Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 521, 2023 г.

И. А. Благовещенский, А. П. Киселев

СИНГУЛЯРНЫЙ АСТИГМАТИЧЕСКИЙ СПЛЭШ-ИМПУЛЬС – РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

§1. Введение

Хёрмандер [1] обнаружил возможность существования решений однородного волнового уравнения

$$\Box u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad c = \mathrm{const} > 0, \tag{1}$$

имеющих довольно сильную сингулярность в бегущей со скоростью c пространственной точке. Он привел содержащий произвольную гладкую функцию пример такого решения, оказавшийся, как впоследствии выяснено в [2], совпадающим с гораздо более старым примером Бейтмена [3, 4]. В недавних работах [2, 5–8] исследовались вопросы о том, являются ли различные модификации и обобщения решения Бейтмена решениями однородного волнового уравнения (и не только с тремя пространственными переменными), или же они решают задачи о бегущих точечном источниках. Во всех этих работах рассматривались либо двумерный случай, либо осесимметрический.

Здесь мы приводим пример сингулярного решения с неосесимметрическим – или, как принято говорить в работах по оптике – астигматическим обобщением фазы Бейтмена [9]. В процессе доказательства того факта, что оно удовлетворяет однородному уравнению, устанавливается его связь с другим важным точным решением.

§2. Основные определения

Введем характеристические переменные

$$\alpha = z - ct, \ \beta = z + ct, \tag{2}$$

и сделаем комплексные сдвиги по β. Положим

$$\beta_{1,2} = z + ct - ib'_{1,2} - b''_{1,2},$$

Ключевые слова: волновое уравнение, точные решения, решение Бейтмена, сплэш-импульс.

где $b'_{1,2}$, $b''_{1,2}$ произвольные вещественные числа, причем, для определенности $b'_{1,2} > 0$. Таким образом, $\beta_{1,2}$ лежат в нижней полуплоскости. Далее, пусть

$$\theta = \alpha + \frac{x^2}{\beta_1} + \frac{y^2}{\beta_2} \tag{3}$$

– *комплексифицированая фаза Бейтмена, отвечающая простому астигматизму.* Тогда (в чем можно убедится, например, прямым вычислением) функция

$$u = \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} f(\theta) \tag{4}$$

с любой гладкой *формой волны* f удовлетворяет волновому уравнению (4). Ветви квадратных корней здесь выбраны так, чтобы $\sqrt{\beta_{1,2}}$ были гладкими на вещественной оси.

Выражение (4) сводится к классическому некомплексифицированному, найденному Бейтменом, при $\beta'_1 = \beta'_2 = \beta''_1 = \beta''_2 = 0$. Тогда функция (4) сингулярна. В [10] и [2] разными способами установлено, что анзац (6) удовлетворяет в этом случае однородному волновому уравнению.

Сплэш-импульс (термин взят из оптики[1]) определяется выбором в качестве формы волны сингулярной в бегущей пространственной точке $\{z = ct, x = y = 0\}$ функции

$$f(\theta) := \frac{1}{\theta}, \tag{5}$$

так что

$$u = \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}\theta} = \frac{\sqrt{\beta_1 \beta_2}}{\alpha \beta_1 \beta_2 + \beta_2 x^2 + \beta_1 y^2}. \tag{6}$$

§3. Результат

Результатом заметки является следующая теорема.

Теорема. *Функция, определенная равенством* (6) *удовлетворяет уравнению* (1) *во всем пространстве–времени* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Доказательство. Действительно, пусть функция (6) удовлетворяет уравнению

$$\Box u = 4u_{\alpha\beta} + u_{xx} + u_{yy} = F \tag{7}$$

[1]В оптике так называют осесимметрическое решение, имеющее дополнительный свободный параметр, благодаря чему оно может не иметь сингулярностей [11].

с некоторой обобщенной функцией F. Будем обозначать преобразование Фурье функции V по α шляпкой:

$$\widehat{V}(A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(\alpha) e^{-iA\alpha} d\alpha.$$

Функция

$$\widehat{u} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta, x, y) e^{-iA\alpha} d\alpha \tag{8}$$

удовлетворяет вытекающему из (7) уравнению Шредингера

$$4iA\, \widehat{u}_\beta + \widehat{u}_{xx} + \widehat{u}_{yy} = \widehat{F}. \tag{9}$$

Явное выражение для функции (6) без труда находится с помощью теоремы о вычетах:

$$\widehat{u} = \begin{cases} -\frac{2\pi i}{\sqrt{\beta_1\beta_2}} e^{iA\left(\frac{x^2}{\beta_1}+\frac{y^2}{\beta_2}\right)}, & A > 0, \\ \frac{\pi i}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}, & A = 0, \\ 0, & A < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Функция $\widehat{u}$ оказывается гладкой по x, y и β, и (10), очевидно, удовлетворяет однородному уравнению (9). Отсюда, $\widehat{F} = 0$, и, следовательно,

$$F = 0.$$

Теорема доказана. □

§4. Заключение

Формула (10), связывающая сплэш-импульс с *фундаментальной модой астигматического гауссова пучка* [9], имеет самостоятельный интерес. Другому соотношению такого рода (не получающемуся в частном случае осевой симметрии из (10)) посвящена заметка [12].

В [12], в качестве побочного продукта, было доказано, что осесимметрическая сплэш-мода является решением однородного волнового уравнения. Рассуждение основывалось на применении преобразования Фурье по времени t, что в нашем случае привело бы непроходимо громоздким выкладкам.

Благодарность

Авторы признательны Е. А. Злобиной за полезные замечания.

Список литературы

1. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* Том 1, М., Мир, 1986.
2. A. S. Blagoveshchensky, A. M. Tagirdzhanov, A. P. Kiselev, *On the Bateman–Hörmander solution of the wave equation, having a singularity at a running point.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **471** (2018), 76—85.
3. H. Bateman, *The conformal transformations of space of four dimensions and their applications to geometrical optics.* — Proc. London Math. Soc. **7** (1909), 70–89.
4. Г. Бейтмен, *Математическая теория распространения элекиромагнитных волн.* М.б Наука, 1958.
5. А. С. Благовещенский, А. П. Киселев, А. М. Тагирджанов, *Простые решения волнового уравнения с сингулярностью в бегущей точке, основанные на комплексифицированном решении Бейтмена.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **438** (2015), 73–82.
6. Е. А. Злобина, А. П. Киселев, *Двумерные сингулярные сплэш моды.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **483** (2019), 79–84.
7. А. С. Благовещенский, А. П. Киселев, *Двумерные волны Бейтмена–Хёрмандера с сингулярностью в бегущей точке.* — Матем. заметки **106**, No. 5 (2019), 793–796.
8. А. С. Благовещенский, Е. А. Злобина, А. П. Киселев, *Двумерные аналоги классической волны Бейтмена – решения задач с движущимися источниками.* — Дифференц. уравнения **58**, No. 2 (2022), 270–274.
9. A. P. Kiselev, A. B. Plachenov, P. Chamorro-Posada, *Nonparaxial wave beams and packets with general astigmatism.* — Phys. Rev. A **85**, No. 4 (2012), art. 043835.
10. А. С. Благовещенский, *Плоские волны, решения Бейтмена и источники на бесконечности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **426** (2014), 23–33.
11. S. Feng, H. G. Winful, R. W. Hellwarth, *Spatiotemporal evolution of focused single-cycle electromagnetic pulses.* — Phys. Rev. E. **59** (1999), 4630–4649.
12. А. С. Благовещенский, А. П. Киселев, *О связи между двумя простыми локализованными решениями волнового уравнения.* — ЖВММФ **57**, No. 6 (2017), 958–960.

Blagoveshchenskii I. A., Kiselev A. P. Singular astigmatic splash pulse is a solution of the homogeneous wave equation.

It is proved that a certain simple Bateman-type function having a running singularity, satisfies the homogeneous wave equation on the entire space-time.

Федеральное государственное
казенное военное образовательное
учреждение высшего образования
"Военный учебно-научный центр Военно-Морского Флота
«Военно-морская академия имени Адмирала Флота
Советского Союза Н. Г. Кузнецова»"
E-mail: ilyablagoveshhensky@yandex.ru

Поступило 6 октября 2023 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
Институт проблем машиноведения РАН
E-mail: kiselev@pdmi.rs.ru, aleksei.kiselev@gmail.com