Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 521, 2023 г.

М. Н. Демченко

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Памяти Натальи Яковлевны Кирпичниковой

§1. Введение

В работе рассматривается ультрагиперболическое уравнение вида

$$(\Delta_y - \Delta_x)u = 0, \tag{1}$$
$$\Delta_x = \partial^2_{x_1} + \ldots + \partial^2_{x_d}, \quad \Delta_y = \partial^2_{y_1} + \ldots + \partial^2_{y_n},$$

в котором решение $u(x, y)$ определено в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, $d, n \geqslant 1$. В частном случае $d = 1$ или $n = 1$ данное уравнение является (гиперболическим) волновым уравнением.

Мы будем рассматривать C^∞-гладкие решения $u(x, y)$ уравнения (1), для которых справедлива следующая асимптотика на бесконечности

$$u(s\theta, (s + p)\omega) = s^{-N/2+1} f(\theta, \omega, p) + O(s^{-N/2+1-\varepsilon}), \quad s \to +\infty, \tag{2}$$

для некоторого $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, $(\theta, \omega, p) \in S^{d-1} \times S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Здесь и далее $N = d+n$, S^{d-1} (S^{n-1}) – единичная сфера в $\mathbb{R}^d$ ($\mathbb{R}^n$) с центром в начале координат. Функцию $f(\theta, \omega, p)$ мы будем называть данными рассеяния решения $u(x, y)$. Мы найдем семейство решений, обладающих указанной асимптотикой, и, кроме того, мы построим решение уравнения (1), для которого выполнено (2) для заданной функции $f(\theta, \omega, p)$. Последнее означает, что будет установлено существование решения задачи рассеяния для ультрагиперболического уравнения (1).

Для описания регулярности данных рассеяния поясним, что́ мы будем понимать под производными функций, заданных на единичной сфере. Мы будем рассматривать продолжения таких функций на все евклидово пространство, однородные степени ноль (мы не будем вводить отдельное обозначение для этих продолжений). Под частными

Ключевые слова: ультрагиперболическое уравнение, асимптотика решения на бесконечности, задача рассеяния.

производными функции мы будем понимать производные таких продолжений, взятые на единичной сфере.

Нам также понадобится преобразование Гильберта H функций на оси $\mathbb{R}$:

$$(Hf)(p) = \frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(p')}{p-p'}\,dp'.$$

В терминах обратного преобразования Фурье (используемое в работе определение преобразования Фурье дано в п. 2) это определение принимает вид

$$(Hf)\check{}(r) = (i\,\operatorname{sgn} r)\check{f}(r). \tag{3}$$

Теперь мы можем сформулировать теорему существования решения задачи рассеяния для уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть функция $f(\theta,\omega,p)$ на $S^{d-1}\times S^{n-1}\times\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям*

$$\partial^{\alpha}_{\theta,\omega} f(\theta,\omega,\pm\infty) = 0, \tag{4}$$

$$|\partial^k_p \partial^{\alpha}_{\theta,\omega} f(\theta,\omega,p)| \leqslant C_{k,\alpha}(1+|p|)^{-k-\varepsilon}, \tag{5}$$

для всех $k\geqslant 1$, $|\alpha|\geqslant 0$ и некоторого $0<\varepsilon\leqslant 1/2$, а также соотношению

$$f(-\theta,-\omega,p) = \begin{cases} f(\theta,\omega,-p), & d-n=0 \mod 4\\ (Hf(\theta,\omega,\,\cdot\,))(-p), & d-n=1 \mod 4\\ -f(\theta,\omega,-p), & d-n=2 \mod 4\\ -(Hf(\theta,\omega,\,\cdot\,))(-p), & d-n=3 \mod 4. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда существует C^∞-гладкое решение $u(x,y)$ уравнения (1)*, для которого выполнено* (2)*.*

Заметим, что преобразование Гильберта в условии (6) корректно определено для функций, удовлетворяющих (4), (5). Это следует из леммы 5, согласно которой обратное преобразование Фурье функции $f(\theta,\omega,\,\cdot\,)$ является регулярной функцией на $\mathbb{R}$, а потому преобразование Гильберта можно определить с помощью соотношения (3).

Условие (6) на данные рассеяния, по-видимому, является необходимым для существования решения в разумном классе функций. В случае $d=3$, $n=1$ (волновое уравнение в трехмерном пространстве) оно принимает вид

$$f(-\theta,-\omega,p) = -f(\theta,\omega,-p)$$

(в этом случае $\omega = \pm 1$) и выполняется автоматически для всех решений задачи Коши с гладкими быстро убывающими данными в какой-либо начальный момент времени [1]. Заметим также, что в случае произвольных d, n мы найдем семейство решений, имеющих асимптотику (2), для которых соотношение (6) также автоматически выполняется (теорема 2).

В гиперболическом случае, когда $d = 1$ или $n = 1$, задачи для уравнения (1), связанные с данными рассеяния, исследовались в ряде работ. Мы упомянем одни из самых первых работ [1, 2], посвященных этой тематике, а также работы [3–6], в которых исследовалось асимптотическое поведение решений гиперболических уравнений на бесконечности. Общий случай $d, n \geqslant 1$ изучен в меньшей степени. Отметим, что корректных задач для ультрагиперболических уравнений известно не так много, как для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. В работе [7] изучена характеристическая задача для уравнения (1), в которой решение $u(x, y)$ находится в области $|x| < |y|$ (или $|x| > |y|$) по его значениям на характеристическом конусе $|x| = |y|$. В упомянутой работе доказаны существование и единственность решения этой задачи в определенном классе, а также получена формула в квадратурах для решения. В работе [8] рассмотрена задача рассеяния для ультрагиперболического уравнения, отличающегося от (1) на постоянный отличный от нуля потенциал (в гиперболическом случае это уравнение Клейна–Гордона–Фока).

§2. Семейство решений, имеющих асимптотику (2)

В работе используется следующее определение преобразования Фурье

$$\widehat{v}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} v(x)dx, \quad v(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} \widehat{v}(\xi)d\xi$$

(здесь и далее $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ – стандартное скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве; в дальнейшем угловыми скобками мы также будем обозначать значение распределения на пробной функции). Для функции $v(x, y)$, определенной в “пространстве-времени” $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, преобразование Фурье удобно определить формулой

$$\widehat{v}(\xi, \eta) = \int\limits_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n} e^{i(-\langle x,\xi\rangle + \langle y,\eta\rangle)} v(x, y)dxdy.$$

Тогда обратное преобразование Фурье имеет вид

$$v(x,y) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n} e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle y,\eta\rangle)} \widehat{v}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta.$$

Преобразование Фурье $\widehat{u}(\xi,\eta)$ решения $u(x,y)$ сосредоточено на конусе $\{|\xi| = |\eta|\}$. Формально это можно записать в виде следующего равенства

$$\langle \widehat{u}, \varphi\rangle = \int\limits_{S^{d-1}} d\zeta \int\limits_{S^{n-1}} d\sigma \int\limits_0^\infty A(\zeta,\sigma,r)\varphi(r\zeta, r\sigma)\, dr \tag{7}$$

(здесь и далее в подобных случаях под $d\zeta$ ($d\sigma$) мы подразумеваем элемент площади на сфере S^{d-1} (S^{n-1})), где $\varphi(\xi,\eta)$ – произвольная пробная функция из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n)$, а $A(\zeta,\sigma,r)$ – некоторая функция на $S^{d-1}\times S^{n-1}\times\mathbb{R}_+$.

Мы будем рассматривать функции $A(\zeta,\sigma,r)$, обладающие следующим свойством регулярности

$$|\partial_r^k \partial_{\zeta,\sigma}^\alpha A(\zeta,\sigma,r)| \leqslant C_{\ell,k,\alpha} r^{N/2-k-2+\varepsilon}(1+r)^{-\ell}, \quad \ell,k,|\alpha| \geqslant 0 \tag{8}$$

для какого-либо $0<\varepsilon\leqslant 1/2$. При выполнении этого условия правая часть равенства (7) корректно определена и задает распределение из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n)$. Последнее является решением уравнения (1). В самом деле, для пробной функции $\psi(x,y)$ имеем

$$((\Delta_y-\Delta_x)\psi)\check{}(\xi,\eta) = (\xi^2-\eta^2)\check{\psi}(\xi,\eta),$$

откуда

$$\langle u, (\Delta_x-\Delta_y)\psi\rangle = \langle \widehat{u}, (\xi^2-\eta^2)\check{\psi}\rangle.$$

Полученное выражение равно нулю в силу (7).

Теорема 2. *Пусть функция* $A(\zeta,\sigma,r)$ *удовлетворяет условию* (8) *для некоторого* $0<\varepsilon\leqslant 1/2$. *Тогда функция* $u(x,y)$, *заданная соотношением* (7), *является* C^∞*-гладким решением уравнения* (1), *и выполнено соотношение (2), в котором*

$$f(\theta,\omega,p) = c\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-irp}\left(e^{i\pi(n-d)/4}\Theta(r) + e^{i\pi(d-n)/4}\Theta(-r)\right) \times |r|^{-N/2+1}A(\theta,\omega,r)\, dr, \tag{9}$$

где $c = (2\pi)^{-N/2-1}$, *а функция* A *продолжена на* $r \in \mathbb{R}$ *по правилу*

$$A(\zeta, \sigma, -r) = A(-\zeta, -\sigma, r). \tag{10}$$

При этом $f(\theta, \omega, p)$ *является* C^∞*-гладкой функцией на* $S^{d-1} \times S^{n-1} \times \mathbb{R}$, *удовлетворяющей*

$$f(\theta, \omega, \cdot\,) \in L_q(\mathbb{R}), \quad (\theta, \omega) \in S^{d-1} \times S^{n-1} \tag{11}$$

для любого $1/\varepsilon < q \leqslant \infty$, *и выполнено соотношение* (6).

Заметим, что в силу включения (11) преобразование Гильберта функции $f(\theta, \omega, \cdot\,)$, фигурирующее в соотношении (6), корректно определено.

Мы выведем асимптотику (2) и формулу (9) для решений $u(x, y)$ вида (7) с помощью метода стационарной фазы. Для этого удобно получить более явное представление для этих решений. В силу (7) для пробной функции $\psi(x, y)$ имеем

$$\langle u, \psi \rangle = \langle \widehat{u}, \check{\psi} \rangle$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_0^\infty dr \int\limits_{S^{d-1} \times S^{n-1}} d\zeta d\sigma A(\zeta, \sigma, r) \int\limits_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n} e^{ir(\langle x, \zeta \rangle - \langle y, \sigma \rangle)} \psi(x, y) dx dy.$$

Ввиду условия (8) мы получили абсолютно сходящийся интеграл, равный

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n} dx dy\, \psi(x, y) \int\limits_0^\infty dr \int\limits_{S^{d-1} \times S^{n-1}} e^{ir(\langle x, \zeta \rangle - \langle y, \sigma \rangle)} A(\zeta, \sigma, r) d\zeta d\sigma,$$

откуда

$$u(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_0^\infty dr \int\limits_{S^{d-1} \times S^{n-1}} e^{ir(\langle x, \zeta \rangle - \langle y, \sigma \rangle)} A(\zeta, \sigma, r) d\zeta d\sigma. \tag{12}$$

Из полученного равенства следует C^∞-гладкость функции $u(x, y)$ в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ ввиду быстрого убывания функции A при больших r, которое следует из условия (8).

Выводу асимптотики (2) и формулы (9) посвящен п. 3. В оставшейся части этого параграфа мы докажем остальные утверждения теоремы 2, а затем приведем доказательство теоремы 1.

Из формулы (9) следует, что функция $f(\theta,\omega,p)$ является преобразованием Фурье функции

$$\check f(\theta,\omega,r)=c\left(e^{i\pi(n-d)/4}\Theta(r)+e^{i\pi(d-n)/4}\Theta(-r)\right)|r|^{-N/2+1}A(\theta,\omega,r) \quad (13)$$

по переменной r, допускающей оценку

$$|\check f(\theta,\omega,r)|\lesssim |r|^{-1+\varepsilon}(1+|r|)^{-\ell}.$$

Поэтому $\check f(\theta,\omega,r)$ является суммируемой функцией, быстро убывающей при $r\to\infty$, а значит, функция $f(\theta,\omega,p)$ является C^∞-гладкой функцией переменной p. Кроме того, ясно, что $\check f(\theta,\omega,\cdot\,)\in L_q(\mathbb{R})$, $1\leqslant q<1/(1-\varepsilon)$, откуда по теореме Хаусдорфа-Юнга [9, теорема 7.1.13] следует включение (11).

Выведем теперь соотношение (6) из равенства (13). Последнее вместе с правилом (10) дают

$$\check f(-\theta,-\omega,r)=c\left(e^{i\pi(n-d)/4}\Theta(r)+e^{i\pi(d-n)/4}\Theta(-r)\right)|r|^{-N/2+1}A(\theta,\omega,-r).$$

Вновь применив (13), мы приходим к равенству

$$\check f(-\theta,-\omega,r)=\check f(\theta,\omega,-r)\,\frac{e^{i\pi(n-d)/4}\Theta(r)+e^{i\pi(d-n)/4}\Theta(-r)}{e^{i\pi(d-n)/4}\Theta(r)+e^{i\pi(n-d)/4}\Theta(-r)},$$

которое можно записать в виде

$$\check f(-\theta,-\omega,r)=\check f(\theta,\omega,-r)\cdot\begin{cases}1, & d-n=0 \mod 4\\ -i\,\mathrm{sgn}\,r, & d-n=1 \mod 4\\ -1, & d-n=2 \mod 4\\ i\,\mathrm{sgn}\,r, & d-n=3 \mod 4.\end{cases} \quad (14)$$

Применив преобразование Фурье по переменной r, мы получим равенство (6).

Перейдем к доказательству теоремы 1. Для $r>0$ положим

$$A(\zeta,\sigma,r)=\check f(\zeta,\sigma,r)c^{-1}e^{i\pi(d-n)/4}r^{N/2-1}, \quad (15)$$

где $\check f(\zeta,\sigma,r)$, как и в предыдущем рассуждении, есть обратное преобразование Фурье функции $f(\zeta,\sigma,p)$ по переменной p. Согласно лемме 5 из условий (4), (5) на функцию f следует, что $\check f(\theta,\omega,\cdot\,)$ является регулярной функцией на $\mathbb{R}$. Более того, из оценки (26) следует, что введенная по формуле (15) функция A удовлетворяет условию (8) при $\alpha=0$. Выполнение этого условия в случае произвольного α проверяется аналогично.

Таким образом, согласно теореме 2 мы можем определить функцию $u(x,y)$ с помощью равенства (7), получив при этом гладкое решение уравнения (1). Кроме того, для этого решения выполнено (2), в котором f следует заменить на функцию g, связанную с A соотношением (9). Остается подставить в это соотношение функцию A вида (15) и убедиться, что $g = f$. Это можно сделать непосредственным вычислением, используя условие (6) на функцию f, а точнее, его эквивалентную форму (14).

§3. Асимптотическое поведение решений вида (7)

Ввиду равенства (12) имеем

$$u(s\theta,(s+p)\omega) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^\infty dr \int\limits_{S^{d-1}\times S^{n-1}} e^{irs(\langle\theta,\zeta\rangle-\langle\omega,\sigma\rangle)}e^{-irp\langle\omega,\sigma\rangle}A(\zeta,\sigma,r)\,d\zeta d\sigma. \quad (16)$$

Найдем асимптотику внутреннего интеграла в (16) при $s \to +\infty$ методом стационарной фазы. Функция

$$Q(\zeta,\sigma) = \langle\theta,\zeta\rangle - \langle\omega,\sigma\rangle$$

в показателе первой экспоненты имеет четыре критических точки:

$$(\zeta,\sigma) \in \{(\theta,\omega),(-\theta,-\omega),(-\theta,\omega),(\theta,-\omega)\}. \quad (17)$$

Для вычисления вклада в асимптотику какой-либо из этих критических точек мы выберем локальные координаты $(\zeta',\sigma') \in \mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}^{n-1}$ на многообразии $S^{d-1}\times S^{n-1}$ в окрестности этой точки. Будем считать, что критической точке соответствуют координаты $(\zeta',\sigma') = (0,0)$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}^{n-1}} e^{irsQ(\zeta,\sigma)}e^{-irp\langle\omega,\sigma\rangle}A(\zeta,\sigma,r)J(\zeta',\sigma')\,d\zeta' d\sigma', \quad (18)$$

где $J(\zeta',\sigma')$ – гладкая финитная функция, которая в окрестности начала координат равна соответствующему якобиану перехода к выбранным координатам. Мы также предположим, что носитель этой функции, пересаженной на $S^{d-1}\times S^{n-1}$, содержит лишь одну критическую точку функции Q. Для первых двух критических точек $(\zeta,\sigma) =$

$(\pm\theta, \pm\omega)$ в (17) старший член асимптотики данного интеграла имеет вид

$$\left(\frac{2\pi}{rs}\right)^{N/2-1} |\det \partial^2_{\zeta',\sigma'} Q|^{-1/2} e^{i\pi \operatorname{sgn}\left(\partial^2_{\zeta',\sigma'} Q\right)/4} e^{\mp irp} AJ\big|_{(\zeta',\sigma')=(0,0)}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\theta = e_d$, $\omega = e_n$ (e_j – стандартные орты в евклидовом пространстве). Рассмотрим критическую точку $(\zeta, \sigma) = (\theta, \omega)$. В этом случае удобно выбрать следующие локальные координаты

$$(\zeta', \sigma') \mapsto (\zeta, \sigma)$$
$$= \left(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_{d-1}, \sqrt{1-\zeta'^2_1 - \ldots - \zeta'^2_{d-1}}, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-1}, \sqrt{1-\sigma'^2_1 - \ldots - \sigma'^2_{n-1}}\right).$$

В этих координатах имеем

$$J(0,0) = 1,$$
$$Q = \zeta_d - \sigma_n, \quad \partial_{\zeta'_k} Q = \frac{-\zeta'_k}{\zeta_d}, \quad \partial_{\sigma'_k} Q = \frac{\sigma'_k}{\sigma_n},$$
$$\partial^2_{\zeta'_j \zeta'_k} Q = \frac{-\delta_{jk}}{\zeta_d} - \frac{\zeta'_j \zeta'_k}{\zeta_d^3}. \quad \partial^2_{\sigma'_j \sigma'_k} Q = \frac{\delta_{jk}}{\sigma_n} + \frac{\sigma'_j \sigma'_k}{\sigma_n^3}, \quad \partial^2_{\zeta'_j \sigma'_k} Q = 0.$$

Поэтому при $(\zeta', \sigma') = (0,0)$ выполнено

$$|\det \partial^2_{\zeta',\sigma'} Q| = 1, \quad \operatorname{sgn}\left(\partial^2_{\zeta',\sigma'} Q\right) = n - d.$$

Таким образом, интеграл (18) имеет следующую асимптотику при $s \to +\infty$:

$$\left(\frac{2\pi}{rs}\right)^{N/2-1} e^{i\pi(n-d)/4} e^{-irp} A(\theta, \omega, r).$$

При этом остаток допускает следующую оценку [9, теорема 7.7.5]

$$\frac{C(A,r)}{(rs)^{N/2-1/2}},$$

где $C(A,r)$ оценивается через норму произведения

$$e^{-irp\langle\omega,\sigma\rangle} A(\zeta, \sigma, r) J(\zeta', \sigma')$$

как функции переменных ζ', σ' в пространстве $C^N(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{n-1})$ (в случае нечетных N можно взять норму $C^{N-1}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{n-1})$). Имеем

$$C(A,r) \lesssim (1 + r^N)\, \|A(\,\cdot\,, \,\cdot\,, r)\|_{C^N(S^{d-1} \times S^{n-1})}$$

(зависимость $C(A,r)$ от параметра p не указывается, поскольку он считается фиксированным). Отсюда в силу (8) при $k=0$, $|\alpha|\leqslant N$ вытекает

$$C(A,r)\lesssim r^{N/2-2+\varepsilon}(1+r)^{-\ell}.$$

Таким образом, мы получаем следующую оценку остатка

$$Cs^{-N/2+1/2}r^{-3/2+\varepsilon}(1+r)^{-\ell}. \tag{19}$$

При рассмотрении других критических точек (17) мы получим такую же оценку остатка. Стандартным образом (с помощью гладкого разбиения единицы на $S^{d-1}\times S^{n-1}$) можно показать, что разность внутреннего интеграла в (16) и суммы интегралов вида (18) для всех критических точек также не превосходит (19).

При рассмотрении критической точки $(\zeta,\sigma)=(-\theta,-\omega)$ в определении локальных координат следует поменять знак перед квадратными корнями. В результате мы получим

$$|\det\partial^2_{\zeta',\sigma'}Q|=1,\quad \operatorname{sgn}\left(\partial^2_{\zeta',\sigma'}Q\right)=d-n.$$

Тогда соответствующий вклад в старший член асимптотики равен

$$\left(\frac{2\pi}{rs}\right)^{N/2-1}e^{i\pi(d-n)/4}e^{irp}A(-\theta,-\omega,r).$$

Вклады оставшихся двух критических точек $(\zeta,\sigma)=(\mp\theta,\pm\omega)$ мы запишем не уточняя константы C_1, C_2:

$$\left(\frac{2\pi}{rs}\right)^{N/2-1}\left(C_1e^{-2irs}e^{-irp}A(-\theta,\omega,r)+C_2e^{2irs}e^{irp}A(\theta,-\omega,r)\right).$$

Таким образом, внутренний интеграл в (16) имеет следующую асимптотику при $s\to+\infty$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\pi}{rs}\right)^{N/2-1}&e^{i\pi(n-d)/4}\left\{e^{-irp}A(\theta,\omega,r)+i^{d-n}e^{irp}A(-\theta,-\omega,r)\right.\\&\left.+\,C_1e^{-2irs}e^{-irp}A(-\theta,\omega,r)+C_2e^{2irs}e^{irp}A(\theta,-\omega,r)\right\}\end{aligned}\tag{20}$$

с оценкой остатка вида (19).

Обратимся к интегралу по r в (16). Разобьем его на сумму двух интегралов по интервалам $0<r<1/s$ и $r>1/s$. Интеграл остатка (19) по интервалу $r > 1/s$ по абсолютной величине не превосходит

$$Cs^{-N/2+1/2}\int\limits_{1/s}^{\infty} r^{-3/2+\varepsilon}(1+r)^{-\ell}dr \lesssim s^{-N/2+1-\varepsilon}.$$

Интеграл, соответствующий первым двум слагаемым в фигурных скобках в (20), по интервалу $r > 1/s$ равен

$$\left(\frac{2\pi}{s}\right)^{N/2-1} e^{i\pi(n-d)/4}\int\limits_{1/s}^{\infty} r^{-N/2+1}\big\{e^{-irp}A(\theta,\omega,r)+i^{d-n}e^{irp}A(-\theta,-\omega,r)\big\}\, dr.$$

Из (8) при $k = |\alpha| = 0$ и достаточно большом ℓ, вытекает, что при $s \to +\infty$ интеграл в данном выражении стремится к соответствующему интегралу по полуоси $r > 0$. Поэтому данное выражение равно

$$\left(\frac{2\pi}{s}\right)^{N/2-1} e^{i\pi(n-d)/4}$$
$$\times\int\limits_{0}^{\infty} r^{-N/2+1}\left\{e^{-irp}A(\theta,\omega,r)+i^{d-n}e^{irp}A(-\theta,-\omega,r)\right\} dr+O(s^{-N/2+1-\varepsilon}).$$

Рассмотрим теперь третье слагаемое в фигурных скобках в (20) (для четвертого слагаемого рассуждение аналогично). Соответствующий интеграл по интервалу $r > 1/s$ с точностью до постоянного множителя равен

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{1}{s}\right)^{N/2-1}&\int\limits_{1/s}^{\infty} r^{-N/2+1}e^{-2irs}e^{-irp}A(-\theta,\omega,r)dr\\
&= \frac{i}{s^{N/2}}\int\limits_{1/s}^{\infty} r^{-N/2+1}\partial_r(e^{-2irs})e^{-irp}A(-\theta,\omega,r)dr\\
&= \frac{-ie^{-2i}e^{-ip/s}\,A(-\theta,\omega,1/s)}{s}\\
&\quad - \frac{i}{s^{N/2}}\int\limits_{1/s}^{\infty} e^{-2irs}\partial_r\left(e^{-irp}r^{-N/2+1}A(-\theta,\omega,r)\right) dr.
\end{aligned}$$

Используя условие (8) при $\alpha = 0$, $k \leqslant 1$ и достаточно большом ℓ, легко убедиться, что полученное выражение равно $O(s^{-N/2+1-\varepsilon})$ при $s \to +\infty$.

Вновь применив условие (8), мы можем оценить интеграл по $r < 1/s$ в (16) по абсолютной величине выражением

$$C \int_0^{1/s} r^{N/2-2+\varepsilon} dr = Cs^{-N/2+1-\varepsilon}.$$

Мы получили соотношение (2), в котором

$$f(\theta, \omega, p) \\ = \frac{e^{i\pi(n-d)/4}}{(2\pi)^{N/2+1}} \int_0^\infty r^{-N/2+1} \left\{ e^{-irp} A(\theta, \omega, r) + i^{d-n} e^{irp} A(-\theta, -\omega, r) \right\} dr.$$

Продолжив функцию A на $r \in \mathbb{R}$ по правилу (10), мы приходим к соотношению (9).

§4. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Предположим, что $f(p)$ – измеримая функция на $\mathbb{R}$, и для некоторого $0 < \varepsilon < 1$ выполнено*

$$|f(p)| \leqslant \frac{C}{(1+|p|)^{1+\varepsilon}}.$$

Тогда ее обратное преобразование Фурье $V(r)$ принадлежит $C^\varepsilon(\mathbb{R})$.

Доказательство. Оценка нормы $\|V\|_{L_\infty}$ очевидна. Оценим разность $V(r) - V(r')$ для $|r - r'| \leqslant 1$, считая без ограничения общности, что $r' = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} 2\pi |V(r) - V(0)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(p)(e^{irp} - 1)| dp \\ &\lesssim \int_{|p|<1/r} |f(p)(e^{irp} - 1)| dp + \int_{|p|>1/r} |f(p)| dp \\ &\leqslant r \int_{|p|<1/r} |f(p)p|\, dp + \int_{|p|>1/r} |f(p)|\, dp. \end{aligned}$$

Оба слагаемых полученной суммы оцениваются величиной Cr^ε. $\square$

Лемма 2. *Предположим, что $f(p)$ – липшицева функция на $\mathbb{R}$, такая что*

$$f(\pm\infty) = 0, \quad |\partial f(p)| \leqslant \frac{C}{(1+|p|)^{1+\varepsilon}}$$

для некоторого $0 < \varepsilon < 1$. Тогда ее обратное преобразование Фурье $V(r)$ есть регулярная функция на $\mathbb{R}$, непрерывная в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, и выполнено

$$|V(r)| \leqslant \frac{C}{|r|^{1-\varepsilon}}.$$

Доказательство. Применив лемму 1 к функции $\partial f(p)$, мы получим что функция $w(r) = rV(r)$ принадлежит $C^\varepsilon(\mathbb{R})$. Покажем, что $w(0) = 0$. Пусть

$$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \chi(r)dr = 1, \quad \chi_h(r) = h^{-1}\chi(h^{-1}r), \quad h > 0.$$

В силу непрерывности функции $w(r)$ имеем

$$w(0) = \lim_{h\to 0}\langle w, \chi_h\rangle.$$

Так как $\check{\chi}_h(p) = \check{\chi}(hp)$, имеем

$$\langle w, \chi_h\rangle = \langle \widehat{w}, \check{\chi}_h\rangle = i\langle \partial f, \check{\chi}_h\rangle = i\int\limits_{\mathbb{R}} \partial f(p)\check{\chi}(hp)dp.$$

Учитывая, что $\check{\chi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, мы можем сделать интегрирование по частям в последнем интеграле, что дает

$$-h\int\limits_{\mathbb{R}} f(p)(\partial\check{\chi})(hp)dp = -\int\limits_{\mathbb{R}} f(p/h)\partial\check{\chi}(p)dp. \tag{21}$$

Из условий леммы с помощью формулы Ньютона–Лейбница нетрудно вывести, что

$$(1+|p|)^\varepsilon f \in L_\infty(\mathbb{R}).$$

Поэтому $|f(p/h)| \leqslant C(1+|p|/h)^{-\varepsilon} \to 0$, $h \to 0$, при $p \neq 0$. Кроме того, подинтегральная функция в последнем интеграле имеет суммируемую мажоранту в виде $C|\partial\check{\chi}(p)|$, поэтому предел интеграла при $h \to 0$, а тогда и значение $w(0)$, равен нулю.

Таким образом, $w(r)/r$ есть регулярная функция на $\mathbb{R}$, непрерывная в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, причем для нее выполнено

$$\left|\frac{w(r)}{r}\right| \leqslant \frac{C}{|r|^{1-\varepsilon}}.$$

Нам остается показать, что $V(r) = w(r)/r$.

Из равенства

$$r(V(r) - w(r)/r) = 0$$

(понимаемого как равенство распределений на $\mathbb{R}$) следует, что

$$V(r) - w(r)/r = c\,\delta(r)$$

для некоторой постоянной c. Покажем, что $c = 0$. Из последнего соотношения для $h > 0$ получаем

$$h\langle V, \chi_h\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} w(r)r^{-1}\chi(r/h)dr + c\chi(0).$$

Интеграл в полученном выражении стремится к нулю при $h \to 0$. С другой стороны,

$$h\langle V, \chi_h\rangle = h\langle f, \check{\chi}_h\rangle = h\int\limits_{\mathbb{R}} f(p)\check{\chi}(hp)dp = \int\limits_{\mathbb{R}} f(p/h)\check{\chi}(p)dp.$$

Мы получили интеграл, аналогичный интегралу в (21). Он также стремится к нулю при $h \to 0$. Из нашего рассуждения следует, что $c\chi(0) = 0$. Выбрав функцию $\chi(r)$, отличную от нуля при $r = 0$, мы получим требуемое утверждение. □

Лемма 3. *Предположим, что* $f(p)$ *– функция класса* $C^K(\mathbb{R})$, $K \geqslant 1$, *такая что*

$$f(\pm\infty) = 0, \quad |\partial^k f(p)| \leqslant \frac{C}{(1+|p|)^{k+\varepsilon}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant K, \tag{22}$$

для некоторого $0 < \varepsilon < 1$. *Тогда ее обратное преобразование Фурье* $V(r)$ *есть регулярная функция на* $\mathbb{R}$, *принадлежащая* $C^{K-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, *и выполнено*

$$|\partial^{k-1}V(r)| \leqslant \frac{C}{|r|^{k-\varepsilon}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant K. \tag{23}$$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. В случае $K = 1$ применима лемма 2. Пусть $K \geqslant 2$, и утверждение леммы верно, при условии, что K заменено на $K-1$. Рассмотрим функцию $\partial(pf(p))$.

Она удовлетворяет условиям (22) с заменой K на $K-1$. Применив к этой функции индукционное предположение, мы получим, что ее обратное преобразование Фурье $W(r)$ регулярно на $\mathbb{R}$, и выполнено

$$W \in C^{K-2}(\mathbb{R}\setminus\{0\}), \quad |\partial^{K-2}W(r)| \leqslant \frac{C}{|r|^{K-1-\varepsilon}}. \tag{24}$$

Функция $W(r)$ с точностью до постоянного множителя равна $r\partial V(r)$, поэтому функция $\partial^{K-2}W(r)$ с точностью до постоянного множителя равна

$$r\partial^{K-1}V(r) + (K-2)\partial^{K-2}V(r).$$

Второе слагаемое данной суммы мы можем оценить применив индукционное предположение к функции f и взяв $k = K-1$ в (23):

$$V \in C^{K-2}(\mathbb{R}\setminus\{0\}), \quad |\partial^{K-2}V(r)| \leqslant \frac{C}{|r|^{K-1-\varepsilon}}.$$

Отсюда и из (24) следует оценка (23) для $k = K$. Для меньших k эта оценка верна в силу индукционного предположения. $\square$

Лемма 4. *Предположим, что $f(p)$ – функция класса $C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющая* (22) *для сколь угодно больших K. Тогда ее обратное преобразование Фурье $V(r)$ есть регулярная функция на $\mathbb{R}$, принадлежащая $C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, и выполнено*

$$|\partial^k V(r)| \leqslant C_{\ell,k}|r|^{-\ell}, \quad \ell, k \geqslant 0, \tag{25}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $k = 0$. Заметим, что функция $\partial^\ell f(p)$ удовлетворяет условиям (22) для сколь угодно больших K. Обратное преобразование Фурье этой функции с точностью до постоянного множителя равно $r^\ell V(r)$. Применив к $\partial^\ell f(p)$ лемму 3 и положив $k = 1$ в неравенстве (23), мы получим, что

$$|V(r)| \leqslant C_\ell |r|^{-\ell-1+\varepsilon}.$$

Ввиду произвольности ℓ, мы получаем (25) для $k = 0$.

В случае произвольного k мы применим метод математической индукции по k. Пусть неравенство (25) верно при $k < k_0$ для произвольной функции, удовлетворяющей условиям леммы. Заметим, что функция $\partial(pf(p))$ удовлетворяет условиям (22) для сколь угодно больших K. Применив к ней (25) с $k = k_0 - 1$, мы получим, что

$$|\partial^{k_0-1}(r\partial V(r))| \leqslant C_{\ell,k_0}|r|^{-\ell}, \quad \ell \geqslant 0.$$

Поскольку

$$\partial^{k_0-1}(r\partial V(r)) = r\partial^{k_0} V(r) + (k_0-1)\partial^{k_0-1}V(r),$$

а производная $\partial^{k_0-1}V(r)$ по индукционному предположению оценивается величиной $C_{\ell,k_0}|r|^{-\ell}$, $\ell \geqslant 0$, мы получаем (25). □

Лемма 5. *Предположим, что $f(p)$ – функция класса $C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющая* (22) *для сколь угодно больших K. Тогда ее обратное преобразование Фурье $V(r)$ есть регулярная функция на $\mathbb{R}$, принадлежащая $C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, и выполнено*

$$|\partial^k V(r)| \leqslant C_{\ell,k} r^{-k-1+\varepsilon}(1+|r|)^{-\ell}, \quad \ell, k \geqslant 0. \tag{26}$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из лемм 3, 4. □

Список литературы

1. А. С. Благовещенский, *О некоторых новых корректных задачах для волнового уравнения.* — Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн (1970), 29–35, Ленинград, Наука, 1971.
2. П. Лакс, Р. Филлипс, *Теория рассеяния*, Москва, Мир, 1971.
3. H. E. Moses, R. T. Prosser, *Acoustic and Electromagnetic Bullets: Derivation of New Exact Solutions of the Acoustic and Maxwell's Equations.* — SIAM J. Appl. Math. **50**, No. 5 (1990), 1325–1340.
4. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор).* — Оптика и спектроскопия **102**, No. 4 (2007), 661–681.
5. А. Б. Плаченов, *Выражение энергии акустического, электромагнитного и упругого волнового поля через его асимптотику на больших временах и расстояниях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 269–287.
6. М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, *Об одной задаче управления для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **332** (2006), 19–37.
7. А. С. Благовещенский, *О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения.* — Матем. сб., **63:105**, No. 1 (1964), 137–168.
8. М. Н. Демченко, *Асимптотические свойства решений одного ультрагиперболического уравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **516** (2022), 40–64.
9. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, том 1: *Теория распределений и анализ Фурье*, М. Мир, 1986.

Demchenko M. N. Existence of a solution to the scattering problem for the ultrahyperbolic equation.

We consider the ultrahyperbolic equation in the Euclidean space. The behavior at the infinity of a certain class of solutions is studied. We examine the issue of existence of solutions to the scattering problem: for a given asymptotics at the infinity the corresponding solution to the equation is constructed.

С.-Петербургское
Отделение Математического Института
им. В.А.Стеклова РАН, С.-Петербург, Россия
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 29 сентября 2023 г.