

Е. А. Злобина

ДИФРАКЦИЯ ВОЛНЫ ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ НА СКАЧКЕ КРИВИЗНЫ. МОДА С БОЛЬШИМ НОМЕРОМ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Активное исследование задач высокочастотной дифракции на границах со скачком кривизны, ведущееся с 1970х годов (см., например, [1–11]), мотивировано как возможными техническими приложениями, так и научной любознательностью. На данный момент достаточно полно изучен только случай некасательного падения, когда знаки кривизны по разные стороны особой точки границы слабо влияют на анализ. В случае же касательного падения знаки кривизны имеют принципиальное значение, что обуславливает разнообразие возникающих задач и необходимость использования более изощренных, чем в некасательном случае, методов исследования.

Работы, посвященные касательному падению, из которых следует отметить [1] и серию статей [4–6] не претендовали на полное изучение поля в окрестности точки негладкости. В них основное внимание было уделено построению поверхностных токов и цилиндрической дифрагированной волны, расходящейся из точки негладкости:

$$u^{\text{dif}} = A(\varphi; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} (1 + \mathcal{E}(\varphi, r; k)), \quad (1)$$

$$kr \gg 1, \quad (2)$$

возникновение которой предсказывает геометрическая теория дифракции [12]. Здесь

$$k \gg 1$$

— волновое число, играющее роль большого параметра, r и φ — классические полярные координаты, см. рис. 1,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq r, \quad -\pi \leq \varphi < \pi, \quad (3)$$

Ключевые слова: высокочастотная асимптотика, дифракция на негладкой границе, уравнение Гельмгольца, метод параболического уравнения.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, РНФ 22-11-00070.

A — дифракционный коэффициент, а \mathcal{E} — неравномерная по углу погрешность. Переходные зоны, окружающие особые направления — предельные лучи, при приближении к которым дифракционный коэффициент неограниченно растет, не рассматривались. Поле описывалось уравнением Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0 \quad (4)$$

и предполагалось зависящим от времени по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$.

Полное асимптотическое исследование поля в окрестности точки негладкости было предпринято в [10] и [11]. В работе [10], продолжая исследование [1], рассматривалась задача дифракции плоской волны, набегающей вдоль прямой, переходящей в выпуклую кривую (для условия Неймана). В работе [11], как и в [4], изучалась дифракция волны шепчущей галереи на точке скачкообразного распрямления границы, см. рис. 1, причем номер моды предполагался небольшим, то есть число поперечных осцилляций падающей волны не было велико. Задачи исследовались в рамках метода параболического уравнения [13, 14] — погранслоинного подхода, берущего начало в работах Фока. Основопологающим для метода является предположение, что полное волновое поле имеет в пограничном слое общую быструю осцилляцию в продольном направлении, а в поперечном направлении меняется медленнее.

Настоящая работа продолжает предпринятое в [11] исследование для значительно более сложного случая, когда число поперечных осцилляций падающей волны шепчущей галереи велико, однако метод параболического уравнения все еще применим. С его помощью мы изучаем волновое поле в малой окрестности точки негладкости. Затем, сшивая построенные выражения с цилиндрической волной, находим дифракционный коэффициент, см. (1). Оказывается, что асимптотические формулы для поля в случае падения моды шепчущей галереи с большим номером радикально отличаются от выражений, полученных в случае падения моды с небольшим номером. Как и в работах [15, 16], посвященных в некотором смысле похожей задаче дифракции на точке перегиба, мы уделяем много внимания лучевой структуре поля.

§2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Волновое поле u рассматривается над границей $S = S_- \cup S_+$, которая представляет собой дугу S_- окружности радиуса a , переходящую в касательную к ней прямую S_+ в точке O (см. рис. 1), так что кривизна S скачком меняется с $1/a$ на 0 . Там u удовлетворяет уравнению Гельмгольца (4), а на границе выполнено условие Неймана¹

$$u_n|_S = 0, \quad (5)$$

где u_n — производная поля по нормали к S . При удалении от границы поле стремится к нулю: $u \rightarrow 0$.

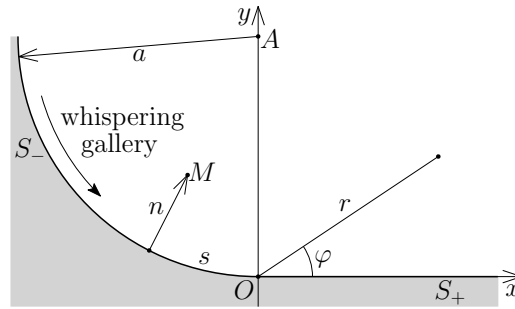


Рис. 1. Геометрия задачи.

Будем характеризовать положение точки наблюдения $M = (x, y)$, лежащей вблизи точки O , расстоянием вдоль нормали до границы $n \geq 0$ и длиной дуги s , которая отсчитывается от O (см. рис. 1) и принимается отрицательной при $x < 0$ и положительной при $x > 0$ (там $s = x$ и $n = y$).

Отметим, что переход от декартовых координат к (s, n) не является гладким. Удобно сразу ввести фоковский безразмерный большой параметр, возникающий в различных задачах с касательным падением [1, 11, 13, 14],

$$m = (ka/2)^{\frac{1}{3}}, \quad m \gg 1, \quad (6)$$

и безразмерные растянутые переменные

$$\sigma = ms/a, \quad \nu = 2m^2n/a. \quad (7)$$

¹Случай условия Дирихле рассматривается аналогично, и мы не будем на нем останавливаться.

Вдоль вогнутой части границы на точку O набегают волна шепчущей галереи u^{inc} . В малой окрестности точки O , где

$$\nu \ll \mathfrak{m}, \quad t\nu \ll \mathfrak{m}^2, \quad t^2\sigma \ll \mathfrak{m}^2, \quad (8)$$

u^{inc} имеет вид [14, 17]

$$u^{\text{inc}} \approx e^{iks} U^{\text{inc}}, \quad U^{\text{inc}}(\sigma, \nu) = e^{-it\sigma} v(\nu - t). \quad (9)$$

Здесь v — функция Эйри-Фока [13, 14], удовлетворяющая уравнению Эйри $v''(z) = zv(z)$ и имеющая асимптотику

$$v(z) = \frac{1}{2z^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{1}{2i(-z)^{1/4}} e^{i\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right) \right) - \\ &- \frac{1}{2i(-z)^{1/4}} e^{-i\frac{2}{3}(-z)^{3/2} - i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right) \right), \quad z \rightarrow -\infty, \quad (11) \end{aligned}$$

а $(-t)$ — один из корней ее производной, $v'(-t) = 0$, которые вещественны, отрицательны и просты (см., напр., [17]). В отличие от работ [4] и [11], здесь мы предполагаем, что t велико:

$$t \gg 1. \quad (12)$$

Таким образом, помимо классического фоковского параметра \mathfrak{m} (6), в задаче есть еще один большой параметр t . Мы считаем выполненным соотношение

$$t \ll \mathfrak{m}^{\frac{4}{3}}, \quad (13)$$

необходимость которого выяснится в процессе геометрического анализа задачи (см. замечание после (46)).

Не слишком далеко от границы, а именно в области $t - \nu \gg 1$, волна шепчущей галереи (9) осциллирует вдоль нормали, см. (11). С ростом z функция $v(z)$ быстро убывает со всеми производными, поэтому падающая волна локализована в окрестности

$$0 \leq \nu < t + O(1) \quad (14)$$

вогнутой части границы S_- .

Целью настоящей работы является асимптотическое описание всех волн, возникающих в рассматриваемой задаче, справа от точки негладкости O в небольшой ее окрестности. План исследования следующий. Сначала будет проведен подробный геометрический анализ задачи, который позволит охарактеризовать области с разными структурами

волнового поля. После этого мы перейдем к аналитическим рассматриваниям. Волновое поле в малой окрестности точки O будет изучено в рамках метода параболического уравнения [13,14]. Область его применимости, как и в классическом случае [13,14], ограничивается малой окрестностью точки O , где $s \ll 1$ и $n \ll 1$ (соответственно, $x \ll 1$ и $y \ll 1$), однако допускаются большие значения σ и ν . Мы будем предполагать выполненными неравенства

$$|\sigma| \ll m^{\frac{2}{5}}, \quad \nu \ll m, \quad (15)$$

очевидно, согласующиеся с (8). Ограничение на ν непосредственно вытекает из (8), а необходимость в таком ограничении на σ будет объяснена после (46). Возникает та же решаемая в явном виде корректная задача рассеяния для параболического уравнения, что и в [11], однако теперь асимптотический анализ ее решения усложняется наличием второго большого параметра (12).

§3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАССМОТРЕНИЯ

3.1. Качественное обсуждение лучевой структуры поля. Рассмотрим волновое поле слева от оси y . Как хорошо известно [17], с падающей волной шепчущей галереи ассоциируется конгруэнция лучей, отражающихся от вогнутой части границы S_- , см. рис. 2. Поскольку S_- — дуга окружности, то все лучи приходят к границе под одним и тем же углом скольжения, который мы обозначим γ . Лучи, отвечающие падающей волне (9), сосредоточены в приграничном слое толщины b между S_- и каустикой C (см. рис. 2), которая представляет собой дугу окружности

$$(y - a)^2 + x^2 = (a - b)^2 \quad (16)$$

радиуса $a - b$ с центром в точке A (см. рис. 1). Сопоставив с ограничением на ширину приграничного слоя (14), полученным из аналитических соображений, приходим к равенству

$$t = 2m^2 b/a + O(1), \quad (17)$$

см. (6), (7). Из (13) и (17) следует малость b , $b/a \ll 1$, что в свою очередь влечет малость угла скольжения: $\gamma \ll 1$. Из элементарных геометрических рассматриваний следует, что $b = a(1 - \cos \gamma)$, откуда, учитывая малость γ и (17), получим важные соотношения

$$b = a\gamma^2/2 (1 + O(\gamma^2)), \quad (18)$$

и

$$m\gamma = \sqrt{t}(1 + O(t/m^2)). \quad (19)$$

Описанная выше лучевая структура сохраняется вплоть до оси y и разрушается при переходе через точку скачка кривизны O .

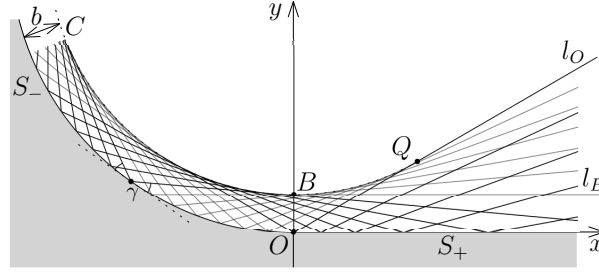


Рис. 2. Лучевая структура поля (дифрагированная волна не показана).

Обратимся теперь к волновому полю справа от оси y . Лучи делятся на два семейства l_1 и l_2 : первые, показанные на рис. 2 черным цветом, в точке пересечения с осью y направлены вниз, вторые, показанные серым цветом, направлены вверх или горизонтально. Волны, ассоциированные с семействами лучей l_1 и l_2 , обозначим u_1 и u_2 , соответственно.

Лучи l_1 прошли каустику C слева от точки O и последний раз отразились от плоской части границы S_+ . До отражения они идут ниже горизонтального луча l_B , пересекающего ось y в точке $B = (0, b)$, см. рис. 2. Область их распространения после отражения ограничена лучом l_O , отраженным в точке O , который, очевидно, описывается уравнением

$$y = x \operatorname{tg} \gamma = x\gamma (1 + O(\gamma^2)). \quad (20)$$

Продолжения отраженных участков лучей ниже границы S симметричны участкам до отражения, и, следовательно, имеют огибающую, симметричную каустике C относительно оси x .

Лучи l_2 последний раз отразились от вогнутой части границы S_- . В некоторой области справа от O они сохраняют структуру падающей волны, и каустика C продолжается вплоть до точки Q ее касания с лучом l_O , см. рис. 2. Из уравнения каустики (16) и уравнения (20)

луча l_O нетрудно найти, что Q имеет координаты

$$x_Q = a \sin \gamma \cos \gamma = a\gamma (1 + O(\gamma^2)), \quad y = a \sin^2 \gamma = a\gamma^2 (1 + O(\gamma^2)). \quad (21)$$

До прохождения каустики лучи ℓ_2 распространяются выше луча l_O . После прохождения каустики они уходят на бесконечность вдоль направлений, лежащих между лучами l_B и l_O . Таким образом, луч l_O (правее точки Q) является границей света и тени для волн u_1 и u_2 . Мы будем называть его *предельным лучом*.

Лучевую картину дополняют отвечающие дифрагированной волне лучи, расходящиеся из точки O (на рис. 2 не показаны).

Перейдем теперь к подробному геометрическому исследованию лучей семейств ℓ_1 и ℓ_2 . Полученные выражения встретятся нам при аналитическом исследовании задачи.

3.2. Лучи семейств ℓ_1 и ℓ_2 . Пусть точка наблюдения $M = (x, y)$ лежит в малой окрестности O . Рассмотрим луч l , приходящий в M после отражения от вогнутой части границы S_- (т.е. l – луч семейства ℓ_2 или луч семейства ℓ_1 до отражения от плоской части границы S_+). Случай, когда l приходит в M после отражения от S_+ , будет рассмотрен позднее. Определим положение точки $P = (0, h)$ пересечения l с осью y и положение точки $T = (\xi, \eta)$ последнего отражения от S_- , см. рис. 3.

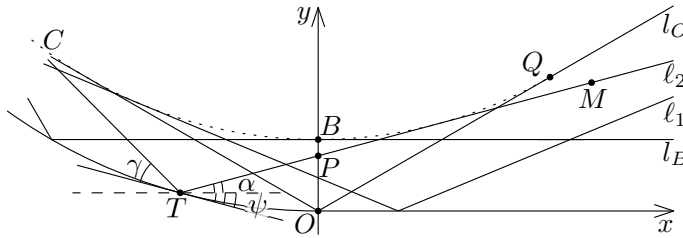


Рис. 3. Лучи семейств ℓ_1 и ℓ_2 , предельный луч l_O и горизонтальный луч l_B .

1. Поскольку точка T , очевидно, близка к O , ее декартовы координаты ξ и η выражаются через соответствующую длину дуги $s = \hat{s}$ (которая отрицательна слева от O) по формулам

$$\xi = \hat{s} + O(\hat{s}^3/a^2), \quad \eta = \hat{s}^2/2a + O(\hat{s}^4/a^3). \quad (22)$$

Касательная к границе в точке T образует с горизонталью угол

$$\psi = -\hat{s}/a. \quad (23)$$

Угол наклона α луча l к оси x связан с γ и ψ соотношением

$$\alpha = \gamma - \psi. \quad (24)$$

Отметим, что $\alpha < 0$ (соответственно, $\hat{s} < -a\gamma$) для лучей семейства l_1 и $\alpha \geq 0$ (соответственно, $\hat{s} \geq -a\gamma$) для лучей семейства l_2 . Очевидно, для ординаты точки $P = (0, h)$ справедливо равенство

$$h - \eta = -\xi\alpha, \quad (25)$$

где использована малость α . Здесь и далее мы опускаем младшие относительно малых параметров $1/m$ и t/m^2 (см. (6) и (13)) члены. Подставляя (22) в (25) и учитывая малость γ и \hat{s} , получим

$$h = -\hat{s}^2/2a - \hat{s}\gamma. \quad (26)$$

Из условий $h \geq 0$ и $\hat{s} < 0$ следует ограничение

$$\hat{s} \geq -2a\gamma. \quad (27)$$

С учетом (24) и (23), из (26) вытекает интересное соотношение, связывающее угол наклона луча l с расстоянием между точками пересечения луча l и горизонтального луча l_B с осью y (см. рис. 3):

$$\sqrt{b-h} = \sqrt{a(\gamma^2 + 2\gamma\hat{s}/a + (\hat{s}/a)^2)}/2 = \sqrt{a(\gamma-\psi)^2}/2 = |\alpha|\sqrt{a/2}. \quad (28)$$

В растянутых координатах (28) имеет вид

$$\sqrt{t-p} = m|\alpha|, \quad (29)$$

ср. (19), где

$$p = 2m^2h/a. \quad (30)$$

2. Условие, что точки $T = (\xi, \eta)$, $P = (0, h)$ и $M = (x, y)$ лежат на одной прямой, записывается следующим образом:

$$(y-h)/x = (\eta-h)/\xi. \quad (31)$$

Подставляя в (31) выражения для координат точки контура T (22) и точки P (26), приходим к квадратному уравнению на \hat{s} :

$$\hat{s}^2 + 2\hat{s}(a\gamma - x) + 2a(y - \gamma x) = 0. \quad (32)$$

Его дискриминант D , с учетом соотношения (18), имеет вид

$$D = 4((a\gamma - x)^2 - 2a(y - \gamma x)) = 8a\tilde{\eta}.$$

Величина

$$\tilde{n} = b + x^2/2a - y \quad (33)$$

описывает расстояние от точки наблюдения M до каустики C в главном приближении, см. (16). Дискриминант положителен, когда M лежит ниже C , равен нулю, когда M – точка каустики, и отрицателен, когда M лежит выше C .² Нас интересуют отрицательные значения \hat{s} . Нетрудно показать, что при $x > a\gamma$ и $y \leq \gamma x$, т.е. для точек M , лежащих правее Q и ниже предельного луча l_O , см. (20) и (21), уравнение (32) имеет одно отрицательное решение

$$\hat{s}_1 = x - a\gamma - \sqrt{2a\tilde{n}}. \quad (34)$$

Если же $x < a\gamma$ и $y > \gamma x$, т.е. M лежит левее Q и выше l_O , то и второй корень становится отрицательным:

$$\hat{s}_2 = x - a\gamma + \sqrt{2a\tilde{n}}. \quad (35)$$

В случае, когда M не лежит в указанных областях, уравнение (32) не имеет отрицательных решений. При $y < b$, т.е. для M , лежащих ниже l_B (см. рис. 3), $\hat{s}_1 < -a\gamma$ описывает положение точки отражения T луча семейства ℓ_1 . Если же $y \geq b$, т.е. M расположена выше l_B , то $\hat{s}_1 \geq -a\gamma$ отвечает точке T для луча семейства ℓ_2 , который пришел в M после прохождения каустики. Выражение (35) принимает значения $\hat{s}_2 > -a\gamma$ и описывает положение точки T , если луч семейства ℓ_2 пришел в M до прохождения каустики. Отметим, что для M , лежащих на каустике, $\tilde{n} = 0$ и $\hat{s}_1 = \hat{s}_2$.

3. Положение точки T , в которой от S_- в последний раз отразился луч, пришедший в точку M после отражения от плоской части границы, определяется вполне аналогично (выкладки отличаются от приведенных выше лишь заменой y на $-y$):

$$\hat{s}_3 = x - a\gamma - \sqrt{2a(\tilde{n} + 2y)}, \quad (36)$$

см. (33). Величина

$$\tilde{n} + 2y = b + x^2/2a + y \quad (37)$$

характеризует расстояние от точки M' , симметричной точке наблюдения M относительно S_+ , до каустики C . Из условия (27) вытекает требование $y \leq \gamma x$, т.е. точка M должна лежать ниже предельного луча l_O .

²Это согласуется с тем, что лучи семейств ℓ_1 и ℓ_2 лежат ниже каустики.

4. Ординату точки пересечения P луча l с осью y получим, подставляя в (26) соответствующую длину дуги (34), (35), (36). Сразу приведем выражения для растянутой ординаты (30), поскольку именно они встретятся нам при аналитических рассмотрениях:

1) M лежит на луче семейства ℓ_1 до отражения от S_+ или на луче семейства ℓ_2 после прохождения каустики:

$$p_1 = p(\hat{s}_1) = t - (\sigma - \sqrt{\tilde{\nu}})^2. \quad (38)$$

2) M лежит на луче семейства ℓ_2 до прохождения каустики:

$$p_2 = p(\hat{s}_2) = t - (\sigma + \sqrt{\tilde{\nu}})^2. \quad (39)$$

3) M лежит на луче семейства ℓ_1 после отражения от S_+ :

$$p_3 = p(\hat{s}_3) = t - (\sigma - \sqrt{\tilde{\nu} + 2\nu})^2. \quad (40)$$

Здесь

$$\tilde{\nu} = t + \sigma^2 - \nu \quad (41)$$

– растянутое расстояние до каустики, ср. (33).

Перейдем теперь к вычислению эйконалов (геометрических времен пробега) волн u_1 и u_2 , отвечающих лучам ℓ_1 и ℓ_2 . Эйконалы сперва возникнут при исследовании геометрии лучей, но, как это обычно бывает в высокочастотной теории дифракции [12,17], они появятся и при аналитическом анализе задачи.

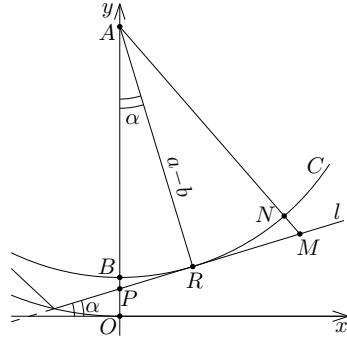


Рис. 4. К вычислению эйконалов.

3.3. Эйконалы волн u_1 и u_2 . 1. Пусть луч l приходит в точку наблюдения $M = (x, y)$ после прохождения каустики C , см. рис. 4. Обозначим, как и раньше, за $P = (0, b)$ точку его пересечения с осью ординат, за R точку касания с каустикой, а за α угол наклона, который может быть как положительным, так и отрицательным. Ясно, что угол $\angle BAR = |\alpha|$ (на рис. 4 изображен случай, когда $\alpha > 0$). Эйконал в точке M , как хорошо известно (см., напр., [17]), выражается через длины дуг \widehat{NR} , \widehat{NB} и длину отрезка MR : $\tau_+(M) = |\widehat{NB}| + |MR| - |\widehat{NR}|$, что легко переписывается в виде

$$\tau_+(M) = |MP| - (|PR| - |\widehat{BR}|). \quad (42)$$

Рассмотрим разность в скобках. Очевидно, что $|PR| = (a - b) \operatorname{tg} |\alpha|$, а $|\widehat{BR}| = (a - b)|\alpha|$, откуда

$$|PR| - |\widehat{BR}| = \frac{a - b}{3} |\alpha|^3 (1 + O(\alpha^2)) = \frac{a}{3} |\alpha|^3 \left(1 + O\left(\frac{b}{a}\right) + O(\alpha^2)\right). \quad (43)$$

Длина отрезка MP равна

$$|MP| = \sqrt{x^2 + (y - h)^2} = x + \frac{(y - h)^2}{2x} + O\left(\frac{(y - h)^4}{x^3}\right). \quad (44)$$

Подставляя (43) и (44) в (42), переходя к растянутым координатам (7) и пользуясь соотношением (29), придем к выражению для эйконала волны u_2 после прохождения каустики и эйконала волны u_1 до отражения от S_+ :

$$k\tau_+(M) = kx + \frac{(p - \nu)^2}{4\sigma} + \frac{2}{3}(t - p)^{\frac{3}{2}} + O\left(\frac{(\nu - p)^4}{m^2\sigma^3}\right) + O\left(\frac{(t - p)^{\frac{3}{2}}t}{m^2}\right). \quad (45)$$

Чтобы получить значение эйконала u_1 после отражения от S_+ , очевидно, достаточно в (45) заменить ν на $-\nu$.

2. Если же луч l приходит в точку M до перехода через каустику, то эйконал имеет вид $\tau_-(M) = |\widehat{NB}| - |MR| + |\widehat{NR}|$, см. [17]. Путем преобразований, аналогичным проделанным выше, найдем выражение для эйконала волны u_2 до прохождения каустики:

$$k\tau_-(M) = kx + \frac{(p - \nu)^2}{4\sigma} - \frac{2}{3}(t - p)^{\frac{3}{2}} + O\left(\frac{(\nu - p)^4}{m^2\sigma^3}\right) + O\left(\frac{(t - p)^{\frac{3}{2}}t}{m^2}\right). \quad (46)$$

Заметим, что неравенства (13) и (15) обеспечивают малость поправочных членов в (45) и (46) (поскольку $\nu - p = 2\sigma(\sigma \pm \sqrt{\tilde{\nu}})$, см. (38), (39)). Отсюда видно, что ослабить эти неравенства нельзя.

3. Подставляя в (45) и (46) соответствующие выражения для p , см. (38), (39), (40), получим что

1) эйконал волны u_2 после прохождения каустики и эйконал волны u_1 до отражения от плоской части границы имеют вид

$$\phi_1 = kx - \sigma(t - \nu) - \frac{2}{3}\sigma^3 + \frac{2}{3}\tilde{\nu}^{\frac{3}{2}}; \quad (47)$$

2) эйконал волны u_2 до прохождения каустики записывается как

$$\phi_2 = kx - \sigma(t - \nu) - \frac{2}{3}\sigma^3 - \frac{2}{3}\tilde{\nu}^{\frac{3}{2}}; \quad (48)$$

3) эйконал волны u_1 после отражения от плоской части имеет вид

$$\phi_3 = kx - \sigma(t + \nu) - \frac{2}{3}\sigma^3 + \frac{2}{3}(\tilde{\nu} + 2\nu)^{\frac{3}{2}}. \quad (49)$$

Величина $\tilde{\nu}$ введена в (41). Вблизи каустики (16) $\tilde{\nu}$ мало и $\phi_1 \approx \phi_2$.

4. Приведем еще выражение для эйконала цилиндрической волны (1):

$$kr = k\sqrt{x^2 + y^2} = kx + k\frac{y^2}{2x} + O\left(k\frac{y^4}{x^3}\right) = kx + \frac{\nu^2}{4\sigma} + O\left(\frac{\nu^4}{m^2\sigma^3}\right). \quad (50)$$

Вблизи предельного луча l_O (20) справедлива приближенная формула

$$kr \approx kx + \sigma t - 2\sigma\sqrt{t}\varepsilon + \sigma\varepsilon^2, \quad (51)$$

где величина

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{t}\sigma - \nu}{2\sigma} = \sqrt{t} - \frac{\nu}{2\sigma} \quad (52)$$

предполагается малой. Отметим, что ε характеризует близость точки наблюдения к предельному лучу l_O :

$$\varepsilon = M(\gamma - \varphi), \quad (53)$$

см. (7). Здесь φ – полярный угол, см. (3) и рис. 1. Вблизи l_O эйконал волны u_1 после отражения от S_+ имеет вид

$$\phi_3 \approx \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + kx + \sigma t - 2\sigma\sqrt{t}\varepsilon + \frac{\sigma^2\varepsilon^2}{\sigma + \sqrt{t}} \quad (54)$$

и в первых двух порядках отличается от (51) на постоянное слагаемое. То же справедливо и для эйконала волны u_2 :

$$\phi_1 = \phi_2 \approx -\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + kx + \sigma t - 2\sigma\sqrt{t}\varepsilon + \frac{\sigma^2\varepsilon^2}{\sigma - \sqrt{t}}. \quad (55)$$

5. С помощью геометрических рассуждений – в сущности, элементарных, – нам удалось многое узнать о «лучевом скелете» волнового поля. Перейдем теперь к аналитическому анализу задачи, в ходе которого поле вблизи каустики и в переходной зоне вокруг предельного луча будет описано специальными функциями.

§4. ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ЕЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Постановка и точное решение задачи (4), (5), (9) в малой окрестности точки негладкости O в рамках метода параболического уравнения приведены в [11], см. также [4]. Главный член асимптотики полного поля ищется в виде, аналогичном падающей волне (9):

$$u = e^{iks}U(\sigma, \nu). \quad (56)$$

Напомним, что справа от O $s = x$. Следуя работам [13, 14], мы называем U множителем ослабления.

Подставляя (9) и (56) в уравнение Гельмгольца (4) и граничное условие (5), получим для U параболическое уравнение с негладким коэффициентом

$$iU_\sigma + U_{\nu\nu} + \nu\theta(-\sigma)U = 0, \quad (57)$$

и однородное граничное условие

$$U_\nu|_{\nu=0} = 0. \quad (58)$$

Здесь θ – функция Хевисайда, $\theta(z) = 0$ при $z \leq 0$ и $\theta(z) = 1$ при $z > 0$.

В [4, 11] найдено единственное в классе квадратично интегрируемых по ν функций решение (57), (58), переходящее при $\sigma \rightarrow -\infty$ в множитель ослабления падающей волны U^{inc} , см. (9). При $\sigma \leq 0$ оно совпадает с U^{inc} , а при $s > 0$ дается выражением

$$U = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^\infty v(p-t) \left(e^{i\frac{(p-\nu)^2}{4\sigma}} + e^{i\frac{(p+\nu)^2}{4\sigma}} \right) dp. \quad (59)$$

До сих пор аналитическое исследование задачи с большим параметром t не отличалось от изучения случая $t = O(1)$, см. [11]. Однако

асимптотический анализ выражения (59) в случае $t \gg 1$, который проведен ниже, сильно отличается от рассмотрений [11], поскольку быстроосциллирующими функциями могут быть не только квадратичные экспоненты, но и функция Эйри.

§5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МНОЖИТЕЛЯ ОСЛАБЛЕНИЯ

Поскольку $t \gg 1$, промежуток интегрирования в (59) естественным образом разбивается на три интервала:

1) на интервале

$$L_1 = \{t - p \gg 1\} \quad (60)$$

функция $v(p-t)$ заменяется быстроосциллирующей асимптотикой (11);

2) на интервале

$$L_2 = \{|t - p| = O(1)\} \quad (61)$$

функция Эйри меняется медленно;

3) на интервале

$$L_3 = \{p - t \gg 1\} \quad (62)$$

функция $v(p-t)$ экспоненциально убывает, см. (10). Отметим, что в случае $t = O(1)$, рассмотренном в [11], такого разбиения не возникало.

Исследуем интегралы I_1, I_2, I_3 по соответствующим интервалам L_1, L_2, L_3 по отдельности. Интеграл I_3 , очевидно, пренебрежимо мал по сравнению с I_2 . Наибольшую трудность представляет анализ интеграла I_1 .

5.1. Исследование интеграла I_1 . 1. После замены функции Эйри ее асимптотикой (11) интеграл I_1 разбивается на четыре слагаемых:

$$I_1 = I_1^{++} + I_1^{+-} + I_1^{-+} + I_1^{--},$$

где

$$I_1^{\pm\pm} = \frac{e^{-i\frac{\pi(1\pm 1)}{4}}}{4\sqrt{\pi\sigma}} \int_{L_1} \frac{e^{if^{\pm\pm}(p)}}{(t-p)^{\frac{1}{4}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{(t-p)^{\frac{3}{2}}}\right) \right) dp,$$

и фазы экспонент имеют вид

$$f^{\pm\pm}(p) = \pm i \frac{2}{3} (t-p)^{\frac{3}{2}} + \frac{(p \pm \nu)^2}{4\sigma}. \quad (63)$$

Первый верхний индекс отвечает знаку перед $(t-p)^{\frac{3}{2}}$ в фазе экспоненты, а второй – знаку перед ν . Отметим, что выражения (63) напоминают формулы (45) и (46) для эйконалов лучей.

2. Асимптотика интегралов $I_1^{\pm\pm}$ дается вкладами края интервала интегрирования $p = 0$ и критических точек фаз (63). Критические точки фаз определяются из уравнения

$$(f^{\pm\pm}(p))' = \mp\sqrt{t-p} + \frac{p \mp \nu}{2\sigma} = 0.$$

Прямым вычислением найдем, что:

1) фаза $f^{+-}(p)$ при $t > \nu$ имеет одну критическую точку $p_1 = t - (\sigma - \sqrt{\tilde{\nu}})^2$ (величина $\tilde{\nu}$ определена в (41)).

2) фаза $f^{--}(p)$ при $t > \nu$ имеет одну критическую точку $p_2 = t - (\sigma + \sqrt{\tilde{\nu}})^2$, а при $t < \nu$ у $f^{--}(p)$ есть еще одна критическая точка $p_1 = t - (\sigma - \sqrt{\tilde{\nu}})^2$.

3) фаза $f^{++}(p)$ имеет одну критическую точку $p_3 = t - (\sigma - \sqrt{\tilde{\nu} + 2\nu})^2$.

4) фаза $f^{-+}(p)$ имеет одну критическую точку $p_4 = t - (\sigma + \sqrt{\tilde{\nu} + 2\nu})^2$. Заметим, что p_4 отрицательная и большая по модулю при любых значениях σ и ν . Она не будет давать вклада в интеграл.

Выражения для критических точек p_1, p_2, p_3 совпадают с выражениями (38), (39), (40), соответственно, для точек пересечения оси ординат лучами семейств ℓ_1 и ℓ_2 . Вклады p_1, p_2, p_3 в асимптотику интегралов $I^{\pm\pm}$, как мы увидим ниже, описывают соответствующие лучи.

Точная формулировка ограничений на координаты точки наблюдения σ и ν , гарантирующих, что p_1, p_2, p_3 лежат на интервале L_1 (60), довольно громоздка, и мы опустим ее. Отметим лишь, что неравенства $t - p_{1,2,3} \gg 1$ можно интерпретировать как условие, что (в силу сделанных выше замечаний и соотношения (29)) соответствующие критическим точкам лучи не слишком близки к горизонтальному лучу l_B , см. рис. 3.

3. Приведем ограничения на растянутые координаты (σ, ν) точки наблюдения M , обеспечивающие вещественность и положительность критических точек, которые нетрудно получить из проведенных выше геометрических рассуждений:

1) значение p_3 вещественно при любых σ и ν , а p_1 и p_2 — только при $\nu \leq t + \sigma^2$, т.е. когда M лежит ниже каустики.

2) $p_1 \geq 0$ при $\sigma \leq \sqrt{t}$ и $\nu \geq 2\sqrt{t}\sigma$ (M лежит левее точки Q ниже каустики, но выше предельного луча l_O) и при $\sigma \geq \sqrt{t}$ и $\nu \leq 2\sqrt{t}\sigma$ (M

лежит правее точки Q ниже предельного луча l_O).

3) $p_2 \geq 0$ при $\sigma \leq \sqrt{t}$ и $\nu \geq 2\sqrt{t}\sigma$ (M лежит левее точки Q ниже каустики, но выше предельного луча l_O).

4) вблизи предельного луча, где $\nu \approx 2\sqrt{t}\sigma$, точки p_1 и p_2 сливаются с краевой точкой $p = 0$: p_1 при $\sigma \geq \sqrt{t}$, а p_2 при $\sigma \leq \sqrt{t}$. Если M лежит вблизи каустики, где величина $\tilde{\nu}$ (41) мала, то точки p_1 и p_2 сливаются друг с другом. Если же M близка к точке Q касания каустики и предельного луча, то происходит слияние p_1 , p_2 и краевой точки $p = 0$.

5) $p_3 \geq 0$ при $\nu \geq 2\sqrt{t}\sigma$ (M лежит ниже предельного луча l_O). При $\nu \approx 2\sqrt{t}\sigma$ (M лежит вблизи предельного луча l_O) $p_3 \approx 0$.

Проведем подробный анализ интеграла I_1^{-} , представляющий наибольшую трудность. Остальные интегралы исследуются с помощью таких же приемов, и для них мы приведем только конечные результаты.

5.1.1. *Интеграл I_1^{-}* . Итак, рассмотрим интеграл

$$I_1^{-} = \frac{1}{4\sqrt{\pi\sigma}} \int_{L_1} \frac{e^{if^{--}(p)}}{(t-p)^{\frac{1}{4}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{(t-p)^{\frac{3}{2}}}\right) \right) dp.$$

1. Обратимся сначала к случаю, когда критические точки фазы p_1 и p_2 далеки друг от друга и от краевой точки $p = 0$. Тогда асимптотика I_1^{-} дается суммой вкладов этих трех точек, вычисляемых стандартными методами [18].

Интегрируя по частям, найдем вклад края интервала интегрирования:

$$(I_1^{-})_0 = \frac{e^{-i\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + i\frac{t^2}{4\sigma}}}{4\sqrt{\pi\sigma t^{\frac{1}{4}}}} \left[\frac{i}{\varepsilon} - \frac{1}{4t\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \frac{1}{2\varepsilon^3} (1 + \delta) \right]. \quad (64)$$

Здесь за δ обозначены поправочные члены

$$\begin{aligned} \delta &= O\left(\frac{1}{\sigma\varepsilon^2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}\varepsilon^2}\right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right) = \\ &= O\left(\frac{1}{kr(\gamma - \varphi)^2}\right) + O\left(\frac{1}{ka\gamma(\gamma - \varphi)^2}\right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \end{aligned} \quad (65)$$

а величина ε определена в (52). Необходимость удерживать в (64) три первых члена разложения выяснится позже, при сложении вкладов краевой точки $p = 0$ в интегралы $I_1^{\pm\pm}$.

Малость поправочных членов (65) в (64) обеспечивается условиями (12) и

$$\sigma\varepsilon^2 \gg 1, \sqrt{t}\varepsilon^2 \gg 1 \Leftrightarrow kt(\gamma - \varphi)^2 \gg 1, ka\gamma(\gamma - \varphi)^2 \gg 1. \quad (66)$$

Из (66) следует, что точка наблюдения M не может лежать близко к предельному лучу l_O , см. рис. 2. Первое неравенство часто возникает в задачах дифракции, см., напр., [12].

Для вычисления вкладов критических точек выпишем вторую производную фазы:

$$(f^{--}(p))'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{t-p}} \right). \quad (67)$$

В точках p_1 и p_2 , соответственно, выражение (67) принимает значения

$$(f^{--}(p_1))'' = -\frac{\sqrt{\tilde{\nu}}}{2\sigma(\sigma - \sqrt{\tilde{\nu}})}, \quad (f^{--}(p_2))'' = \frac{\sqrt{\tilde{\nu}}}{2\sigma(\sigma + \sqrt{\tilde{\nu}})},$$

где величина $\tilde{\nu}$ определена в (41). Напомним, что p_1 является критической точкой интеграла I_1^- только при $\nu > t$, поэтому $(f^{--}(p_1))'' < 0$. Заметим, что когда точка наблюдения M близка к каустике, $\tilde{\nu}$ мало, и значения второй производной близки к нулю, что препятствует применению стандартного метода стационарной фазы [18]. Мы предполагаем, что $(f^{--}(p_1))''$ и $(f^{--}(p_2))''$ отделены от нуля. Тогда вклады точек p_1 и p_2 в интеграл I_1^- описываются формулами

$$(I_1^-)_1 = \frac{e^{i\left(\frac{2}{3}\tilde{\nu}^{\frac{3}{2}} - \sigma(t-\nu) - \frac{2}{3}\sigma^3\right) - i\frac{\pi}{4}}}{2\tilde{\nu}^{\frac{1}{4}}} \left(1 + O\left(\frac{\sigma^2}{\tilde{\nu}(\sigma - \sqrt{\tilde{\nu}})^3}\right) \right) \quad (68)$$

и

$$(I_1^-)_2 = \frac{e^{-i\left(\frac{2}{3}\tilde{\nu}^{\frac{3}{2}} + \sigma(t-\nu) + \frac{2}{3}\sigma^3\right) + i\frac{\pi}{4}}}{2\tilde{\nu}^{\frac{1}{4}}} \left(1 + O\left(\frac{\sigma^2}{\tilde{\nu}(\sigma + \sqrt{\tilde{\nu}})^3}\right) \right). \quad (69)$$

Нетрудно видеть, что фазы экспонент в (68) и (69) согласуются с выражениями для эйконалов (47) и (48), соответственно. Следовательно, вклад p_2 отвечает лучу ℓ_2 до прохождения каустики, а вклад p_1 (поскольку она является критической точкой интеграла I_1^- при $\nu > t$) – лучу ℓ_2 после прохождения каустики. Выражение $\tilde{\nu}^{1/4}$ в знаменателях (68) и (69) пропорционально корню из геометрического расхождения J лучей ℓ_2 , см. [14]. Из (33) и (41) вытекает, что $J = \sqrt{2\tilde{n}/a}$.

Поправочные члены в (68) и (69) малы при выполнении условий

$$\left| \sigma \mp \sqrt{\tilde{\nu}} \right|^3 \tilde{\nu} \gg \sigma^2,$$

или, в терминах угла наклона луча α и расстояния до каустики (33):

$$\frac{k\tilde{n}a^2|\alpha|^3}{x^2} \gg 1. \quad (70)$$

Из неравенства (70) ясно, что полученные выше формулы не пригодны для описания лучей, близких к горизонтальному лучу l_B , и лучей в окрестности каустики.

Таким образом, волна u_2 до и после прохождения каустики, на некотором удалении от нее, описывается выражениями (68) и (69), соответственно.

2. Перейдем к случаю, когда критические точки фазы p_1 и p_2 далеки друг от друга, но одна из них близка к краевой точке $p = 0$. Напомним, что сливаться с краем интервала интегрирования может любая из критических точек.

Рассмотрим слияние края и точки p_1 , которое происходит при $\sigma > \sqrt{t}$ и малых значениях величины $\varepsilon = \sqrt{t} - \nu/2\sigma$, см. (52). Разложим фазу в малой окрестности нуля до квадратичных членов:

$$f^{--}(p) = -\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\nu^2}{4\sigma} + \varepsilon p - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sigma} \right) p^2 + O \left(\frac{p^3}{t^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Переносим кубические члены в амплитуду, распространяя интегрирование на всю положительную полуось и переходя к переменной

$$q = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sigma}} \frac{p}{2},$$

получим

$$\begin{aligned} (I_1^{--})_{01} &= \frac{e^{-i\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + i\frac{\nu^2}{4\sigma}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma - \sqrt{t}}} \int_0^\infty e^{i(2\zeta > q - q^2)} \left[1 + O \left(\left(\frac{\sigma}{\sqrt{t}(\sigma - \sqrt{t})} \right)^{\frac{3}{2}} q^3 \right) \right] \\ &= \frac{e^{i \left(-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\nu^2}{4\sigma} + \zeta_{>}^2 \right) + i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\sigma - \sqrt{t}}} \Phi(i\zeta_{>}) \\ &\quad \times \left[1 + O \left(\left(\frac{2\sigma\varepsilon}{\sigma - \sqrt{t}} \right)^3 \right) + O \left(\left(\frac{\sigma}{\sqrt{t}(\sigma - \sqrt{t})} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right]. \quad (71) \end{aligned}$$

Здесь Φ – интеграл Френеля

$$\Phi(z) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{it^2} dt, \quad (72)$$

и введено обозначение

$$\zeta_{>} = \frac{\sqrt{\sigma t^{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\sigma - \sqrt{t}}} \varepsilon = \sqrt{\frac{a\gamma}{x - a\gamma}} \sqrt{\frac{kr}{2}} (\gamma - \varphi), \quad (73)$$

см. (52). Величина $\zeta_{>}^2$ равна, с точностью до постоянного слагаемого $-2t^{3/2}/3$, разности эйконала (55) волны u_2 после прохождения каустики и эйконала (51) цилиндрической волны. Интеграл Френеля в (71) имеет мнимый аргумент, что нетипично для задач дифракции.

Слияние точки p_2 с краем интервала интегрирования $p = 0$ происходит при $\varepsilon \approx 0$, $\sigma < \sqrt{t}$ и описывается аналогичной (71) формулой:

$$(I_1^{--})_{02} = \frac{e^{i\left(-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + i\frac{\nu^2}{4\sigma} - \zeta_{<}^2\right) + i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\sqrt{t} - \sigma}} \Phi(-\zeta_{<}) \times \left[1 + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{t} - \sigma}\right)^3\right) + O\left(\left(\frac{\sigma}{\sqrt{t}(\sqrt{t} - \sigma)}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \right]. \quad (74)$$

Здесь

$$\zeta_{<} = \frac{\sqrt{\sigma t^{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\sqrt{t} - \sigma}} \varepsilon = \sqrt{\frac{a\gamma}{a\gamma - x}} \sqrt{\frac{kr}{2}} (\gamma - \varphi). \quad (75)$$

Величина $\zeta_{<}^2$, с точностью до постоянного слагаемого $-2t^{3/2}/3$, равна разности фазы волны u_2 до прохождения каустики и фазы цилиндрической волны, см. (51) и (55).

Легко показать, что

$$\sqrt{|x - a\gamma|/a\gamma} = J(M)/J(O), \quad (76)$$

где $J(M)$ и $J(O)$ – значения геометрического расхождения лучей l_2 в точках $M = (x, \gamma x)$ и $O = (0, 0)$, которые лежат на предельном луче l_O (20).

Поправочные члены в (71) и (74) малы при выполнении условий

$$\sqrt{t}|\sigma - \sqrt{t}| \gg \sigma, \quad \sigma\varepsilon \ll |\sigma - \sqrt{t}|,$$

или, в более привычных терминах,

$$m\gamma|x - x_Q| \gg x, \quad mx(\gamma - \varphi) \ll |x - x_Q|, \quad (77)$$

см. (19), (21), (53). Первое неравенство означает, что точка наблюдения M не может лежать слишком близко к точке Q касания каустики с предельным лучом l_O , а второе характеризует ширину переходной зоны вблизи l_O .

3. Теперь перейдем к случаю, когда критические точки фазы p_1 и p_2 близки друг к другу, но далеки от краевой точки $p = 0$. Это соответствует точкам наблюдения, расположенным вблизи каустики, но далеко от границы света и тени: $\tilde{\nu} \approx 0$, но ε не мало, см. (41) и (52).

Вклад точки $p = 0$ вычислен выше и дается формулой (64), пригодной не слишком близко к предельному лучу.

При $\tilde{\nu} \approx 0$ точки p_1 и p_2 близки к точке $p_0 = t - \sigma^2$, в которой обращается в нуль вторая производная фазы (67). Чтобы p_1 и p_2 принадлежали интервалу интегрирования L_1 , см. (60), должно выполняться неравенство

$$\sigma \gg 1. \quad (78)$$

Разложим фазу $f^{--}(p)$ в малой окрестности p_0 до кубических членов:

$$\begin{aligned} f^{--}(p) = & -\frac{2\sigma^3}{3} - \sigma(t - \nu) + \frac{\tilde{\nu}^2}{4\sigma} + \frac{\tilde{\nu}}{2\sigma}(p - p_0) \\ & - \frac{1}{24\sigma^3}(p - p_0)^3 + O\left(\frac{(p - p_0)^4}{\sigma^5}\right). \end{aligned} \quad (79)$$

Переносим члены четвертого порядка в амплитуду, распространяя интегрирования из малой окрестности p_0 на всю ось и переходя к переменной интегрирования $q = (p - p_0)/2\sigma$, получим, что вклад критических точек в интеграл I_1^{--} описывается в терминах функции Эйри v :

$$\begin{aligned} (I_1^{--})_{12} = & \frac{e^{-i\left(\frac{2\sigma^3}{3} + \sigma(t - \nu) - \frac{\tilde{\nu}^2}{4\sigma}\right)}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\tilde{\nu}q - \frac{q^3}{3}\right)} \left(1 + O\left(\frac{q + q^4}{\sigma}\right)\right) dq \\ = & e^{-i\left(\frac{2\sigma^3}{3} + \sigma(t - \nu)\right)} v(\tilde{\nu}) \left(1 + O\left(\frac{1 + \tilde{\nu}^2}{\sigma}\right)\right). \end{aligned} \quad (80)$$

Асимптотика (80) справедлива в области, где

$$\tilde{\nu}^2 \ll \sigma \Leftrightarrow k\tilde{n}^2 \ll x, \quad (81)$$

см. (33). В силу неравенства (78), в области (81) аргумент функции Эйри в (80) может принимать большие значения.

4. Наконец, рассмотрим случай, когда критические точки фазы p_1 и p_2 близки друг к другу и к краевой точке $p = 0$. Это соответствует

точкам наблюдения, лежащим вблизи точки Q касания каустики и предельного луча: $\sigma \approx \sqrt{t}$ и $\nu \approx 2t$.

Как в предыдущем пункте, разложим фазу $f^{--}(p)$ в окрестности точки $p_0 = t - \sigma^2$, которая теперь близка к нулю, до кубических членов, см. (79). Перенесем члены четвертой степени в амплитуду, распространим интегрирование на всю положительную полуось и перейдем к переменной $q = (p - p_0)/2\sigma$. Учитывая малость $\sigma - \sqrt{t}$, придем к асимптотике

$$I_1^{--} = e^{-i\left(\frac{2\sigma^3}{3} + \sigma(t-\nu)\right)} \mathcal{I}(\tilde{\nu}, \sigma - \sqrt{t}) \times \left(1 + O\left(\frac{(\sigma - \sqrt{t})^2}{\sqrt{t}}\right) + O\left(\frac{\tilde{\nu}^2 + 1}{\sqrt{t}}\right)\right). \quad (82)$$

Здесь \mathcal{I} – *неполная функция Эйри* (специальная функция волновой катастрофы V_3 по терминологии [19, 20]):

$$\mathcal{I}(\eta, \xi) = \int_{\xi}^{\infty} e^{i\left(\eta q - \frac{q^3}{3}\right)} dq.$$

Неполные функции Эйри возникают во многих задачах дифракции, см., напр., [13] и [21]. Их обобщения – *многомерные неполные функции Эйри* ($\mathcal{I} = \mathcal{I}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \xi)$) – были введены в [22], где изучались асимптотики интегралов в случае слияния конечного числа особых точек подынтегральной функции. В задачах дифракции многомерные неполные функции Эйри, по-видимому, впервые возникли в работе Ю. И. Орлова [23].

Асимптотика (82) пригодна в области, где выполнены неравенства (81) и

$$(\sigma - \sqrt{t})^2 \ll \sqrt{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{m} \frac{(x - x_Q)^2}{a^2} \ll \gamma,$$

ср. (77), характеризующие близость точки наблюдения M к точке касания каустики и предельного луча Q .

Нетрудно проверить, что полученные выше аппроксимации сшиваются друг с другом в пересечении областей их пригодности.

5.1.2. *Интегралы I^{++} , I^{+-} и I^{-+}* . Приведем результаты асимптотического исследования оставшихся интегралов.

1. Асимптотика интеграла I^{++} вдали от предельного луча дается суммой вкладов краевой точки $p = 0$ и критической точки фазы p_3 .

Вклад точки $p = 0$ записывается вполне аналогично (64):

$$(I_1^{++})_0 = i \frac{e^{i\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + i\frac{\nu^2}{4\sigma}}}{4\sqrt{\pi\sigma t^{\frac{1}{4}}}} \left[\frac{i}{\varepsilon} + \frac{1}{4t\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \frac{1}{2\varepsilon^3} (1 + \delta) \right], \quad (83)$$

см. (52) и (65). Вклад точки p_3 имеет вид

$$(I^{++})_3 = \frac{e^{i\left(\frac{2}{3}(\tilde{\nu}+2\nu)^{\frac{3}{2}} - \sigma(t+\nu) - \frac{2}{3}\sigma^3\right) - i\frac{\pi}{4}}}{2(\tilde{\nu}+2\nu)^{\frac{1}{4}}} \times \left(1 + O\left(\frac{\sigma^2}{(\sqrt{\tilde{\nu}+2\nu} - \sigma)^3(\tilde{\nu}+2\nu)} \right) \right). \quad (84)$$

Сравнивая фазу экспоненты в (84) с выражением (49), заключаем, что формула (84) описывает волну u_1 , соответствующую лучам семейства ℓ_1 , после отражения от плоской части границы S_+ . Геометрическое расхождение лучей пропорционально корню из расстояния от точки M' , симметричной точке наблюдения M относительно S_+ , до каустики C , см. (37). Приближение (83), (84) пригодно в области, где выполнены условия (66) и

$$t + \nu \gg \sigma \quad \Leftrightarrow \quad m(b + y) \gg x.$$

Вблизи предельного луча I^{++} выражается через интеграл Френеля (72):

$$I^{++} = \frac{e^{i\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\nu^2}{4\sigma} - \zeta_*^2\right) - i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\sqrt{t} + \sigma}} \Phi(\zeta_*) \left[1 + O\left(\left(\frac{\sigma\varepsilon}{\sqrt{t} + \sigma} \right)^3 \right) \right], \quad (85)$$

где

$$\zeta_* = \frac{\sqrt{\sigma t^{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\sqrt{t} + \sigma}} \varepsilon = \sqrt{\frac{a\gamma}{x + a\gamma}} \sqrt{\frac{kr}{2}} (\gamma - \varphi), \quad (86)$$

ср. (73) и (75). Величина ζ_*^2 , с точностью до постоянного слагаемого $2t^{3/2}/3$, равен разности фазы (54) волны u_1 после отражения от плоской части границы и фазы (51) цилиндрической волны. Легко проверить, что $\sqrt{(x + a\gamma)/a\gamma} = J(M)/J(O)$, где $J(M)$ и $J(O)$ – значения геометрического расхождения лучей ℓ_1 в точках предельного луча $M = (x, \gamma x)$ и $O = (0, 0)$, соответственно, ср. (76).

2. Асимптотика интеграла I^{+-} при $\nu > t$ дается вкладом краевой точки $p = 0$, который имеет вид

$$(I_1^{+-})_0 = -\frac{e^{i\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + i\frac{\nu^2}{4\sigma}}}{4\sqrt{\pi\sigma}t^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{t} + \frac{\nu}{2\sigma}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)\right). \quad (87)$$

Выражение (87) пригодно во всей области (15).

Асимптотика I^{+-} при $\nu < t$ описывается суммой вклада края (87) и вклада критической точки фазы p_1 . Последний дается выражением

$$(I^{+-})_1 = \frac{e^{i\left(\frac{2}{3}\tilde{\nu}^{\frac{3}{2}} - \sigma(t-\nu) - \frac{2}{3}\sigma^3\right) - i\frac{\pi}{4}}}{2\tilde{\nu}^{\frac{1}{4}}} \left(1 + O\left(\frac{\sigma^2}{\tilde{\nu}(\tilde{\nu} - \sigma)^3}\right)\right), \quad (88)$$

ср. (68) и (69). Формула (88) описывает лучи ℓ_1 до отражения от плоской части границы, см. (47). Аппроксимация (88) пригодна в области, где выполнено неравенство (70).

3. Критическая точка p_4 фазы интеграла I^{-+} отрицательна и далека от $p = 0$ при любых значениях σ и ν , поэтому асимптотика I^{-+} определяется только вкладом краевой точки $p = 0$, который отличается от (87) лишь знаком перед $t^{3/2}$ в фазе экспоненты и постоянным множителем $-i$:

$$(I_1^{-+})_0 = i\frac{e^{-i\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + i\frac{\nu^2}{4\sigma}}}{4\sqrt{\pi\sigma}t^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{t} + \frac{\nu}{2\sigma}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)\right). \quad (89)$$

Выражение (89), как и (87), пригодно во всей области (15).

4. Выше мы привели геометрическую интерпретацию вкладов критических точек в асимптотику интегралов. Рассмотрим теперь вклады краевой точки $p = 0$.

Сумма вкладов (64) и (83) точки $p = 0$ в интегралы I_1^{-} и I_1^{++} имеет вид

$$\begin{aligned} (I_1^{-})_0 + (I_1^{++})_0 &= -\frac{e^{i\frac{\nu^2}{4\sigma} - i\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{\pi\sigma}t^{\frac{1}{4}} \varepsilon} (1 + \delta) - \\ &\quad - \frac{e^{i\frac{\nu^2}{4\sigma} - i\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{\pi\sigma}t^{\frac{1}{4}} \varepsilon^2} \left[\frac{1}{4t} + \frac{1}{2\sqrt{t}\varepsilon} (1 + \delta)\right]. \quad (90) \end{aligned}$$

см. (52) и (65). Поскольку t – это корень производной функции Эйри, $v'(t) = 0$, и $t \gg 1$, то $\cos\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = O(t^{-3/2})$, а $\sin\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = O(1)$, см. [17]. Следовательно, в зависимости от значения ε , слагаемое

с $\cos(\dots)$ может быть как одного порядка с членами с $\sin(\dots)$, так и большего или меньшего порядка. Нетрудно проверить, что в области, где

$$|\varepsilon| \ll \sqrt{t} \Leftrightarrow |\gamma - \varphi| \ll \gamma, \quad (91)$$

т.е. довольно близко к предельному лучу l_O , старшим в (90) является второй член с $\sin(\dots)$. Не слишком близко к предельному лучу, где

$$\varepsilon \sim \sqrt{t} \Leftrightarrow |\gamma - \varphi| \sim \gamma, \quad (92)$$

все слагаемые в (90) одного порядка. Выше предельного луча, где

$$|\varepsilon| \gg \sqrt{t} \Leftrightarrow |\gamma - \varphi| \gg \gamma, \quad (93)$$

главным является член с $\cos(\dots)$. Отметим, что условия (91), (92) и (93) не противоречат неравенствам (66), обеспечивающим малость поправочных членов.

Сумма вкладов (87) и (89) точки $p = 0$ в интегралы I_1^{+-} и I_1^{-+} имеет гораздо более простой вид:

$$(I_1^{+-})_0 + (I_1^{-+})_0 = -\frac{e^{i\frac{\nu^2}{4\sigma} - i\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{\pi}\sigma t^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{t} + \frac{\nu}{2\sigma}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)\right). \quad (94)$$

Из (50) видно, что фазы экспонент в (90), (94) согласуются с эйконалом цилиндрической волны в области

$$kr\varphi^4 \ll 1. \quad (95)$$

Сложим (90) с (94) и перейдем от растянутых переменных к полярным координатам (3) с помощью (7) и (53). Сшивая полученное выражение с лучевой формулой (1) в области (2), (95), получим, что дифрагированная волна имеет вид

$$u^{\text{dif}} = A(\varphi; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}, \quad (96)$$

причем в области (91) дифракционный коэффициент дается формулой

$$A(\varphi; k) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}(2ka)^{\frac{2}{3}}t^{\frac{3}{4}}} \frac{\sin\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{(\gamma - \varphi)^3} \left(1 + O\left(\frac{\gamma - \varphi}{\gamma}\right) + \delta\right) - \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4\sqrt{\pi}t^{\frac{1}{4}}} \frac{\cos\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{\gamma + \varphi} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)\right), \quad (97)$$

в области (92) – формулой

$$A(\varphi; k) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4\sqrt{\pi}t^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \left[\frac{1}{\gamma + \varphi} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)\right) + \frac{1}{\gamma - \varphi} (1 + \delta) \right] - \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}\sigma t^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \times \left[\frac{1}{2^{\frac{7}{6}}t^{\frac{1}{3}}(ka)^{\frac{1}{3}}(\gamma - \varphi)^2} + \frac{2^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{t}(ka)^{\frac{2}{3}}(\gamma - \varphi)^3} (1 + \delta) \right], \quad (98)$$

а в области (93) – формулой

$$A(\varphi; k) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4\sqrt{\pi}t^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \times \left[\frac{1}{\gamma + \varphi} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)\right) + \frac{1}{\gamma - \varphi} \left(1 + O\left(\frac{\gamma}{\gamma - \varphi}\right) + \delta\right) \right]. \quad (99)$$

Выражения (97), (98) и (99) пригодны в области, где выполнены неравенства (66) и (95). Отметим, что дифракционный коэффициент не линеен по скачку кривизны $1/a$, что отличает рассматриваемую задачу от большинства задач дифракции на негладкости кривизны (см., напр., в [1, 7, 11]). Подобная зависимость от скачка кривизны возникла ранее лишь в случае $t = O(1)$, и только для условия Дирихле, см. [11].

5.2. Исследование интеграла I_2 . Теперь обратимся к исследованию интеграла I_2 по интервалу L_2 , см. (61), где функция Эйри меняется медленно. Для удобства представим интеграл в виде суммы

$$I_2 = I_2^- + I_2^+,$$

где

$$I_2^\pm = \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}\sigma} \int_{L_2} v(p - t) e^{i\frac{(p \pm \nu)^2}{4\sigma}} dp. \quad (100)$$

Рассмотрим область, где $\sigma \ll 1$, и $1/4\sigma$ в показателях экспонент в (100) можно рассматривать как большой параметр. У подынтегральной функции в I_2^+ нет особых точек на интервале L_2 , и интеграл имеет порядок $\sqrt{\sigma}$. При ν близких к t фаза интеграла I_2^- имеет критическую точку $p = \nu$, и его асимптотика дается выражением

$$I_2^- = v(\nu - t) (1 + O(\sigma(\nu - t))). \quad (101)$$

Формула (101) описывает проникновение падающей волны шепчущей галереи направо от оси y . Если же $|\nu - t| \gg 1$, то интеграл I_2^- не имеет особых точек и асимптотически не упрощается.

В области $\sigma \gtrsim 1$ интегралы (100) также не допускают асимптотического упрощения.

Напомним, что интеграл I_3 по интервалу L_3 (62), где функция Эйри экспоненциально убывает, пренебрежимо мал по сравнению с I_2 .

§6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Волновое поле детально исследовано в рамках метода параболического уравнения в малой окрестности точки скачка кривизны O справа от нее. Также проведен подробный геометрический анализ задачи, позволивший дать геометрическую интерпретацию построенным асимптотическим формулам. Заметим, что лучи, близкие к горизонтальному лучу l_B (см. рис. 2), не удалось описать аналитически. По-видимому, это связано с недостаточной точностью аппроксимации (9) для падающей волны.

Сравним полученные выше результаты для случая большого номера моды падающей волны шепчущей галереи с результатами исследования [11], посвященного случаю небольшого номера. Проникновение волны шепчущей галереи правее оси y описывается одной и той же формулой, см. (101), однако в остальном структура поля справа от оси y в этих двух случаях сильно отличается.

Во-первых, при $t \gg 1$ в асимптотике поля явно выделяются соответствующие лучам слагаемые (68), (69), (84).

Во-вторых, справа от O возникает достаточно протяженная каустика, в окрестности которой поле описывается выражением (80).

В-третьих, дифрагированная волна (96) имеет сингулярность на предельном луче l_O , см. рис. 2, а не на прямолинейной части границы. Дифракционный коэффициент в случае $t \gg 1$ зависит от амплитуды скачка кривизны $1/a$ не линейно, тогда как для $t = O(1)$ и граничных условий Неймана он был линейен по $1/a$.

Поле вблизи предельного луча описывается интегралами Френеля (71), (74) и (85), аргументы (73), (75) и (86) которых зависят от кривизны вогнутой части границы (причем один из них мнимый, что нетипично для дифракционных задач), а не функциями параболического цилиндра D_{-4} с не зависящими от геометрических параметров задачи аргументами, как это было в случае умеренных t , см. [11]. Кроме того,

при $t = O(1)$, естественно, не возникало вопроса об описании поля в окрестности точки касания каустики и границы света и тени.

Автор выражает благодарность А. П. Киселеву за помощь в подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. В. Попов, *Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны*. — Тр. V Всес. симпоз. по дифр. и распр. волн. Л., Наука, 1971. 171–175.
2. L. Kaminetzky, J. B. Keller, *Diffraction coefficients for higher order edges and vertices*. — SIAM J. Appl. Math. **22**, No. 1 (1972), 109–134.
3. Z. M. Rogoff, A. P. Kiselev, *Diffraction at jump of curvature on an impedance boundary*. — Wave Motion **33**, No. 2 (2001), 183–208.
4. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Поведение поверхностных волн при переходе через линию сопряжения на границе упругого однородного изотропного тела*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 86–102.
5. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Дифракция волны шепчущей галереи вблизи линии разрыва кривизны*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 95–109.
6. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Краевая волна в задаче дифракции на границе с разрывом кривизны*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **250** (1998), 274–287.
7. E. A. Zlobina, A. P. Kiselev, *Boundary-layer approach to high-frequency diffraction by a jump of curvature*. — Wave Motion **96** (2020), 102571.
8. Е. А. Злобина, *Коротковолновая дифракция на контуре с негладкой кривизной. Пограничный подход*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 169–185.
9. Е. А. Злобина, А. П. Киселев, *Переходная зона в высокочастотной задаче дифракции на импедансной границе со скачком кривизны. Метод Киртгофа и метод пограничного слоя*. — Радиотехника и электроника **67** (2022), 130–139.
10. E. A. Zlobina, A. P. Kiselev, *The Malyuzhinets–Popov diffraction problem revisited*. — Wave Motion **121** (2023), 103172.
11. Е. А. Злобина, А. П. Киселев, *Дифракция волны шепчущей галереи при скачкообразном распрямлении границы*. — Акустический журнал **69**, No. 2 (2023), 119–128.
12. В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер, *Геометрическая теория дифракции*, М., Связь, 1978.
13. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения волн*, М., Наука, 1975.
14. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*, Л., Изд. ЛГУ, 1974.
15. А. И. Ланин, М. М. Попов, *Динамика лучей в окрестности точек распрямления границы*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **104** (1981), 146–155.
16. M. V. Berry, *Inflection reflection: images in mirrors whose curvature changes sign*. — Eur. J. Phys. **42** (2021), 065301.
17. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач*, М., Наука, 1972.

18. М. В. Федорюк, *Асимптотика. Интегралы и ряды*, М., Наука, 1987.
19. А. С. Крюковский, *Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых катастроф*, М., РосНОУ, 2013.
20. А. С. Крюковский, Д. С. Лукин, *Краевые катастрофы в задачах дифракции*. — Радиотехника и электроника **64**, No.11 (2019), 1116–1121.
21. L. Levey, L. V. Felsen, *On incomplete Airy functions and their application to diffraction problems*. — Radio Sci. **4**, No. 10 (1969), 959–969.
22. N. Bleistein, *Uniform asymptotic expansions of integrals with many nearby stationary points and algebraic singularities*. — J. Math. Mech. **17**, No. 6 (1967), 533–559.
23. Ю. И. Орлов, *Дифракция волн на теле с криволинейным ребром в окрестности полутеневого особого каустик*. — Радиотехника и электроника **21**, No. 4 (1976), 730–738.

Zlobina E. A. Diffraction of large-number whispering gallery mode by jump of curvature.

Diffraction of a high-frequency large-number whispering gallery mode is studied, which runs along the concave part of the boundary to its straightening point, where the curvature of the boundary suffers a jump. The “ray skeleton” of the wavefield investigated in detail. Within the framework of the parabolic equation method, asymptotic formulas are constructed for all waves arising in the vicinity of the non-smoothness point of the boundary.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург 199034, Россия
E-mail: ezlobina2@yandex.ru

Поступило 2 октября 2023 г.