Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 521, 2023 г.

М. И. Белишев, С. А. Симонов

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОДНОГО КЛАССА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

§1. Операторы, пространства, системы

О статье. • В данной статье мы развиваем идеи и результаты работ [3, 4, 16]. Статья написана в рамках программы, намеченной в [16]. Цель этой программы – разработка новой функциональной модели (так называемой *волновой модели*) полуограниченных симметрических операторов, которые имеют широкие применения в математической физике. В [4–7,19], как и в настоящей работе, идеи и конструкции программы проверяются на конкретных классах операторов. Таким образом, перед рассмотрением общей абстрактной ситуации мы набираем опыт на примерах. Класс операторов L_0, который мы рассматриваем, изучается в терминах динамической системы с граничным управлением (ДСГУ), определяемой L_0.

Интерес к этим изысканиям мотивирован обратными задачами. Стимулирует тот факт, что во многих известных случаях решить обратную задачу – это то же самое, что построить волновую модель подходящего L_0 [4, 6].

• Заметим, что обозначения операторов W^T и C^T в аннотации немного отличаются от принятых в остальном тексте. Мы используем обозначение D для обыкновенной производной, а D_i обозначают частные производные по аргументу с номером i.

Оператор L_0. • Пусть $\mathscr{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, L_0 – замкнутый симметрический положительно определенный оператор в $\mathscr{H}$, то есть $\overline{\operatorname{Dom} L_0} = \mathscr{H}$, $L_0 \subset L_0^*$, $(L_0 y, y) \geqslant \gamma \|y\|^2$ на $\operatorname{Dom} L_0$ с $\gamma > 0$. Мы также предполагаем, что L_0 имеет ненулевые индексы дефекта $n_+(L_0) = n_-(L_0) = \dim \mathscr{K} \geqslant 1$, где $\mathscr{K} := \operatorname{Ker} L_0^*$.

Ключевые слова: функциональная модель, разложение Вишика, граничная тройка, одномерный оператор Шредингера, динамическая система с граничным управлением.

Через L обозначим расширение по Фридрихсу оператора L_0, так что выполнено $L_0 \subset L \subset L_0^*$ и $L \geqslant \gamma\mathbb{I}$ (см., например, [10]). Заметим, что L^{-1} ограничен и определен на всем пространстве $\mathscr{H}$.

Дальнейшие условия на L_0 будут сформулированы ниже. Первым из них будет следующее.

Условие 1. *Оператор L_0 вполне несамосопряжен.*[1]

• Известное разложение М. И. Вишика [11] имеет вид:

$$\operatorname{Dom} L_0^* = \operatorname{Dom} L_0 \dot{+} L^{-1}\mathscr{K} \dot{+} \mathscr{K}$$

(суммы прямые). В соответствии с этим, для $y \in \operatorname{Dom} L_0^*$ имеем

$$y = y_0 + L^{-1}g + h$$

с $y_0 \in \operatorname{Dom} L_0$ и $g, h \in \mathscr{K}$, где $h = \Gamma_1 y$, $g = \Gamma_2 y$ и $\Gamma_1 = L^{-1}L_0^* - \mathbb{I}$, $\Gamma_2 = PL_0^*$, P – ортогональный проектор в $\mathscr{H}$ на $\mathscr{K}$. Справедлива формула Грина [3]

$$(L_0^* u, v) - (u, L_0^* v) = (\Gamma_1 u, \Gamma_2 v) - (\Gamma_2 u, \Gamma_1 v), \qquad u, v \in \operatorname{Dom} L_0^*. \quad (1.1)$$

Набор $\{\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ будем называть *граничной тройкой Вишика* для L_0 [13].

Динамическая система с граничным управлением. • Граничная тройка, в свою очередь, определяет динамическую систему α вида

$$u''(t) + L_0^* u(t) = 0 \qquad \text{в } \mathscr{H}, \ \ t > 0, \quad (1.2)$$

$$u(0) = u'(0) = 0 \qquad \text{в } \mathscr{H}, \quad (1.3)$$

$$\Gamma_1 u(t) = f(t) \qquad \text{в } \mathscr{K}, \ \ t \geqslant 0, \quad (1.4)$$

где $f = f(t)$ – $\mathscr{K}$-значная функция времени (*граничное управление*), $u = u^f(t)$ – решение (*траектория*).

Напомним, что L есть расширение L_0 по Фридрихсу. Пусть $L^{\frac{1}{2}}$ – положительный квадратный корень из L. Для гладких[2] управлений из класса

$$\mathscr{M} := \{f \in C^\infty([0,\infty); \mathscr{K}) \mid \operatorname{supp} f \subset (0,\infty)\},$$

[1]Напомним, что симметрический оператор называется вполне несамосопряженным, если у него нет приводящих подпространств, в которых он имел бы самосопряженную часть.

[2]Всюду в статье *гладкий* означает C^∞-гладкий.

решение существует, единственно и представляется в виде

$$u^f(t) := -f(t) + \int_0^t L^{-\frac{1}{2}} \sin\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] f''(s)\, ds\,, \qquad t \geqslant 0, \tag{1.5}$$

(см. [3], где введено обобщенное решение для более широкого класса управлений). Элемент $u^f(t) \in \mathscr{H}$ – это состояние системы в момент времени t. Имея в виду приложения, мы также называем u^f *волной*.

Мы всюду предполагаем, что все функции времени продолжаются нулем на значения $t < 0$. Свойством волн, справедливым в самом общем случае, является соотношение

$$u^{\mathscr{T}_s f}(t) = (\mathscr{T}_s u^f)(t) = u^f(t-s), \qquad s, t > 0, \tag{1.6}$$

где $\mathscr{T}_s$ есть оператор задержки, который сдвигает аргумент: $t \mapsto t - s$. Это следует из независимости от времени оператора L_0^*, который определяет эволюцию системы α. Как следствие, выполняются соотношения:

$$u^{f'}(t) = (u^f)'(t), \quad u^{f''}(t) = (u^f)''(t) \overset{\text{см. (1.2)}}{=\!=\!=} -L_0^* u^f(t), \;\; t > 0. \tag{1.7}$$

В теории управления и теории систем соотношения (1.6) и (1.7) выражают свойство *стационарности* системы α.

• Множество

$$\mathscr{U}^T := \{u^f(T) \mid f \in \mathscr{M}\}$$

называется *достижимым* (к моменту времени T), а множество

$$\mathscr{U} := \operatorname{span}\{\mathscr{U}^T \mid T > 0\}$$

называется *полным* достижимым. ДСГУ α называется *управляемой*, если

$$\overline{\mathscr{U}} = \mathscr{H}.$$

Как показано в [3], система α управляема, если и только если оператор L_0 вполне несамосопряжен. Поэтому условие 1 обеспечивает управляемость α.

• Как видно из (1.5), для каждого $T > 0$ волна $u^f(T)$ определяется только частью $f \restriction [0, T]$ управления (не зависит от значений

$f \upharpoonright (T,\infty)$). Это обстоятельство позволяет рассматривать редуцированные системы α^T вида

$$u''(t) + L_0^* u(t) = 0 \qquad \text{в } \mathscr{H}, \ \ 0 < t < T, \tag{1.8}$$

$$u(0) = u'(0) = 0 \qquad \text{в } \mathscr{H}, \tag{1.9}$$

$$\Gamma_1 u(t) = f(t) \qquad \text{в } \mathscr{K}, \ \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.10}$$

Ниже перечисляются их атрибуты.

$\star$ *Пространство управлений* $\mathscr{F}^T := L_2([0,T];\mathscr{K})$ называется *внешним пространством* системы α^T. Оно содержит семейство "задержанных" подпространств

$$\mathscr{F}^{T,\xi} := \{f \in \mathscr{F}^T \mid \operatorname{supp} f \subset [T-\xi,T]\}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant T.$$

Имеем $\mathscr{F}^{T,0} = \{0\}$ и $\mathscr{F}^{T,T} = \mathscr{F}^T$. Класс гладких управлений $\mathscr{M}^T := \{f \upharpoonright [0,T] \mid f \in \mathscr{M}\}$ плотен в $\mathscr{F}^T$.

$\star$ Пространство $\mathscr{H}$ является *внутренним пространством.* Оно содержит семейство достижимых множеств $\mathscr{U}^T$ и подпространств $\overline{\mathscr{U}^T}$, $T > 0$.

$\star$ Соответствие "вход$\mapsto$состояние" реализуется *оператором управления*

$$W^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{H}, \quad \operatorname{Dom} W^T = \mathscr{M}^T, \qquad W^T f := u^f(T).$$

Как видно, $\operatorname{Ran} W^T = \mathscr{U}^T$; из (1.7) следуют равенства

$$W^T f'' = u^f_{tt}(T) = -L_0^* u^f(T) = -L_0^* W^T f \tag{1.11}$$

Как показано в [17], оператор управления замыкаем[3] при всех $T > 0$. Если W^T ограничен и ограниченно обратим (на своем образе $\mathscr{U}^T$), то его замыкание $\overline{W^T}$ обладает теми же свойствами, то есть является изоморфизмом пространств $\mathscr{F}^T$ и $\overline{\mathscr{U}^T}$. В дальнейшем мы сохраняем обозначение W^T и для замыкания оператора.

$\star$ *Связывающий оператор*

$$C^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^T, \quad C^T := (W^T)^* W^T$$

корректно определен на $\{f \in \operatorname{Dom} W^T \mid W^T f \in \operatorname{Dom} (W^T)^*\}$. По теореме фон Неймана [10,14] он плотно задан и его замыкание есть самосопряженный оператор в $\mathscr{F}^T$. Мы сохраняем обозначение C^T для его

[3] но необязательно ограничен

замыкания. Имеем $C^T \geqslant 0$ и

$$(C^T f, g)_{\mathscr{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathscr{F}^T} = (u^f(T), u^g(T)), \quad f, g \in \mathscr{M}^T. \quad (1.12)$$

Заметим, что C^T ограничен тогда и только тогда, когда ограничен W^T. Также, как видно, C^T есть изоморфизм в $\mathscr{F}^T$ тогда и только тогда, когда W^T изоморфизм.

• Свойство стационарности (1.6) влечет соответствующее свойство связывающего оператора. Рассмотрим две системы α^T и α^ξ при $0 < \xi < T$. Отображение

$$\Theta^{\xi,T} : \mathscr{F}^\xi \to \mathscr{F}^T, \quad (\Theta^{\xi,T} f)(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < T - \xi, \\ f(t - (T - \xi)), & T - \xi \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

является частичной изометрией и справедливо $\mathscr{F}^{T,\xi} = \Theta^{\xi,T} \mathscr{F}^\xi$; сопряженный оператор $(\Theta^{\xi,T})^* : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^\xi$ действует по правилу

$$((\Theta^{\xi,T})^* f)(t) = f(t + (T - \xi)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \xi. \quad (1.13)$$

Из стационарности системы (1.6) следует, что

$$W^T \Theta^{\xi,T} = W^\xi, \quad (1.14)$$

откуда вытекает соотношение

$$C^\xi = (\Theta^{\xi,T})^* C^T \Theta^{\xi,T}, \qquad 0 < \xi \leqslant T. \quad (1.15)$$

Скаляризованная система. • Предположим, что помимо условия 1 выполнено следующее.

Условие 2. *Индексы дефекта L_0 равны $n_\pm(L_0) = 1$.*

Тогда управления принимают вид $f = \phi(t)e$, где $\phi \in L_2(0, T) =: \dot{\mathscr{F}}^T$ – скалярная функция и $e \in \mathscr{K}$, $\|e\| = 1$, – фиксированный элемент. Мы можем рассматривать $\dot{\mathscr{F}}^T$ как внешнее пространство системы α^T и использовать скаляризованный оператор управления $\dot{W}^T : \dot{\mathscr{F}}^T \to \mathscr{H}$, $\dot{W}^T \phi := u^{\phi e}(T)$ и скаляризованный связывающий оператор $\dot{C}^T : \dot{\mathscr{F}}^T \to \dot{\mathscr{F}}^T$, $\dot{C}^T := (\dot{W}^T)^* \dot{W}^T$. Опять же, $\dot{W}^T$ изоморфизм тогда и только тогда, когда $\dot{C}^T$ изоморфизм в $\dot{\mathscr{F}}^T$.

• Пусть для каждого $T > 0$ скаляризованный связывающий оператор имеет вид

$$\dot{C}^T = \mathbb{I} + K^T, \quad (1.16)$$

где $(K^T\phi)(t) := \int\limits_0^T k^T(t,s)\,\phi(s)\,ds$ – интегральный оператор с гладким эрмитовым ядром k^T [4]. Тогда ядро k^T обладает следующим специальным свойством.

Рассмотрим две системы α^ξ и α^T с $0 < \xi < T$. Мы опускаем доказательство следующего факта, который проверяется простым вычислением: из (1.15) следует, что ядра k^ξ и k^T связаны соотношением

$$k^\xi(t,s) = k^T(t+(T-\xi), s+(T-\xi)), \qquad 0 \leqslant t,s \leqslant \xi.$$

Последнее ведет к равенству

$$k^\xi(\xi-t,\xi-s) = k^T(T-t,T-s), \qquad 0 \leqslant t,s \leqslant \xi. \tag{1.17}$$

Определив

$$\widehat{k}^T(t,s) := k^T(T-t,T-s), \qquad 0 \leqslant t,s \leqslant T,$$

запишем (1.17) в виде

$$\widehat{k}^\xi(t,s) = \widehat{k}^T(t,s), \qquad 0 \leqslant t,s \leqslant \xi.$$

Поэтому функция $\widehat{k}^T$ не зависит от верхнего индекса T. Переобозначая $\widehat{k}^T =: \widehat{k}$, мы заключаем, что интегральная часть связывающего оператора с необходимостью имеет вид

$$(K^T\phi)(t) = \int\limits_0^T \widehat{k}(T-t,T-s)\,\phi(s)\,ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.18}$$

с функцией $\widehat{k} \in C^\infty([0,\infty)\times[0,\infty))$. Системы α и α^T, как и все их атрибуты (пространства и операторы), определяются оператором L_0. Поэтому следующее условие можно считать дополнительным к условиями 1 и 2.

Условие 3. *При всех $T > 0$ (скаляризованный) связывающий оператор $\dot{C}^T$ системы α^T имеет вид (1.16), (1.18) и является изоморфизмом в $\dot{\mathscr{F}}^T$.*

В этой формулировке подразумевается, что ядра всех K^T определяются одной и той же функцией $\widehat{k}$. Также, поскольку $\dot{C}^T - \mathbb{I}$ компактен в $L_2(0,T)$, из условия 3 следует, что $\dot{C}^T$ – изоморфизм, из чего в свою

[4]Такая ситуация имеет место в одномерных обратных задачах [2, 8, 18, 20].

очередь, благодаря равенству $\dot{C}^T = (\dot{W}^T)^* \dot{W}^T$, следует, что операторы $\dot{W}^T$ и W^T суть изоморфизмы при всех $T > 0$.

Заметим, что известны условия, которые позволяют реализовать оператор в гильбертовом пространстве как интегральный оператор [15]. Поэтому, в принципе, условие 3 эффективно проверяемо.

Основной результат. • Обозначим $\widetilde{\mathscr{H}} := L_2(0,\infty)$; пусть q – гладкая вещественнозначная функция (потенциал) на $[0,\infty)$. Минимальный оператор Шредингера $S_0 = S_0^q$, связанный с q, – это замыкание оператора $(-D^2+q) \restriction C_0^\infty(0,\infty)$. Определим класс $\mathcal{Q}$ гладких потенциалов условиями, что продолжение q нулем на $\mathbb{R}$ сохраняет гладкость и что оператор S_0 положительно определен. Сохранение гладкости при продолжении равносильно обращению в ноль значения и производных q всех порядков в начале координат, $q^{(j)}(0) = 0$ при $j \geqslant 0$. Заметим, что из положительной определенности минимального оператора Шредингера S_0 по теореме Глазмана–Повзнера–Вингольца [13, 21] следует, что потенциал q отвечает случаю предельной точки на бесконечности. В таком случае S_0 имеет индексы дефекта $n_\pm(L_0) = 1$.

Наш основной результат состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть L_0 есть замкнутый симметрический положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве. Если L_0 удовлетворяет условиям* 1, 2 *и* 3, *то найдется такой потенциал $q \in \mathcal{Q}$, что L_0 унитарно эквивалентен минимальному оператору Шредингера $S_0 = S_0^q$.*

§2. Доказательство теоремы 1

Треугольная факторизация. Определим в $\dot{\mathscr{F}}^T$ оператор инверсии $Y^T : f(t) \mapsto f(T-t)$ (унитарный, самосопряженный и удовлетворяющий $(Y^T)^2 = \mathbb{I}$) и оператор $\widehat{C}^T := Y^T \dot{C}^T Y^T$,

$$(\widehat{C}^T f)(t) = f(t) + \int\limits_0^T \widehat{k}(t,s) f(s) ds.$$

Воспользуемся следующим результатом М. Г. Крейна о факторизации [12]. Поскольку ядро $\widehat{k}$ непрерывно в $[0,T]^2$ и при каждом $\xi \in (0,T]$ оператор $\widehat{C}^\xi$ имеет ограниченный обратный, действующий на всем $\dot{\mathscr{F}}^\xi$, оператор $(\widehat{C}^T)^{-1}$ допускает *треугольную факторизацию*

$$(\widehat{C}^T)^{-1} = (\mathbb{I} + V_+^T)(\mathbb{I} + V_-^T),$$

с ядрами, обладающими следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &V_+^T(t,s) = 0 \text{ при } a \leqslant s < t \leqslant b, \quad (\textit{левый вольтерров оператор}),\\ &V_-^T(t,s) = 0 \text{ при } a \leqslant t \leqslant s \leqslant b, \quad (\textit{правый вольтерров оператор}). \end{aligned}$$

Более того, если записать $(\widehat{C}^\xi)^{-1} = \mathbb{I} + \Gamma^\xi$, где

$$(\Gamma^\xi f)(t) = \int\limits_0^\xi \Gamma^\xi(t,s) f(s)ds$$

с $\Gamma^\xi \in C([0,\xi]^2)$, то

$$V_+^T(t,s) = V_+(t,s) = \begin{cases} \Gamma^s(t,s), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T,\\ 0, & 0 \leqslant s < t \leqslant T, \end{cases}$$

$$V_-^T(t,s) = V_-(t,s) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < s \leqslant T,\\ \Gamma^t(t,s), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

Используя стандартные методы теории интегральных уравнений, можно показать, что ядро $\Gamma^\xi(t,s)$ гладкое в квадрате $[0,\xi]^2$ (имеет ту же гладкость, что и $\widehat{k}$). Мы видим, что ядра $V_\pm^T(t,s)$ не зависят от T и являются гладкими в соответствующих треугольниках. Поскольку $(\widehat{C}^T)^{-1} \geqslant 0$,

$$(\widehat{C}^T)^{-1} = ((\widehat{C}^T)^{-1})^* = (\mathbb{I} + (V_-^T)^*)(\mathbb{I} + (V_+^T)^*),$$

и в силу единственности факторизации (см. [12]), имеем $(V_+^T)^* = V_-^T$. Обозначим

$$B^T := V_+^T, \quad A^T := (\mathbb{I} + V_+^T)^{-1} - \mathbb{I} = -B^T + (B^T)^2 - (B^T)^3 + \cdots,$$

где A^T тоже левый вольтерровский оператор с гладким ядром $a(t,s)$, не зависящим от T, то есть

$$\begin{aligned} ((\mathbb{I} + A^T)f)(t) &= f(t) + \int\limits_t^T a(t,s)f(s)ds,\\ ((\mathbb{I} + B^T)f)(t) &= f(t) + \int\limits_t^T b(t,s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Тогда $(\widehat{C}^T)^{-1} = (\mathbb{I} + B^T)(\mathbb{I} + B^T)^*$, $\widehat{C}^T = (\mathbb{I} + A^T)^*(\mathbb{I} + A^T)$,

$$\dot{C}^T = Y^T \widehat{C}^T Y^T = ((\mathbb{I} + A^T)Y^T)^*(\mathbb{I} + A^T)Y^T = (\widetilde{W}^T)^*\widetilde{W}^T,$$

где
$$\widetilde{W}^T := (\mathbb{I} + A^T)Y^T.$$
Таким образом, нами получен следующий результат.

Лемма 1. *При каждом* $T > 0$ *оператор* $\dot{C}^T$ *допускает факторизацию* $\dot{C}^T = (\widetilde{W}^T)^*\widetilde{W}^T$, *где*
$$(\widetilde{W}^T f)(t) = f(T-t) + \int\limits_t^T a(t,s)f(T-s)ds, \quad t \in [0,T],$$
с $a \in C^\infty(\{(t,s) \in [0,\infty)^2 \mid s \leqslant t\})$.

Рассмотрим $\widetilde{\mathscr{H}}^T := L_2(0,T)$ как подпространство $\widetilde{\mathscr{H}}$. Оператор $\widetilde{W}^T$ действует из $\dot{\mathscr{F}}^T$ в $\widetilde{\mathscr{H}}^T$, так что $\operatorname{Ran}\widetilde{W}^T = \widetilde{\mathscr{H}}^T$ и $(\widetilde{W}^T)^{-1}$ есть ограниченный оператор из $\widetilde{\mathscr{H}}^T$ в $\dot{\mathscr{F}}^T$.

Лемма 2. $\Phi^T := \widetilde{W}^T(\dot{W}^T)^{-1}$ *есть унитарный оператор из* $\overline{\mathscr{U}^T}$ *на* $\widetilde{\mathscr{H}}^T$.

Доказательство. Имеем $\dot{C}^T = (\dot{W}^T)^*\dot{W}^T = (\widetilde{W}^T)^*\widetilde{W}^T$. Это равенство не противоречит единственности факторизации, так как $\dot{W}^T$ и $\widetilde{W}^T$ принимают значения в разных пространствах, но оно же означает, что эти операторы сплетаются унитарным оператором
$$\begin{aligned}\Phi^T = \widetilde{W}^T(\dot{W}^T)^{-1} &= ((\widetilde{W}^T)^*)^{-1}\dot{C}^T(\dot{W}^T)^{-1} = ((\widetilde{W}^T)^*)^{-1}(\dot{W}^T)^* \\ &= (\dot{W}^T(\widetilde{W}^T)^{-1})^* = ((\widetilde{W}^T(\dot{W}^T)^{-1})^{-1})^* = ((\Phi^T)^{-1})^*. \quad \square\end{aligned}$$

Рассмотрим множества
$$\widetilde{\mathscr{U}}^T := \Phi^T\mathscr{U}^T = \widetilde{W}^T\mathscr{M}^T$$
и
$$\widetilde{\mathscr{U}} := \operatorname{span}\{\widetilde{u} \in \widetilde{\mathscr{U}}^T \mid T > 0\}.$$
С одной стороны, для каждого $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathscr{U}}^T$ существует такой $f \in \mathscr{M}^T = C_0^\infty(0,T]$, что $\widetilde{u}(t) = (\widetilde{W}^T f)(t) = f(T-t) + \int\limits_t^T a(t,s)f(T-s)ds$, следовательно, $\widetilde{\mathscr{U}}^T \subset C_0^\infty[0,T)$. С другой стороны, для $\widetilde{u} \in C_0^\infty[0,T)$ имеем $((\widetilde{W}^T)^{-1}\widetilde{u})(t) = (Y^T(I + B^T)\widetilde{u})(t) = \widetilde{u}(T-t) + \int\limits_{T-t}^T b(T-t,s)\widetilde{u}(s)ds \in$

$C_0^\infty(0,T] = \mathscr{M}^T$, откуда следует, что $C_0^\infty[0,T) \subset \widetilde{W}^T\mathscr{M}^T = \widetilde{\mathscr{U}}^T$. Поэтому

$$\widetilde{\mathscr{U}}^T = C_0^\infty[0,T), \quad T > 0,$$

и

$$\widetilde{\mathscr{U}} = C_0^\infty[0,\infty).$$

Лемма 3. *Существует такой унитарный оператор* $\Phi : \mathscr{H} \to \widetilde{\mathscr{H}}$, *что при всех* $T > 0$ *справедливо* $\Phi \restriction \overline{\mathscr{U}^T} = \Phi^T$.

Доказательство. Согласно (1.14), $\dot{W}^T\Theta^{\xi,T} = \dot{W}^\xi$, $0 < \xi < T$. Покажем. что $\widetilde{W}^T\Theta^{\xi,T} = \widetilde{W}^\xi$: $(\widetilde{W}^T\Theta^{\xi,T}f)(t) = ((\mathbb{I} + A^T)\widetilde{f})(t)$, где

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} f(\xi - t), & t \in [0,\xi], \\ 0, & t \in (\xi, T], \end{cases}$$

так что, действительно,

$$(\widetilde{W}^T\Theta^{\xi,T}f)(t) = f(\xi - t) + \int\limits_t^\xi a(t,s)f(\xi - s)ds = (\widetilde{W}^\xi f)(t).$$

Рассмотрим $\Phi^T \restriction \overline{\mathscr{U}^\xi} = \widetilde{W}^T(\dot{W}^T)^{-1} \restriction \overline{\mathscr{U}^\xi}$. Поскольку $\dot{W}^T\Theta^{\xi,T} = \dot{W}^\xi$, получаем

$$\dot{W}^T\Theta^{\xi,T}(\dot{W}^\xi)^{-1} = \mathbb{I}_{\overline{\mathscr{U}^\xi}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Phi^T \restriction \overline{\mathscr{U}^\xi} = \widetilde{W}^T(\dot{W}^T)^{-1}\dot{W}^T\Theta^{\xi,T}(\dot{W}^\xi)^{-1} &= \widetilde{W}^T\Theta^{\xi,T}(\dot{W}^\xi)^{-1} \\ &= \widetilde{W}^\xi(\dot{W}^\xi)^{-1} = \Phi^\xi.\end{aligned}$$

Для каждого $v \in \mathscr{U}$ (из плотного множества в $\mathscr{H}$) существует такое $T > 0$, что $v \in \mathscr{U}^T$, поэтому определим $\Phi_0 v := \Phi^T v$. Благодаря последнему соотношению это определение не зависит от T. По лемме 2, замыкание Φ оператора Φ_0 определено на всем пространстве $\mathscr{H}$ и изометрично. Но поскольку образ

$$\operatorname{Ran}\Phi_0 = \operatorname{span}\{\Phi_0(\mathscr{U}^T)\,|\,T > 0\} = \operatorname{span}\{\widetilde{\mathscr{U}}^T\,|\,T > 0\} = \widetilde{\mathscr{U}} = C_0^\infty[0,\infty)$$

плотен в $L_2(0,\infty) = \widetilde{\mathscr{H}}$, оператор Φ унитарен. Из того, что $\Phi^T \restriction \mathscr{U}^T = \Phi_0 \restriction \mathscr{U}^T = \Phi^T \restriction \mathscr{U}^T$, следует $\Phi \restriction \overline{\mathscr{U}^T} = \Phi^T \restriction \overline{\mathscr{U}^T} = \Phi^T$ при каждом $T > 0$. $\square$

Оператор S_0^+. Пусть $T>0$, $f\in\mathscr{M}^T$. Из (1.11) мы видим, что оператор $L_0^*\restriction\mathscr{U}^T$ в пространстве $\overline{\mathscr{U}^T}$ подобен оператору $-d^2/dt^2\restriction\mathscr{M}^T$ в $\mathscr{F}^T$:

$$L_0^*\restriction\mathscr{U}^T=\dot W^T(-D^2\restriction\mathscr{M}^T)(\dot W^T)^{-1}$$

Определим оператор $S_0^{+,T}$ в $\widetilde{\mathscr{H}}^T$,

$$\operatorname{Dom}S_0^{+,T}=\widetilde{\mathscr{U}}^T,\quad S_0^{+,T}:=\widetilde W^T(-D^2\restriction\mathscr{M}^T)(\widetilde W^T)^{-1}.$$

Получаем

$$\begin{aligned}S_0^{+,T}=\widetilde W^T(\dot W^T)^{-1}(L_0^*\restriction\mathscr{U}^T)\dot W^T(\widetilde W^T)^{-1}&=\Phi^T(L_0^*\restriction\mathscr{U}^T)(\Phi^T)^{-1}\\&=\Phi(L_0^*\restriction\mathscr{U}^T)\Phi^{-1}.\end{aligned}$$

Поскольку $\mathscr{U}=\operatorname{span}\{u\in\mathscr{U}^T\,|\,T>0\}$, определим оператор S_0^+ в $\widetilde{\mathscr{H}}$,

$$\operatorname{Dom}S_0^+=\widetilde{\mathscr{U}},\quad S_0^+:=\Phi(L_0^*\restriction\mathscr{U})\Phi^{-1},$$

тогда $S_0^{+,T}=S_0^+\restriction\widetilde{\mathscr{U}}^T$.

Лемма 4. S_0^+ *действует по правилу*

$$(S_0^+\widetilde u)(t)=-\widetilde u''(t)+q(t)\widetilde u(t)+\int\limits_t^{+\infty}Q(t,s)\widetilde u(s)ds,\quad \widetilde u\in\widetilde{\mathscr{U}},$$

где

$$q(t)=2\left(\frac{d}{dt}(b(t,t))+b^2(t,t)\right)\tag{2.1}$$

и $Q\in C^\infty(\{(t,s)\in[0,\infty)^2\,|\,t\leqslant s\})$.

Замечание 1. Для каждой функции $\widetilde u\in\widetilde{\mathscr{U}}=C_0^\infty[0,\infty)$ существует такое $T>0$, что $\widetilde u\in\widetilde{\mathscr{U}}^T=C_0^\infty[0,T)$ и

$$\int\limits_t^{+\infty}Q(t,s)\widetilde u(s)ds=\int\limits_t^{T}Q(t,s)\widetilde u(s)ds.$$

Доказательство. Пусть $\widetilde u\in\widetilde{\mathscr{U}}^T$. Тогда

$$\begin{aligned}S_0^+\widetilde u&=\widetilde W^T(-D^2\restriction\mathscr{M}^T)(\widetilde W^T)^{-1}\widetilde u\\&=(\mathbb{I}+A^T)Y^T(-D^2\restriction\mathscr{M}^T)Y^T(\mathbb{I}+B^T)\widetilde u\\&=(\mathbb{I}+A^T)(-D^2\restriction\mathscr{M}^T)(\mathbb{I}+B^T)\widetilde u\end{aligned}$$

и в результате длинного, но простого вычисления, включающего интегрирование по частям и изменение порядка интегрирования, пользуясь тем, что $\widetilde{u}(T) = \widetilde{u}'(T) = 0$, получаем:

$$
\begin{aligned}
(S_0^+\widetilde{u})(t) = -\widetilde{u}''(t) - \int_t^T (D_1^2 b)(t,s)\widetilde{u}(s)ds \\
+ (2(D_1 b)(t,t) + (D_2 b)(t,t))\widetilde{u}(t) + b(t,t)\widetilde{u}'(t) \\
- \int_t^T ds\, a(t,s) \int_s^T (D_1^2 b)(s,p)\widetilde{u}(p)dp \\
+ \int_t^T a(t,s)(-\widetilde{u}''(s) + 2(D_1 b)(s,s)\widetilde{u}(s) + (D_2 b)(s,s)\widetilde{u}(s) + b(s,s)\widetilde{u}'(s))ds \\
= -\widetilde{u}''(t) + (a(t,t) + b(t,t))\widetilde{u}'(t) + q(t)\widetilde{u}(t) + \int_t^T Q(t,s)\widetilde{u}(s)ds,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
q(t) &:= 2(D_1 b)(t,t) + (D_2 b)(t,t) - (D_2 a)(t,t) - a(t,t)b(t,t), \\
Q(t,s) &:= -(D_2^2 a)(t,s) - (D_1^2 b)(t,s) - (D_2 a)(t,s)b(s,s) \\
&\quad + a(t,s)(D_1 b)(s,s) - \int_t^s a(t,\tau)(D_1^2 b)(p,s)dp.
\end{aligned}
$$

Поскольку $(\mathbb{I} + A)(\mathbb{I} + B) = \mathbb{I}$, или $A + B + AB = 0$, ядра a и b должны удовлетворять тождеству

$$
a(t,s) + b(t,s) + \int_s^t a(t,p)b(p,s)dp \equiv 0.
$$

Полагая $s = t$, мы получаем $a(t,t) + b(t,t) \equiv 0$. Отсюда мы приходим к (2.1), что завершает доказательство. $\square$

Поскольку справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker}\Gamma_1 &= \operatorname{Ker}(L^{-1}L_0^* - \mathbb{I}) = \{u \in \operatorname{Dom} L_0^* \mid u = L^{-1}L_0^* u\} \\
&= \{u \in \operatorname{Dom} L \mid Lu = L_0^* u\} = \operatorname{Dom} L,
\end{aligned}
$$

мы получаем

$$\begin{aligned}\mathscr{U}^T \cap \operatorname{Dom} L &= \{u^f(T) \mid f \in \mathscr{M}^T, \Gamma_1 u^f(T) = 0\}\\ &= \{u^f(T) \mid f \in \mathscr{M}^T, f(T) = 0\}.\end{aligned}$$

Обозначим

$$\mathscr{M}_0^T := \{f \in \mathscr{M}^T \mid f(T) = 0\}$$

и

$$\mathscr{U}_0^T := \mathscr{U}^T \cap \operatorname{Dom} L = W^T \mathscr{M}_0^T,$$
$$\mathscr{U}_0 := \mathscr{U} \cap \operatorname{Dom} L = \operatorname{span}\{u \in \mathscr{U}_0^T \mid T > 0\}.$$

Рассмотрим также

$$\widetilde{\mathscr{U}_0^T} := \Phi \mathscr{U}_0^T = \widetilde{W}^T \mathscr{M}_0^T,$$
$$\widetilde{\mathscr{U}_0} := \Phi \mathscr{U}_0.$$

Как и выше, пользуясь равенствами

$$\widetilde{\mathscr{U}^T} = (\mathbb{I} + A^T) Y^T \mathscr{M}^T, \quad \mathscr{M}^T = Y^T (\mathbb{I} + B^T) \widetilde{\mathscr{U}^T},$$

$$\widetilde{u}(t) = f(T-t) + \int\limits_t^T a(t,s) f(T-s)\,ds, \quad f(t) = \widetilde{u}(T-t) + \int\limits_{T-t}^T b(T-t,s)\widetilde{u}(s)\,ds,$$

можно записать

$$\widetilde{\mathscr{U}_0^T} = \{\widetilde{u} \in C_0^\infty[0,T) \mid \widetilde{u}(0) + \int\limits_0^T b(0,s)\widetilde{u}(s)\,ds = 0\}$$

и

$$\widetilde{\mathscr{U}_0} = \{\widetilde{u} \in C_0^\infty[0,\infty) \mid \widetilde{u}(0) + \int\limits_0^\infty b(0,s)\widetilde{u}(s)\,ds = 0\}.$$

Поскольку $\mathscr{M}_0^T$ плотно в $\mathscr{F}^T$, то же верно для $\widetilde{\mathscr{U}_0^T}$ в $\widetilde{\mathscr{H}^T}$ и для $\mathscr{U}_0^T$ в $\overline{\mathscr{U}^T}$.

Лемма 5. *Справедливы равенства* $b(0,\cdot) \equiv 0$, $\operatorname{Im} q = 0$ *и* $Q = 0$.

Доказательство. Пусть $T > 0$. Оператор

$$L_0^* \restriction \mathscr{U}_0^T = L_0^* \restriction (\mathscr{U}^T \cap \operatorname{Dom} L) = L \restriction (\mathscr{U}^T \cap \operatorname{Dom} L)$$

симметричен и потому $S_0^+ \restriction \widetilde{\mathscr{U}_0^T} = \Phi(L_0^* \restriction \mathscr{U}_0^T)\Phi^{-1}$ тоже симметричен. Обозначим $S_1 := S_0^+ \restriction \widetilde{\mathscr{U}_0^T}$, $a := \overline{b(0,\cdot)} \in C^\infty[0,T]$. Тогда

$$\operatorname{Dom} S_1 = \{u \in C_0^\infty[0,T) \mid u(0) + (u,a) = 0\}.$$

Покажем, что сопряженным к S_1 в $L_2(0,T)$ является оператор

$$S_2 u := -u'' + \overline{q}u + Q^* u + u'(0)a,$$
$$\operatorname{Dom} S_2 := \{u \in H^2(0,T) \,|\, u(0) = 0\},$$

где

$$(Q^* u)(t) := \int_0^t \overline{Q(s,t)}u(s)ds.$$

Мы сделаем это в три шага.
1. Сначала заметим, что $\overline{S}_1 u = -u'' + qu + Qu$,

$$\operatorname{Dom} \overline{S}_1 = \{u \in H^2(0,T) \,|\, u(0) + (u,a) = u(T) = u'(T) = 0\}.$$

2. Покажем, что $\overline{S}_1 \subset S_2^*$.
Возьмем такой $u \in H^2(0,T)$, что $u(0) + (u,a) = u(T) = u'(T) = 0$. Для каждого $\varphi \in \operatorname{Dom} S_2$ имеем:

$$(S_2\varphi, u) = \int_0^T (-\varphi'' + \overline{q}\varphi + Q^*\varphi)\overline{u} + \varphi'(0)(a,u)$$
$$\underset{\overline{\overline{}}}{\overset{u(T)=u'(T)=0}{=}} \int_0^T \varphi(\overline{-u'' + qu + Qu}) + \varphi'(0)(\overline{u(0) + (u,a)}) - \varphi(0)\overline{u'(0)}$$
$$\overset{u(0)+(u,a)=0,\varphi(0)=0}{=\!=\!=} \int_0^T \varphi(\overline{-u'' + qu + Qu}),$$

поэтому $u \in \operatorname{Dom} S_2^*$ и $S_2^* u = -u'' + qu + Qu$.
3. Покажем, что $S_2^* \subset \overline{S}_1$.
Возьмем $u \in \operatorname{Dom} S_2^*$. Для каждого $\varphi \in \operatorname{Dom} S_2$ имеем $(S_2\varphi, u) = (\varphi, h)$, где $h = S_2^* u$. В частности, для каждого $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ выполнено

$$(S_2\varphi, u) = \int_0^T (-\varphi'' + \overline{q}\varphi + Q^*\varphi + \varphi'(0)a)\overline{u}$$
$$= \int_0^T -\varphi''\overline{u} + \int_0^T \varphi(\overline{qu + Qu}) = \int_0^T \varphi\overline{h},$$

или
$$\int_0^T \varphi''\overline{u} = \int_0^T \varphi(\overline{qu + Qu - h}), \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(0,T).$$
Отсюда следует, что существует обобщенная вторая производная $u'' \in L_2(0,T)$, то есть $u \in H^2(0,T)$.

Для каждого $\varphi \in \operatorname{Dom} S_2$ имеем
$$\begin{aligned}(S_2\varphi, u) &= \int_0^T (-\varphi'' + \overline{q}\varphi + Q^*\varphi + \varphi'(0)a)\overline{u} \\ &= \int_0^T \varphi(\overline{-u'' + qu + Qu}) + \varphi'(0)(a,u) - (\varphi'\overline{u} - \varphi\overline{u'}) \restriction 0^T \\ &= \int_0^T \varphi(\overline{-u'' + qu + Qu}) + \varphi'(0)(\overline{u(0) + (u,a)}) \\ &\quad + \varphi(T)\overline{u'(T)} - \varphi'(T)\overline{u(T)} = \int_0^T \varphi\overline{h}.\end{aligned}$$
Так что для любого $\varphi \in \operatorname{Dom} S_2$ верно равенство
$$\int_0^T \varphi(\overline{-u'' + qu + Qu - h}) = \varphi'(0)(\overline{u(0) + (u,a)}) + \varphi(T)\overline{u'(T)} - \varphi'(T)\overline{u(T)}.$$
Можно так выбирать последовательности $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Dom} S_2$, что $\varphi_n \to 0$ в $L_2(0,T)$, а значения $\varphi_n'(0)$, $\varphi_n(T)$ и $\varphi_n'(T)$ не зависят от n. Поскольку эти постоянные можно выбрать произвольно, а левая часть равенства стремится к нулю при $n \to \infty$, должно выполняться
$$u(0) + (u,a) = u(T) = u'(T) = 0.$$
Отсюда $u \in \operatorname{Dom} \overline{S}_1$. Из пунктов 2. и 3. следует, что $S_1^* = S_2$. Поскольку S_1 симметричен, должно быть $S_1 \subset S_2$. Это означает, во-первых, что $\operatorname{Dom} S_1 \subset \operatorname{Dom} S_2$, и во-вторых, что $S_1 u = S_2 u$ для всех $u \in \operatorname{Dom} S_1$. Из первого факта следует, что $u(0) = 0$ для каждого $u \in \operatorname{Dom} S_1$, и потому $u \perp a$, так что $\operatorname{Dom} S_1 \subset a^\perp$. Однако $\operatorname{Dom} S_1$ плотна в $L_2(0,T)$ и включение $\operatorname{Dom} S_1 \subset a^\perp$ возможно, только если $a = 0$. Второй факт означает, что $qu + Qu = \overline{q}u + Q^*u$ для всех $u \in \operatorname{Dom} S_1$. Отсюда следует

равенство самосопряженного оператора умножения на гладкую функцию $\operatorname{Im} q$ и компактного оператора $\operatorname{Im} Q = (1/2i)(Q - Q^*)$. Они могут быть равны, только если их (общий) спектр состоит из единственной точки ноль, что означает $\operatorname{Im} q \equiv 0$ и $\operatorname{Im} Q = 0$. Поскольку Q есть правый вольтерров интегральный оператор, а Q^* – левый, $Q - Q^* = 0$ влечет $Q = Q^* = 0$. Лемма доказана. $\square$

Завершение доказательства теоремы 1. Поскольку $b(0,\cdot) \equiv 0$, можно записать

$$\widetilde{\mathscr{U}_0} = \{\widetilde{u} \in C_0^\infty[0,\infty) \,|\, \widetilde{u}(0) = 0\}.$$

Мы видим, что $S_0^+ \upharpoonright \widetilde{\mathscr{U}_0}$ действует на своей области определения как оператор Шредингера, он симметричен и положительно определен, его область определения содержит $C_0^\infty(0,\infty)$. Следовательно, минимальный оператор Шредингера $S_0 = S_0^q \subset S_0^+ \upharpoonright \widetilde{\mathscr{U}_0}$ (определенный как замыкание $-D^2 + q$ на $C_0^\infty(0,\infty)$) также положительно определен. По теореме Глазмана–Повзнера–Вингольца [13, 21] потенциал q отвечает случаю предельной точки на бесконечности. Тогда оператор S_0 имеет индексы дефекта $n_+(S_0) = n_-(S_0) = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} \overline{S_0^+} = \{\widetilde{u} \in L_2(0,\infty) \,|\, \widetilde{u}, \widetilde{u}' \text{ лок. абс. непр.},& \\ -\widetilde{u}'' + q\widetilde{u} \in L_2(0,\infty)\} = \operatorname{Dom} S_0^*,& \end{aligned}$$

это означает, что $\overline{S_0^+} = S_0^*$. Получаем следующую цепочку включений:

$$\Phi L_0 \Phi^* \subset (S_0^+)^* = S_0 \subset S_0^* = \overline{S_0^+} \subset \Phi L_0^* \Phi^*.$$

Так как $n_\pm(L_0) = 1$ и $S_0 \neq S_0^*$, должно выполняться

$$\Phi L_0 \Phi^* = (S_0^+)^* = S_0 \quad \text{и} \quad S_0^* = \overline{S_0^+} = \Phi L_0^* \Phi^*.$$

Мы приходим к равенству $\Phi L_0 \Phi^* = S_0$.

Остается показать, что $q^{(j)}(0) = 0$ для всех $j \geqslant 0$. Заметим, что связывающие операторы $\dot{C}^T$ для унитарно эквивалентных L_0 и S_0 совпадут, если мы выберем элемент Φe при скаляризации C^T для S_0. Поэтому рассмотрим систему α^T, соответствующую S_0 в $\mathscr{H} = L_2(0,\infty)$. Известно, что ее (скаляризованный) связывающий оператор имеет вид

$$(\dot{C}^T \phi)(t) = \phi(t) + \int\limits_0^T [\,p(2T - t - s) - p(|t - s|)\,]\,\phi(s)\,ds,$$

где $p(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t r(s)\,ds$, а r – это так называемая функция отклика, играющая важную роль в классической обратной задаче Штурма–Лиувилля во временной области (см., например, [18]). Для гладких потенциалов q функция r тоже гладкая, но из-за присутствия $|t-s|$ ядро интегрального оператора $(\dot{C}^T - \mathbb{I})$ может быть негладким на диагонали $t = s$. Это не так, если и только если $r(t)$ обращается в ноль при $t = 0$ вместе со всеми своими производными. Можно показать, что $r^{(j)}(0) = 0$, $j \geqslant 0$, равносильно тому, что $q^{(j)}(0) = 0$, $j \geqslant 0$. Это завершает доказательство теоремы 1.

Комментарии. • На самом деле в теореме 1 доказано нечто большее: она дает характеризацию класса операторов. А именно, оператор L_0 в гильбертовом пространстве, являющийся замкнутым, симметрическим и положительно определенным, унитарно эквивалентен минимальному оператору Шредингера S_0^q с некоторым потенциалом $q \in \mathcal{Q}$, если *и только если* выполнены условия 1, 2 и 3. Действительно, благодаря унитарной эквивалентности L_0 и S_0^q, а также совпадению их связывающих операторов $\dot{C}^T$, достаточно показать, что сам оператор S_0^q удовлетворяет этим условиям, если $q \in \mathcal{Q}$. Условия 1 и 2 выполнены для любого q в случае предельной точки на бесконечности. Из рассуждения в последнем абзаце доказательства теоремы 1 вытекает, что условие 3 также выполняется.

• Как представляется, естественно ожидать схожих результатов в случае $0 < n_{\pm}(L_0) < \infty$. Мы планируем рассмотреть его в будущем.

Волновая модель

Оператор эйконала. Пусть P^t есть проектор в $\mathscr{H}$ на достижимое подпространство $\overline{\mathscr{U}^t}$. В случае $\overline{\mathscr{U}} = \mathscr{H}$ функция P^t (продолженная нулем на значения $t \leqslant 0$) является разложением единицы и определяет спектральную меру dP^t. Системе α вида (1.2)–(1.4) сопоставляется самосопряженный оператор

$$E := \int\limits_{[0,\infty)} t\,dP^t$$

в $\mathscr{H}$. Мы называем его *оператором эйконала* или, кратко, *эконалом.*

При условии 1 эйконал определяет функциональную модель оператора L_0 по следующей схеме, которая просто реализует спектральную теорему для самосопряженных операторов (см. [10]). Пусть оператор E имеет простой спектр и $e \in \operatorname{Ker} L_0^*$ является его порождающим элементом. Заметим, что мера $(dP^t y, e)$ абсолютно непрерывна относительно меры $d\mu(t) := (dP^t e, e)$. Каждому $y \in \mathscr{H}$ сопоставим функцию

$$y(t) := \frac{d(P^t y, e)}{d(P^t e, e)}, \qquad t > 0, \tag{2.2}$$

являющуюся элементом пространства $\mathscr{E} := L_2([0,\infty), d\mu)$. Отображение $U_E : y \mapsto y(\cdot)$ есть унитарный оператор из $\mathscr{H}$ на $\mathscr{E}$; оно диагонализует E: оператор $U_E E U_E^*$ является оператором умножения на независимую переменную в $\mathscr{E}$ (см. [1]).

Соответственно, L_0 преобразуется в оператор

$$L_0^{\mathrm{w}} := U_E L_0 U_E^*$$

в $\mathscr{E}$, который представляет *волновую модель* оператора L_0 [4][5]. По другой терминологии оператор L_0^{w} есть L_0 в собственном (спектральном) представлении эйконала E.

Система α для S_0. • Система α, отвечающая оператору $S_0 = S_0^q$ в $L_2(0,\infty)$ с потенциалом $q \in \mathcal{Q}$, имеет вид

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(x)u(x,t) = 0, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{2.3}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \qquad x \geqslant 0, \tag{2.4}$$

$$u(0,t) = f(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Ее внутреннее пространство есть $\mathscr{H} = L_2(0,\infty)$, достижимые множества суть [4]

$$\mathscr{U}^T = C_0^\infty[0,T), \quad \overline{\mathscr{U}^T} = L_2(0,T), \quad T > 0.$$

Соответственно, проекторы в $\overline{\mathscr{U}^T}$ – это операторы P^T, которые умножают функции из $L_2(0,\infty)$ на индикаторы интервалов: $P^T y = \chi_{[0,T]} y$, то есть срезают функции на $[0,T]$. В результате эйконал системы α действует по правилу

$$(Ey)(x) = \left(\int\limits_{[0,\infty)} t\, dP^t y\right)(x) = x\, y(x), \qquad x > 0,$$

[5]На самом деле, описанная выше конструкция является упрощенной версией волновой модели: см. [4, 6].

то есть является оператором умножения на независимую переменную в $L_2(0,\infty)$.

• Поскольку $q \in \mathcal{Q}$ является гладким, а ядро $\operatorname{Ker} S_0^*$ состоит из тех решений уравнения $-\epsilon'' + q\epsilon = 0$, которые лежат в $L_2(0,\infty)$, элементы $\epsilon \in \operatorname{Ker} S_0^*$ являются гладкими функциями (на самом деле, $\operatorname{Ker} S_0^*$ – одномерное подпространство, все элементы которого пропорциональны ϵ). Они могут иметь лишь изолированные нули, которые могут накапливаться только к бесконечности. Нетрудно видеть, что ϵ является порождающим элементом оператора E.

Реализуя элементы $\mathscr{H}$ с помощью (2.2), мы получаем оператор

$$U_E : y \mapsto y(\cdot), \;\; y(t) := \frac{d(P^t y, \epsilon)}{d(P^t \epsilon, \epsilon)} = \frac{y(t)}{\epsilon(t)}, \qquad t > 0, \tag{2.6}$$

который отображает $\mathscr{H}$ на $\mathscr{E} = L_2([0,\infty), d\mu)$ (с $d\mu(t) = |\epsilon(t)|^2 dt$). Соответственно, получаем оператор Штурма–Лиувилля

$$S_0^{\mathrm{w}} = U_E S_0 U_E^* = \frac{1}{\epsilon}(-D^2 + q)\epsilon \tag{2.7}$$

на $\operatorname{Dom} S_0^{\mathrm{w}} = U_E \operatorname{Dom} S_0$ в качестве модели оператора S_0.

Модель. Пусть теперь L_0 удовлетворяет условиям 1, 2, 3, и пусть $S_0 = \Phi L_0 \Phi^*$ есть его унитарная копия, доставляемая теоремой 1. Фиксируем ненулевой $e \in \mathscr{K} = \operatorname{Ker} L_0^*$ и пусть $\epsilon := \Phi e \in \operatorname{Ker} S_0^*$. Пусть S_0^{w} есть волновая модель S_0, построенная по элементу ϵ. Тогда в силу инвариантного характера процедуры, сопоставляющей оператору его волновую модель, волновые модели оператора L_0 и унитарно эквивалентного ему S_0 оказываются идентичными и копия $L_0^{\mathrm{w}} = S_0^{\mathrm{w}}$ доставляется унитарным оператором $\Phi^{\mathrm{w}} = U_E \Phi$, так что выполнено $L_0^{\mathrm{w}} = \Phi^{\mathrm{w}} L_0 (\Phi^{\mathrm{w}})^*$.

В итоге мы заключаем, что при выполнении условий теоремы 1 волновой моделью оператора L_0 является оператор Штурма–Лиувилля вида (2.7).

Список литературы

1. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, *Наука*, 1966.
2. М. И. Белишев, *Граничное управление и обратные задачи: одномерный вариант BC-метода.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **354** (2008), 19–80.

3. М. И. Белишев, М. Н. Демченко, *Динамическая система с граничным управлением, связанная с симметрическим полуограниченным оператором.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 17–39.
4. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель оператора Штурма–Лиувилля на полуоси.* — Алгебра и анализ **29**, No. 2 (2017), 3–33.
5. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель метрических пространств.* — Функц. анализ и его прил. **53**, No. 2 (2019), 3–10.
6. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель метрического пространства с мерой и ее приложение.* — Мат. сборник **211**, No. 4 (2020), 44–62.
7. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Об эволюционной динамической системе первого порядка с граничным управлением.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **483** (2019), 41–54.
8. А. С. Благовещенский, *О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны.* — Тр. МИАН СССР **115** (1971), 28–38.
9. Г. Биркгоф, Теория решеток, Наука, 1984.
10. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Лань, 2010.
11. М. И. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений.* — Тр. ММО **1** (1952), 187–246.
12. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*, Наука, 1967.
13. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи.* — *Труды института математики НАН Украины* **104** (2017).
14. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, 1972.
15. В. Б. Коротков, *Интегральные операторы.* Наука, 1983.
16. M. I. Belishev, *A unitary invariant of a semi-bounded operator in reconstruction of manifolds.* — J. Operator Theory **69**, No. 2 (2013), 299–326.
17. M. I. Belishev, *Wave propagation in abstract dynamical system with boundary control.* `arXiv:2307.00605v1`, 2023.
18. M. I. Belishev, V. S. Mikhailov, *Unified approach to classical equations of inverse problem theory.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **20**, No. 4 (2012), 461–488.
19. M. I. Belishev, S. A. Simonov, *A canonical model of the one-dimensional dynamical Dirac system with boundary control.* — Evolution Equations and Control Theory **11**, No. 1 (2022), 283–300.
20. A. S. Blagovestchenskii, *Inverse Problems of Wave Processes*, VSP, Netherlands, 2001.
21. P. Hartman, *Differential equations with non-oscillatory eigenfunctions.* — Duke Math. J. **15** (1948), 697–709.

Belishev M. I., Simonov S. A. A functional model of a class of symmetric semi-bounded operators.

Let L_0 be a closed symmetric positive definite operator with nonzero defect indices $n_\pm(L_0)$ in a separable Hilbert space $\mathscr{H}$. It determines a family of dynamical systems α^T, $T > 0$, of the form

$$\begin{aligned} &u''(t) + L_0^* u(t) = 0 && \text{in } \mathscr{H}, \ \ 0 < t < T, \\ &u(0) = u'(0) = 0 && \text{in } \mathscr{H}, \\ &\Gamma_1 u(t) = f(t), && 0 \leqslant t \leqslant T, \end{aligned}$$

where $\{\mathscr{H}; \Gamma_1, \Gamma_2\}$ $(\Gamma_{1,2} : \mathscr{H} \to \operatorname{Ker} L_0^*)$ is the canonical (Vishik) boundary triple for L_0, f is a boundary control ($\operatorname{Ker} L_0^*$-valued function of t) and $u = u^f(t)$ is the solution (trajectory).

Let L_0 be completely non-self-adjoint and $n_\pm(L_0) = 1$, so that $f(t) = \phi(t)e$ with a scalar function $\phi \in L_2(0,T)$ and $e \in \operatorname{Ker} L_0^*$. Let the map $W^T : \phi \mapsto u^f(T)$ be such that $C^T = (W^T)^* W^T = \mathbb{I} + K^T$ with an integral operator K^T in $L_2(0,T)$ which has a smooth kernel. Assume that C^T an isomorphism in $L_2(0,T)$ for all $T > 0$. We show that under these assumptions the operator L_0 is unitarily equivalent to the minimal Schrödinger operator $S_0 = -D^2 + q$ in $L_2(0,\infty)$ with a smooth real-valued potential q, which is in the limit point case at infinity. It is also proved that S_0 provides a canonical wave model of L_0.

С.-Петербургское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. Фонтанки 27,
С.-Петербург 191023, Россия
E-mail: `belishev@pdmi.ras.ru`.

Поступило 30 сентября 2023 г.

С.-Петербургское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7–9,
Санкт-Петербург 199034;
Академический университет
им. Ж. И. Алферова, Хлопина 8А,
Санкт-Петербург 194021, Россия
E-mail: `sergey.a.simonov@gmail.com`