\pm\pi}$ проходят через седловые точки параллельно мнимой оси. В процессе такой деформации пересекаются полюсы трансформанты f в (10) и соответствующие вычеты дают вклад в асимптотику. Мы намеренно построили трансформанту Зоммерфельда f так, что она не имеет особенностей в полосе $\Pi(-\Phi + \pi/2, \pi/2 + \Phi)$, Рис. 2. Полюсы z_s , которые могут быть пересечены, символически показаны на Рис. 2 и лежат в замыкании полос $\pi/2 + \Phi < |\operatorname{Re}(z + \varphi)| < \pi$. Мы получаем

$$u(r, \varphi; \varkappa) = \sum_s \operatorname{res}_{z_s=z+\varphi} f(z + \varphi) e^{\varkappa r \cos(z_s - \varphi)} + O\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{\sqrt{r}}\right), \quad (20)$$

где использовано, что вклад точек перевала имеет оценку

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\pi \cup \Gamma_{-\pi}} dz e^{\varkappa r \cos(z)} f(z + \varphi) = O\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{\sqrt{r}}\right).$$

Асимптотика (20) позволяет утверждать, что $u(r, \varphi; \varkappa)$ лишь ограничена на мембране и не убывает на бесконечности, основной вклад определяется вычетами, отвечающими полюсам, лежащим на линиях $\operatorname{Re}(z + \varphi) = -\pi/2 - \Phi$ и $\operatorname{Re}(z + \varphi) = \pi/2 + \Phi$. Остальные слагаемые в асимптотике убывают экспоненциально. Это обстоятельство позволяет интерпретировать асимптотические выражения с физической точки зрения как поверхностные волны, локализованные экспоненциально в окрестности мембраны, и распространяющиеся либо к началу O , либо от него на бесконечность, что определяется знаком мнимой части $\vartheta_j(\varkappa)$, $j = 0, 1, 2$, т.е. знаком $\tau_j(\varkappa)$. Обсудим с этой точки зрения вклад одного из полюсов $z = \pi/2 + i\tau_j(\varkappa) + \Phi$ такого типа, т.е. приводящего к ограниченному слагаемому в (20), локализованным в окрестности мембраны $\varphi = \Phi$, $r > 0$. Это слагаемое описывается выражением вида $u^{\text{surf}}(r, \varphi; \varkappa) = A_j \exp(-\varkappa r \cosh(\tau_j(\varkappa) \sin[\Phi - \varphi])) e^{-i\varkappa r \sinh \tau_j(\varkappa) \cos[\Phi - \varphi]}$.

Очевидно, что в локальных координатах (X, Y) , связанных с мембраной l_+ , $X = r \cos[\Phi - \varphi]$, $Y = r \sin[\Phi - \varphi]$ выражение для $u^{\text{surf}}(r, \varphi; \varkappa)$ представляет собой поверхностную волну, бегущую из бесконечности

к началу координат O при $\tau_j(\varkappa) > 0$ и, наоборот, бегущую по направлению от начала при $\tau_j(\varkappa) < 0$. При этом, “амплитуда”

$$A_j \exp(-\varkappa r \cosh(\tau_j(\varkappa) \sin[\Phi - \varphi]))$$

такой волны экспоненциально мала при $\varphi < \Phi$ и $r \rightarrow \infty$. Принимая во внимание то, что решение (10) зависит от двух произвольных постоянных c_0, c_1 последствием $S(z)$, можно утверждать, что в собственном пространстве решений, отвечающих заданному \varkappa , ($-\varkappa^2 \in (-v_0^2, 0)$), подбирая знаки τ_j и постоянные c_0, c_1 , можно выделить явно решение, которые интерпретируются как результат рассеяния поверхностной волны, бегущей из бесконечности, отражающейся от точки сочленения O и порождающей поверхностные волны, уходящие на бесконечность вдоль мембраны, сохраняющие локализацию. Нетрудно перечислить все сценарии такого сорта, придавая им конкретный физический смысл волнового рассеяния.

Суммируя все сказанное выше, мы приходим к основному утверждению нашей работы

Theorem 4.1. *Собственные функции существенного спектра задачи (1)–(5) при каждом \varkappa таком, что $\lambda = -\varkappa^2 \in (-v_0^2, 0)$, допускают интегральное представление (6) или (9), где трансформанта f вида (11) зависит от двух произвольных постоянных c_0, c_1 . Эти собственные функции имеют асимптотику (20), т.е. экспоненциально локализованы в окрестности мембраны.*

Как мы уже обсудили выше, при надлежащем выборе постоянных и знака $\tau_j(\varkappa)$, $j = 0, 1, 2$ допускают соответствующую физическую интерпретацию с точки зрения рассеяния поверхностных волн сочленением мембран в начале координат O . По-видимому, других обобщенных собственных функций существенного спектра нет, хотя обоснования этого мы не приводим. Стоит заметить, что изучение собственных функций непрерывного спектра для неотрицательных значений спектрального параметра, т.е. на интервале $\lambda \in [0, \infty)$ также возможно на основе интегрального представления Зоммерфельда, однако, требует определенной технической модификации и не входит в данную работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. А. Lyalinov, *Localized waves propagating along an angular junction of two thin semi-infinite elastic membranes terminating an acoustic medium.* — Russian J. Mathem. Physics, **30**, No. 3 (2023), 345–359.

2. В. Д. Лукьянов, Г. Л. Никитин, *О резонансном рассеянии нормальных волн мембраной в акустическом волноводе*. — Акустический журнал, **42**, No. 5 (1996), 653–660.
3. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear Water Waves*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).
4. М. А. Lyalinov, *Functional difference equations and eigenfunctions of a Schrödinger operator with δ' -interaction on a circular conical surface*. — Proc. Royal Soc. A, V. 476: 20200179, 2020.
5. М. А. Lyalinov, *Eigenoscillations in an angular domain and spectral properties of functional equations*. — Eur. J. Appl. Math., electr. version before publ. (2021)
6. М. А. Lyalinov, N. Y. Zhu, *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions* (Mario Boella Series on Electromagnetism in Information & Communication). Edison, NJ: SciTech-IET, 2012.
7. M. Sh. Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert spaces*. Dordrecht, Holland, 1987.
8. I. S. Gradstein, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*. 4th ed., Academic Press, Orlando, 1980.

Lyalinov M. A. Eigenfunctions of the continuous spectrum in the problem of acoustic oscillations in a wedge-shaped domain bounded by an angular junction of two semi-infinite thin elastic membranes.

In this work we compute the eigenfunctions of the continuous (essential) spectrum in the form of the Sommerfeld integral. The eigenfunctions are localised near the membranes and can be interpreted as incoming and outgoing surface waves.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: lyalinov@yandex.ru

Поступило 22 сентября 2023 г.