Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 520, 2023 г.

Е. Ш. Гутшабаш

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА В МОДЕЛИ БОРНА–ИНФЕЛЬДА, УРАВНЕНИЕ МОНЖА–АМПЕРА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

§1. Введение

Модель Борна–Инфельда (BI) [1] является нелинейным обобщением элетродинамики Максвелла для случая сильных полей. В настоящее время, она и ее обобщения интенсивно используются, в частности, в теории бозонных струн и суперструн [2] и в теориях гравитации и космологии [3].

Известно, что имеется несколько подходов к решению нелинейного уравнения, к которому приводит эта модель. Один из таких подходов связан с обнаруженной в работе [4] лаксовой парой, и, таким образом, возможностью построения соответствующих солитонных решений (насколько известно автору, на данный момент эта возможность пока, по-видимому, не реализована). Другой – с предложенным в [5] автопреобразованием Бэклунда, на основе которого в работе [6] были построены новые точные решения уравнения BI. Отметим, также, важный результат, опирающийся на применении преобразования годографа [7], которое линеаризует это уравнение.

В данной работе мы применяем подход, связанный с преобразованием Лежандра (см. например, [8]), что с одной стороны, также, приводит к линеаризации уравнения BI (и при этом возникает другое, по сравнению с [7], уравнение), а с другой – позволяет выявить ряд дополнительных аспектов исходной модели и затронуть некоторые, ассоциированные с ней, проблемы. В частности, адекватным средством анализа здесь представляется аппарат метода инвариантов Римана. Кроме того, с учетом связи уравнения BI с гиперболической версией уравнения Монжа–Ампера удается построить и его точные решения

Ключевые слова: уравнение Борна–Инфельда, преобразование Лежандра, характеристики, уравнение Монжа–Ампера, задача Коши, точные решения.

§2. Уравнение Борна–Инфельда

Модель Борна–Инфельда порождается действием

$$S(\phi) = \int\int \mathcal{L}\, dxdt = \int\int \{1 - \sqrt{1+\phi_x^2 - \phi_t^2}\}\, dxdt$$

($\mathcal{L} = (1/b^2)\{1 - \sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}\}$ – плотность лагранжиана), где $\phi = \phi(x,t)$ - вещественнозначное скалярное безмассовое поле,связанное с функцией от двух инвариантов электродинамики Максвелла: $I_1 = (1/2)F_{ik}F^{ik} = (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)/2$ и $I_2 = (1/4)e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \mathbf{EB}$, где F_{ik} – тензор электромагнитного поля, e_{iklm} - полностью антисимметричный единичный тензор 4-го ранга. В случае (1+1)-мерного псевдоевклидова пространства с метрикой $\epsilon_{\mu\nu} = \mathrm{d}iag(1,-1)$ эта связь дается соотношением: $b^2(I_1 - b^2 I_2^2) = \epsilon_{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu = \phi_x^2 - \phi_t^2$, где b – постоянная Борна, имеющая смысл величины, обратной некоторому "максимальному" полю $\sim E_0^2$. Уравнение Эйлера–Лагранжа приводит к уравнению для поля ϕ:

$$(1+\phi_x^2)\phi_{tt} - 2\phi_x\phi_t\phi_{xt} - (1-\phi_t^2)\phi_{xx} = 0. \tag{1}$$

Оно относится к классу нелинейных уравнений гиперболического типа, причем предполагается выполненным условие

$$1 + \phi_x^2 - \phi_t^2 > 0, \tag{2}$$

а также накладывается требование достаточно быстрого убывания функции $\phi(x,0)$ и ее производных, например, в смысле Шварца. Заметим, также, что (1) имеет наглядный геометрический смысл: оно представляет собой минимальный граф в псевдоевклидовом пространстве переменных $\{x,\ t,\ \phi(x,t)\}$ с метрикой $ds^2 = dt^2 - dx^2 - d\phi^2$ и имеет естественный аналог в евклидовом пространстве в виде графа минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$[1].

Положим $\pi(x,t) = \partial\mathcal{L}/\partial\phi_t = \phi_t/\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}$, тогда набор функций $(\phi(x),\pi(x))$, где $\phi(x) = \phi(x,0)$, $\pi(x) = \phi_t(x,0)$, образует фазовое пространство Γ динамической системы (1), и она обладает гамильтонианом ($\mathcal{H} = \pi\phi_t + \sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2} - 1$ – плотность гамильтониана):

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\pi\phi_t + \sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2} - 1)dx.$$

[1] Построению точных решений на основе метода Захарова-Шабата для соответствующего уравнения эллиптического типа – уравнения минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^3$, – посвящена работа [9].

Введя пуассонову структуру на Γ в виде скобок

$$\{\phi(x), \phi(y)\} = \{\pi(x), \pi(y)\} = 0, \quad \{\phi(x), \pi(y)\} = \delta(x-y),$$

нетрудно убедиться, что уравнения движения, эквивалентные (1), примут гамильтонову форму

$$\pi_t = \{\pi, H\} = -\frac{\delta H}{\delta \phi}.$$

§3. Преобразование Лежандра и точные решения

Применим к уравнению (1) преобразование Лежандра. Для этого, следуя [8], положим (ξ, η – новые (дуальные) независимые переменные)

$$\phi(x,t) + u(\xi,\eta) = x\xi + t\eta, \quad u_\xi = x, \ \ u_\eta = t, \tag{3}$$

так, что $\xi = \phi_x$, $\eta = \phi_t$. Принимая во внимание, что

$$\phi_{xx} = J u_{\eta\eta}, \ \ \phi_{xt} = -J u_{\xi\eta}, \ \ \phi_{tt} = J u_{\xi\xi},$$

где $J = \phi_{xx}\phi_{tt} - \phi_{xt}^2$, и подставляя эти выражения в (1), получим квазилинейное уравнение на функцию $u = u(\xi,\eta)$ (в предположении, что $J \neq 0$):

$$(1+\xi^2)u_{\xi\xi} + 2\xi\eta u_{\xi\eta} - (1-\eta^2)u_{\eta\eta} = 0, \tag{4}$$

а условие гиперболичности сводится к неравенству, аналогичному (2): $1 + \xi^2 - \eta^2 > 0$. Решение этого уравнение, с учетом (3), дает либо параметрическое представление решения (1), либо приводит к неявному решению вида:

$$\phi(x,t) = x\phi_x + t\phi_t - u(\phi_x, \phi_t).$$

В простейшем случае, полагая в (4) $u(\xi,\eta) = u_1(\xi) + u_2(\eta)$, после интегрирования будем иметь:

$$u(\xi,\eta) = C\Big[\xi \arctan\xi - \frac{1}{2}\ln(1+\xi^2) + \frac{1}{2}\eta \ln\Big|\frac{1+\eta}{1-\eta}\Big| + \frac{1}{2}\ln|1-\eta^2|\Big] \\ + C_1\xi + C_2\eta + C_3,$$

где C, C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные. Это решение имеет смысл при $\sqrt{\xi^2+\eta^2} < \infty$ и, очевидно, не содержит особенностей при $|\eta| = 1$, т.е. является несингулярным.

Найдем характеристики уравнения (4). Они определяются как решения уравнения характеристических линий [10]:

$$(1+\xi^2)\,\omega_\xi + (\xi\eta \pm \rho)\,\omega_\eta = 0, \quad \rho = \sqrt{1+\xi^2-\eta^2},$$

которым соответствуют уравнения

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi\eta \pm \rho}{1+\xi^2}.$$

В результате их интегрирования получим явные выражения для самих характеристик:

$$r = \eta - \frac{C_0}{\sqrt{1+C_0^2}}\,\xi = \frac{1}{\sqrt{1+C_0^2}}, \quad s = \eta + \frac{C_0}{\sqrt{1+C_0^2}}\,\xi = \frac{1}{\sqrt{1+C_0^2}}, \tag{5}$$

где C_0 – произвольная постоянная. Таким образом, на плоскости переменных $(\xi,\,\eta)$ они представляют собой семейства прямых линий.

Найдем решение задачи Коши для уравнения (4):

$$u(0,\eta) = \Psi_1(\eta), \;\; u_\xi(0,\eta) = \Psi_2(\eta), \;\; \Psi_1 \in \mathbb{C}^2(-\infty,\infty), \; \Psi_2 \in \mathbb{C}^1(-\infty,\infty), \tag{6}$$

где Ψ_1, Ψ_2 – заданные функции. Для этого сделаем в нем замену переменных $(\xi,\eta) \to (r,s)$ согласно формулам (5), и приведем его к канонической форме:

$$u_{rs} = 0. \tag{7}$$

Тогда решение задачи (4), (6) дается хорошо известной формулой Даламбера:

$$u(\xi,\,\eta) = \frac{1}{2}[\Psi_1(r) + \Psi_2(s)] + \frac{1}{2}\int\limits_r^s \Psi_2(y)dy. \tag{8}$$

Необходимо отметить, что в отличие от метода годографа [7] (см., также, [11]), здесь уравнение второго порядка удается привести к уравнению (7) , не содержащему первых производных; оно, а значит, и уравнение BI, обладает решением в виде двух встречных волн, причем не только в асимптотическом режиме [7].

Остановимся теперь на связи уравнения (4) с инвариантами Римана (наиболее полное изложение такого подхода дано в [12]).

С этой целью положим $U = u_\xi$, $V = u_\eta$ и перепишем это уравнение в виде линейной матричной системы:

$$\begin{pmatrix} 1+\xi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_\xi \\ V_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi\eta & -(1-\eta^2) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_\eta \\ V_\eta \end{pmatrix} = 0,$$

или как

$$\begin{pmatrix} U_\xi \\ V_\xi \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} U_\eta \\ V_\eta \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{2\xi\eta}{1+\xi^2} & -\frac{1-\eta^2}{1+\xi^2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Матрица A имеет собственные числа

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(\xi, \eta) = \frac{\xi\eta \pm \rho}{1 + \xi^2}, \tag{10}$$

и, поскольку $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_2 < \lambda_1$, система (9) относится к так называемым гиперболическим системам в узком смысле.

Из уравнения на собственные значения A следует тождество:

$$\lambda_\xi + \lambda\lambda_\eta = 0,$$

откуда получаем:

$$\lambda_{1\xi} + \lambda_1\lambda_{1\eta} = 0, \quad \lambda_{2\xi} + \lambda_2\lambda_{2\eta} = 0, \tag{11}$$

т.е. несвязанную систему уравнений Эйлера–Хопфа.

Заметим, что если ввести векторные поля $D_1 = \frac{\partial}{\partial\xi} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial\eta}$, $D_2 = \frac{\partial}{\partial\xi} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial\eta}$, то для их коммутатора после некоторых вычислений с учетом (11) будем иметь:

$$[D_1,\ D_2] = (\lambda_{2\xi} - \lambda_{1\xi} + \lambda_1\lambda_{2\eta} - \lambda_2\lambda_{1\eta})\frac{\partial}{\partial\eta} = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_{2\eta} - \lambda_{1\eta})\frac{\partial}{\partial\eta},$$

т.е. эти поля коммутируют на прямых $\xi = 0$ и $\eta = 0$.

Найдем теперь левые собственные вектора матрицы A (т.е. вектора, удовлетворяющие условиям $\mathbf{l}_{1,2}A = \lambda_{1,2}\mathbf{l}_{1,2}$). Их удобно выбрать в виде: $\mathbf{l}_1 = (1,\ \lambda_2)$ и $\mathbf{l}_2 = (1,\ \lambda_1)$.

Построим полезную для наших целей характеристическую форму системы (9), как линенйную комбинацию ее уравнений, считая, что $u^1(\xi, \eta) = U$, $u^2(\xi,\ \eta) = V$:

$$l_k^1\Big\{\frac{\partial u^1}{\partial\xi} + \lambda_k\frac{\partial u^1}{\partial\eta}\Big\} + l_k^2\Big\{\frac{\partial u^2}{\partial\xi} + \lambda_k\frac{\partial u^2}{\partial\eta}\Big\} = 0,$$

или

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{\xi\eta + \rho}{1 + \xi^2}\,\frac{\partial U}{\partial\eta}\right] + \frac{\xi\eta - \rho}{1 + \xi^2}\left[\frac{\partial V}{\partial\xi} + \frac{\xi\eta + \rho}{1 + \xi^2}\,\frac{\partial V}{\partial\eta}\right] = 0,\\ \left[\frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{\xi\eta - \rho}{1 + \xi^2}\,\frac{\partial U}{\partial\eta}\right] + \frac{\xi\eta + \rho}{1 + \xi^2}\left[\frac{\partial V}{\partial\xi} + \frac{\xi\eta - \rho}{1 + \xi^2}\,\frac{\partial V}{\partial\eta}\right] = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Уравнения для инвариантов Римана будут иметь вид ($k = 1, 2$):

$$\frac{\partial R^k(\xi, \eta, u^1, u^2)}{\partial u^i} = \mu_k l_k^i, \tag{13}$$

где, вообще говоря, $\mu_k = \mu_k(\xi,\, \eta,\, u^1,\, u^2)$ – интегрирующие множители дифференциальных 1-форм $\Omega_k = l_k^\alpha du^\alpha$ (суммирование по α), так что

$$\mu_k(\xi,\, \eta, u^1,\, u^2)\, \Omega_k = \mu_k l_k^\alpha du^\alpha = \frac{\partial R^k}{\partial u^\alpha} du^\alpha,$$

откуда, считая, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$, следует, что

$$R^1(\xi,\eta) = U + \lambda_2 V = F_1(r), \text{ постоянна вдоль характеристики } r, \quad (14)$$

$$R^2(\xi,\eta) = U + \lambda_1 V = F_2(s), \text{ постоянна вдоль характеристики } s, \quad (15)$$

где $F_1,\ F_2$ – произвольные функции. Для системы (9), записанной в терминах инвариантов Римана, получаем:

$$R_\xi^k + \lambda_k R_\eta^k = 0, \quad k = 1, 2, \quad (16)$$

или

$$R_\xi^1 + \frac{\xi\eta + \rho}{1 + \xi^2} R_\eta^1 = 0, \qquad R_\xi^2 + \frac{\xi\eta - \rho}{1 + \xi^2} R_\eta^2 = 0.$$

Построим вначале автомодельное решение (16), введя для этого переменную $\nu = (\eta - \eta_0)/(\xi - \xi_0)$, так, что $R^k = R^k(\nu)$. Подстановка этого анзаца в (16) дает: $-\nu R_\nu^k + \lambda_k R_\nu^k = 0$, $k = 1, 2$, откуда, полагая $\nu = \lambda_m$, найдем, что

$$(\lambda_k - \lambda_m) R_\nu^k = 0, \;\; m \neq k,$$

и, поскольку, в силу узкой гиперболичности системы (9), $\lambda_1 > \lambda_2$, из этого соотношения находим, что $R^1 = R_{10}$, и, аналогично, $R^2 = R_{20}$, где $R_{10},\ R_{20}$ – некоторые вещественные постоянные. Тем самым, построены так называемые волны разрежения индексов 1 и 2, соответственно (см., например, [12]), связанные с нелинейными эффектами опрокидывания волн и образования, по этой причине, ударных волн.

Из (14)–(15) будем иметь общее решение системы (9):

$$U(\xi,\, \eta) = \frac{\lambda_1 F_1(r) - \lambda_2 F_2(s)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad V(\xi,\, \eta) = \frac{F_2(s) - F_1(r)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (17)$$

В силу соотношений (10) и условия гиперболичности, это решение несингулярно.

Поставим задачу Коши для системы (9):

$$U_{|\xi=0} = U_{10}(\eta), \quad V_{|\xi=0} = V_{10}(\eta), \quad \eta \in Y, \quad (18)$$

где Y – некоторый конечный или бесконечный промежуток, U_{10}, U_{20} – достаточно гладкие заданные функции, например, U_{10}, $U_{20} \in \mathbb{C}^2(Y)$.

В случае конечного промежутка $Y = [\eta_1,\, \eta_2]$, оказывется, что решение задачи Коши является единственным в характеристическом треугольнике, образованном этим отрезком и двумя пересекающимися характеристиками, проведенными через точки η_1, η_2, соответственно, причем каждая из этих характеристик принадлежит своему семейству (в [13] этот факт был доказан для некоторой слабонелинейной системы).

Из (17)–(18) получаем решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} U(\xi,\, \eta) &= \frac{\lambda_1 U_{10}(r) - \lambda_2 U_{10}(s) - \sqrt{1-\eta^2}[\lambda_1 V_{10}(r) + \lambda_2 V_{10}(s)]}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ V(\xi,\, \eta) &= \frac{U_{10}(s) - U_{10}(r) + \sqrt{1-\eta^2}[V_{10}(s) + V_{10}(r)]}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Как и решение (17), оно несингулярно.

§4. Уравнение Монжа–Ампера

Рассмотрим теперь тесно связанную с уравнением (1) гиперболическую версию уравнение Монжа–Ампера:

$$\mathrm{d}et\, D^2 W = W_{tt} W_{xx} - W_{xt}^2 = -1, \tag{20}$$

где символом $D^2 W$ обозначена матрица Гессе.

Уравнение вида (20) и его обобщения (с наличием первых производных в правой части) широко используются в разнообразных задачах физики (особенно в газовой динамике [14]), а также геометрии [15]. Следует, также, упомянуть, что (20), наряду с уравнением (1), является гамильтоновым [16]. Действительно, введем канонические переменные $W(x,\, t)$ и $\pi(x,t) = W_t(x,t)$, так, что фазовое пространство этого уравнения образовано набором функций $\{W(x,\, 0), \pi(x,0)\}$. Гамильтониан имеет вид:

$$H = \int [\frac{1}{2}\pi^2 W_{xx} + W] dx,$$

а уравнения движения могут быть записаны как ($w^1 = W,\, w^2 = \pi$):

$$w_t^l = K^{lk} \frac{\delta}{\delta w^k} H.$$

Здесь матрица $K = K(x,t)$, $K^T = -K$ (символ T означает транспонирование), задающая пуассонову структуру, равна:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{W_{xx}} \\ -\frac{1}{W_{xx}} & \frac{\pi_x}{W_{xx}^2}\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}\circ\frac{\pi_x}{W_{xx}^2} \end{pmatrix},$$

причем под символом $\circ$ понимается обычное операторное умножение, так, что $(H_1 \circ H_2)y(x,t) = H_1(H_2 y(x,t))$.

Применим метод инвариантов Римана к этому уравнению. С этой целью заметим, что (как отмечалось, например, в [4]), решения уравнений (20) и (1) связаны между собой преобразованием Бьянки:

$$W_{tt} = \frac{1-\phi_t^2}{\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}},\ W_{tx} = \frac{-\phi_x\phi_t}{\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}},\ W_{xx} = -\frac{1+\phi_x^2}{\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}}.$$

Отсюда найдем, что функция $W = W(x,t)$ должна подчиняться волновому уравнению с переменным коэффициентом:

$$W_{tt} = a^2 W_{xx}, \quad a^2 = a^2(\phi_t,\, \phi_x) = \frac{\phi_t^2 - 1}{\phi_x^2 + 1}, \tag{21}$$

и, значит, преобразование Бьянки позволяет линеаризовать уравнение (20)[2]..

Используя ту же схему исследования, что и для уравнения (9), построим вначале характеристики (21). Для этого мы рассмотрим два случая, отвечающих двум частным решениям уравнения BI.

а). Положим в (1) $\phi(x,\, t) = \chi(\zeta)$, где $\zeta = \sqrt{t^2 - x^2}$, т.е. решение рассматривается вне светового конуса. Такая подстановка приводит к следующему уравнению:

$$(\zeta\chi_\zeta)_\zeta = \chi_\zeta^3, \tag{22}$$

которое имеет общее решение ([3])

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{D_0}\ln|D_0\zeta + \sqrt{(D_0\zeta)^2+1}| + D_1, \tag{23}$$

где D_0, D_1 – произвольные вещественные постоянные. Оно, однако, не позволяет проинтегриповапть соответствующие уравнения для характеристик, поэтому мы ограничимся здесь его частным решением:

[2]В недавней работе [17] уравнение (21) исследовалось при более общих предположениях относительно коэффициентной функции a^2, т.е. без связи с уравнением BI

[3]Оно не входит в список решений, приведенных в работах [18, 19], и, по-видимому, является новым.

$\chi(\zeta) = \zeta$, откуда найдем, что $a(\phi_t, \phi_x) = \pm x/t$. Это означает, что уравнения характеристик имеют вид:

$$r_1 = x - t, \quad s_1 = x + t. \tag{24}$$

b). Возьмем решение уравнения (1) в форме (см., например, [6]) $f(x, t) = x \tan t$([4]). Тогда уравнения характеристик запишутся так:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{\sqrt{x^2 - \cos^2 t}}{\cos t}.$$

Полагая в нем $x(t) = z(t) \cos t$, будем иметь:

$$z_t \cos t - z \sin t = \pm \sqrt{z^2 - 1}.$$

Рассмотрим решения этого уравнения в области $z \gg 1$. Интегрируя его, в этом случае получим:

$$x(t) = d_0 \tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}), \quad x(t) = \frac{d_0}{\tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})}, \tag{25}$$

соответственно, где d_0 – произвольная постоянная. Соотношения (25) справедливы в области $|t - \pi/2| \ll 1$, так, что $x(t) \to \infty$ для первого семейства и $x(t) \to 0$ – для второго, а характеристки будут такими:

$$r_2 = x - d_0 \tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}), \quad s_2 = x - \frac{d_0}{\tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})}. \tag{26}$$

Перепишем, далее, уравнение (21), обозначив $W_1 = W_t$, $W_2 = W_x$, в виде системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} W_{1t} \\ W_{2t} \end{pmatrix} + A_1 \begin{pmatrix} W_{1x} \\ W_{2x} \end{pmatrix} = 0, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Матрица A_1 имеет собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm a$, а левые собственные вектора равны (с точностью до числового множителя), соответственно, $\mathbf{l}_1 = (1, -a)$ и $\mathbf{l}_2 = (1, a)$. Это позволяет привести систему (27) к характеристической форме, аналогичной (12) ($k = 1, 2$):

$$l_k^1 (W_{1t} + \lambda_k W_{1x}) + l_k^2 (W_{2t} + \lambda_k W_{2x}) = 0,$$

или

$$(W_{1t} + aW_{1x}) - a(W_{2t} + aW_{2x}) = 0, \quad (W_{1t} - aW_{1x}) + a(W_{2t} - aW_{2x}) = 0. \tag{28}$$

[4]Другое – аналогичное, – и сравнительно простое решение: $f(x, t) = t \tanh x$ приводит к условию $a^2 < 0$, т.е. к комплексным характеристикам.

Выражения для инвариантов Римана приобретают вид ($l = 1, 2$):

$$R^1(x,t) = W_1 + \lambda_2 W_2 = G_1(r_l), \tag{29}$$

$$R^2(x,t) = W_1 + \lambda_1 W_2 = G_2(s_l), \tag{30}$$

где G_1, G_2 – произвольные функции, постоянных вдоль характеристик r_l и s_l, соответственно. Из этих соотношений следует, что

$$W_1(x,t) = \frac{\lambda_1 G_1(r_l) - \lambda_2 G_2(s_l)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad W_2(x,t) = \frac{G_2(s_l) - G_1(r_l)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \tag{31}$$

а система (27) может быть записана в терминах инвариантов Римана как

$$R^1_t + \lambda_2 R^1_x = 0, \quad R^2_t + \lambda_1 R^2_x = 0. \tag{32}$$

Формулы (31) дают общее решение (27), причем в случае $l = 2$ они соответствуют асимптотическому решению, а решение задачи Коши вполне аналогично (19).

§5. Заключение

В данной работе приведены два примера линеаризации нелинейных уравнений, позволяющих – без применения традиционных средств метода обратной задачи, – получать точные решения. При этом были применены различные способы подобной линеаризации. К ним следует, также, отнести хорошо известную подстановку Коула–Хопфа, преобразование годографа и некоторые другие. Поиск таких средств, и, одновременно, соответствующих квазилинейных и нелинейных уравнений и систем, представляет, на наш взгляд, несомненный интерес как с математической, так и с физической точек зрения, поскольку позволяет более полно выявить их природу и свойства.

Список литературы

1. M. Born, L. Infeld, *Fondation of the New Field Theory.* — Proc. R. Soc. Lond. A **144** (1934), 425.
2. E. S.Fradkin, A. A.Tseitlin, *Non-Linear Electrodynamics from Quantized Strings.* — Phys. Lett. B **163** (1985), 123.
3. R. Ferraro, F. Fiorini, *Born-Infeld determinantal gravity and the taming of the conical singularity in 3-dimensional spacetime.* — Phys. Lett B **692** (2010), 206.
4. J. C. Brunelli, M. Gurses, K. Zheltukhin, *On the integrability of a Class of Monge-Ampere Equations.* — Rev. Math. Phys. **13**, (2001), 529.
5. M. Arik, F. Neyzi, Y. Nutku, P. Olver. J. M. Verosky, *Multi-Hamiltonian Structure of the Born-Infeld Equation.* — IMA Preprint Series 497, (1989).

6. Е. Ш. Гутшабаш, П. П. Кулиш, *Преобразование Бэклунда и новые точные решения модели Борна–Инфельда.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **465** (2017), 135–146.
7. Б. М. Барбашов, Н. А. Черников, *Решение и квантование нелинейной двумерной модели типа поля Борна-Инфельда.* — ЖЭТФ **50** (1966), 1296–1308.
8. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов, *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.* Физматлит, М., 2005.
9. Е. Ш. Гутшабаш, *Нелинейная сигма-модель, метод Захарова–Шабата и новые точные формы минимальной поверхности в* $\mathbb{R}^3$. — Письма в ЖЭТФ **99** (2014), 827.
10. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Уравнения в частных производных математической физики.* Высшая школа, М., 1970.
11. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны.* Наука, М., 1974.
12. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* Наука, М., 1978.
13. О. Ф. Меньших, *Взаимодействие финитных уединенных волн для уравнений типа Борна–Инфельда.* — ТМФ **79**, (1989), 16.
14. С. В. Хабиров, *Неизентропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа–Ампера.* — Мат.сб. **181**, (1990), 1607-1622.
15. A. Figalli, *The Monge–Ampere Equation and Its Applications.* European mathematical Society, 2017.
16. О. И. Мохов, *Симплектическая и Пуассонова геометрия на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые уравнения.* Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2004.
17. N. Manganaro, A. Rizzo, P. Vergallo, *Solutions to the wave equation for commuting flows of dispersionless PDEs.* arXiv.2212.10130
18. W. I. Fushchich, V. M. Shtelen, N. I. Serov, *Symmetry Analysis and Exact Solutions of the Equations of Mathematical Physics.* Kluwer, Dordrecht, 1993.;
19. M. Nadjafikhah, S. R. Hejazi, *Group Analysis of Born-Infeld Equation.* arXiv: 1009.5490

Gutshabash E. Sh. Legendre transformation in Born–Infeld models, Monge–Ampere equation and exact solutions.

Exact solutions of the equation obtained by applying the Legendre transformation to the Born–Infeld equation are constructed, and the quasilinear system arising in connection with this transformation is investigated. Based on the linearization of the Monge–Ampere equation, some of its particular solutions are calculated.

С.-Петербургский
университет телекоммуникаций,
наб. р. Мойки, 61,
Санкт-Петербург 191186, Россия
E-mail: e.gutshabash@spbu.ru, gutshab@mail.ru

Поступило 6 июня 2023 г.