Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 520, 2023 г.

Т. А. Болохов

ПРИМЕРЫ НУЛЕВЫХ МОД ОПЕРАТОРА ФАДДЕЕВА-ПОПОВА ДЛЯ SU(2) КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ

Введение

Появление оператора Фаддеева–Попова [1] в кинетической части гамильтониана является характерной особенностью теории калибровочных полей. Этот оператор для поля A_l в калибровке Кулона выглядит следующим образом

$$\Delta(A) = \partial_l(\partial_l + [A_l, \cdot\,]).$$

Если обозначить как E_l импульс, сопряженный к A_l, то гамильтониан калибровочного поля записывается в виде [2], [3]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(E_l^2 + (\partial_k \Delta^{-1}(A)[A_l, E_l])^2 + (\partial_k A_l - \partial_l A_k + [A_k, A_l])^2\right) d^3x.$$

Такой гамильтониан определен на связном множестве функций, для которых оператор $\Delta(A)$, стоящий в знаменателе, является положительным оператором (первый регион Грибова [4]), и при этом конечна потенциальная часть

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} (\partial_k A_l + [A_k, A_l])^2\, d^3x < \infty. \tag{1}$$

Калибровочные поля, лежащие на границе региона Грибова (в горизонте Грибова) и обращающие в бесконечность слагаемое (1) являются возможными особыми точками соответствующего квантового гамильтониана в смысле теории самосопряженных расширений симметрических операторов [8]. Вследствие этого нули оператора Фаддеева–Попова представляют интерес с точки зрения подхода Шредингера к описанию калибровочной теории.

Ключевые слова: оператор Фаддеева–Попова, нулевые моды, калибровка Кулона, регионы Грибова, гипергеометрическая функция.

Примеры нулей оператора Фаддеева–Попова в различных калибровках и для различных калибровочных групп рассматривались в работах [5, 6], см. также обзор [7]. Большинство исследователей в этой области области использует подход Хеньи [5], в котором сначала подбирается калибровочное преобразование с определенным поведением на бесконечности, а затем по нему восстанавливается поле A_l, определяющее оператор Фаддеева–Попова с нулевой модой, либо поле, имеющее калибровочного эквивалента, удовлетворяющего тому же калибровочному условию.

В данной работе мы обращаемся к “прямой” задаче, то есть рассматриваем поле A_l в калибровке Кулона с некоторой параметризацией и пытаемся подобрать ее таким образом, чтобы у соответствующего оператора Фаддеева–Попова существовала нулевая мода. В качестве функции радиальной пространственной компоненты поля A_l используется рациональное выражение с полюсами первого и второго порядков в отрицательной точке. В этом случае уравнение для поля, зануляемого оператором Фаддеева–Попова, может быть сведено к дифференциальному уравнению второго порядка с регулярными особыми точками в нуле, на бесконечности и в указанной выше отрицательной точке, а затем преобразовано к гипергеометрическому уравнению. Далее, связывая поведение решений гипергеометрического уравнения в двух особых точках, можно найти условия на рациональную функцию, параметризующую калибровочное поле, при которых решения исходного уравнения второго порядка обладают требуемым поведением в нуле и на бесконечности. Таким образом мы получаем примеры нулевых мод оператора Фаддеева–Попова, для которых упомянутое в предыдущем параграфе восстановление по калибровочному преобразованию, являлось бы трудной задачей.

§1. Параметризация SU(2)-калибровочного поля

Для построения параметризации SU(2) калибровочного поля будем использовать подход, примененный в [4]: рассмотрим матрицу

$$\hat{n} = i\frac{x_k\sigma_k}{r}, \quad r = |x|,$$

задающую взаимодействие пространственного вектора $\boldsymbol{x}$ и элементов пространства внутренней симметрии, определяемых матрицами Паули

$$[\sigma_k, \sigma_l] = 2i\varepsilon_{klm}\sigma_m, \quad \sigma_k \cdot \sigma_k = 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Матрица $\hat{n}$ обладает следующими свойствами

$$\hat{n}^* = -\hat{n}, \quad \hat{n}^2 = -1,$$
$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l} = i\frac{\sigma_l}{r} - \frac{x_l}{r^2}\hat{n}, \quad x_l\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial x_l^2} = \frac{\partial}{\partial x_l}\Big(i\frac{\sigma_l}{r} - \frac{x_l}{r^2}\hat{n}\Big) = -2\frac{\hat{n}}{r^2},$$

из которых следует, что поле

$$A_l(\boldsymbol{x}) = f(r)\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l} \tag{2}$$

лежит в алгебре su(2)

$$A_l^*(\boldsymbol{x}) = f(r)\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l}\hat{n} = -A_l(\boldsymbol{x})$$

и удовлетворяет условиям калибровки Кулона

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\big(\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l}\big) = \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{2}\Big(\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l} - \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l}\hat{n}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\hat{n}\frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial x_l^2} - \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial x_l^2}\hat{n}\Big) = 0$$
$$\frac{\partial A_l}{\partial x_l} = f'(r)\frac{x_l}{r}\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l} + f(r)\frac{\partial}{\partial x_l}\Big(\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l}\Big) = 0.$$

К построенному таким образом полю $A_l(\boldsymbol{x})$ применим калибровочное преобразование, порождаемое матрицей

$$S = \exp(\frac{1}{2}\alpha(r)\hat{n}) = \cos\frac{1}{2}\alpha + \hat{n}\sin\frac{1}{2}\alpha,$$

тогда

$$S : A_l \to A_l^S = S^* A_l S + S^* \partial_l S = \Big(\cos\alpha\,\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l} + \sin\alpha\,\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l}\Big)f(r)$$
$$+ \frac{1}{2}\sin\alpha\,\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l} + \frac{1}{2}(\cos\alpha - 1)\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_l} + \frac{1}{2}\alpha'\frac{x_l}{r}\hat{n}.$$

Требование выполнения условия калибровки Кулона для A_l^S

$$\partial_l A_l^S = \Big(f(r) + \frac{1}{2}\Big)\sin\alpha\,\frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial x_l^2} + \frac{1}{2}\alpha''\hat{n} + \frac{1}{2}\alpha'\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{x_l}{r}\hat{n} = 0$$

приводит нас к уравнению

$$\alpha'' + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2}{r^2}(2f(r) + 1)\sin\alpha = 0, \tag{3}$$

наличие решений у которого означает, что калибровка Кулона перестает однозначно фиксировать представителя в классе калибровочно-эквивалентных полей.

С другой стороны, рассмотрим уравнение для принадлежности функции

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \alpha(r)\hat{n} \tag{4}$$

к ядру оператора Фаддеева–Попова, построенного для поля $A_l(\boldsymbol{x})$

$$\partial_l(\partial_l + [A_l, \cdot\,])\varphi = 0. \tag{5}$$

Действие коммутатора $[A_l, \cdot]$ на функцию φ сводится к операции умножения

$$[A_l, \varphi] = A_l\varphi - \varphi A_l = f(r)\alpha(r)(\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_l}\hat{n} - \hat{n}^2\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_l}) = 2f(r)\alpha(r)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_l}.$$

Действие производных ∂_l на φ и $[A_l, \varphi]$ сводится к перемножению полей

$$\begin{aligned}\partial_l\varphi &= \alpha'\frac{x_l}{r}\hat{n} + \alpha\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_l},\\ \partial_l^2\varphi &= \alpha''\hat{n} + 2\alpha'\frac{\hat{n}}{r} - 2\alpha\frac{\hat{n}}{r^2},\\ [\partial_l A_l, \varphi] &= 2\partial_l\Big(f(r)\alpha(r)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_l}\Big) = -4f(r)\alpha(r)\frac{\hat{n}}{r^2}.\end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в выражение (5) получаем следующее уравнение для α

$$\alpha'' + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\alpha}{r^2}(1 + 2f(r)) = 0. \tag{6}$$

Данное уравнение является линеаризацией уравнения (3), но для того, чтобы его решение порождало непрерывную подгруппу калибровочных преобразований

$$A_l \to S^*(t)A_lS(t) + S^*(t)\partial_lS(t), \quad S(t) = e^{t\varphi}$$

необходимо потребовать непрерывности и ограниченности $\varphi(\boldsymbol{x})$ на всём пространстве, включая ограниченность на бесконечности, то есть непрерывности и ограниченности функции $\alpha(r)$.

§2. Уравнение с рациональной функцией $f(r)$

Подход, предложенный в работе Хеньи [5], предполагает обращение уравнений (3) или (6), то есть функция $f(r)$ строится по готовому параметру калибровочного преобразования $\alpha(r)$ с определенными граничными условиями. Мы же попытаемся, наоборот, взять функцию $f(r)$ удобного для нас вида и решить уравнение (6).

Для того, чтобы избавиться в этом уравнении от слагаемого с первой производной произведем замену

$$\alpha(r) = \frac{\tilde{\alpha}(r)}{r}, \tag{7}$$

тогда

$$\alpha'' + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2}{r^2}(1 + 2f(r))\alpha = \frac{\tilde{\alpha}''}{r} - \frac{2}{r^3}(1 + 2f(r))\tilde{\alpha}$$

и уравнение (6) переписывается в виде

$$\tilde{\alpha}'' = \frac{2}{r^2}(1 + 2f(r))\tilde{\alpha}. \tag{8}$$

На функцию $f(r)$ естественно наложить условие непрерывности и ограниченности в нуле, так, чтобы поле $A_l(\boldsymbol{x})$ имело в начале координат особенности не хуже, чем $\frac{C}{|x|}$. Кроме того, для выполнения условия квадратичной интегрируемости

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |A_l(\boldsymbol{x})|^2 \, d^3x < \infty$$

мы потребуем, чтобы функция $f(r)$ убывала на бесконечности. Один из самых простых способов удовлетворить этим условиям и при этом иметь в качестве (6) уравнение с хорошо исследованными свойствами – это использовать в качестве $f(r)$ рациональную функцию вида

$$f(r) = \frac{\chi}{\varsigma r + 1} + \frac{\xi}{(\varsigma r + 1)^2}. \tag{9}$$

Действительно, в этом случае уравнение (8) после замены

$$z = \varsigma r + 1$$

превращается в уравнение

$$\tilde{\alpha}''(z-1) = \Big(\frac{2}{(z-1)^2} + \frac{4\chi}{z(z-1)^2} + \frac{4\xi}{z^2(z-1)^2}\Big)\tilde{\alpha}(z-1),$$

которое, после отождествления

$$|a-b|=3, \tag{10}$$

$$\chi=\frac{1}{16}(4ab-2c(a+b-1)) \tag{11}$$

$$\xi=\frac{1}{16}c(c-2), \tag{12}$$

совпадает с Q-формой гипергеометрического уравнения [9]

$$\tilde{\alpha}''=-\frac{(1-(a-b)^2)z^2+(2c(a+b-1)-4ab)z+c(2-c)}{4z^2(z-1)^2}\tilde{\alpha}. \tag{13}$$

Таким образом, наша задача, с учетом замены (7), сводится к поиску комбинаций параметров a, b, c при которых существуют решения уравнения (13) с поведением

$$\tilde{\alpha}(z-1)\overset{z\to 1}{=}O(z-1), \quad \tilde{\alpha}(z-1)\overset{z\to\infty}{=}O(z) \tag{14}$$

в окрестностях точек $z=1$ и $z=\infty$, соответственно.

§3. Решения гипергеометрического уравнения

Для приведения уравнения (13) в стандартный вид воспользуемся заменой [10]

$$\tilde{\alpha}(z-1)=z^{c/2}(1-z)^{(a+b+1-c)/2}w(z). \tag{15}$$

Несложно проверить, что если функция $\tilde{\alpha}(z-1)$ удовлетворяет уравнению (13), то функция $w(z)$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению

$$z(1-z)w''+(c-(a+b+1)z)w'-abw=0. \tag{16}$$

Так как само гипергеометрическое уравнение, замена (15) и параметры χ, ξ симметричны относительно перестановки параметров a и b, то можно считать, что условие (10) записано в виде

$$a=b+3,$$

а замена (15) производится следующим образом

$$\tilde{\alpha}(z-1)=z^{c/2}(1-z)^{a-1-c/2}w(z). \tag{17}$$

Наша задача сводится к тому, чтобы, пользуясь связями для асимптотик решений гипергеометрического уравнения в особых точках $z=1$ и $z=\infty$, подобрать такие решения $w(z)$ уравнения (16), чтобы функция (17) удовлетворяла условиям (14).

Из свойств гипергеометрической функции [11, §15.10(i)] следует, что если разность параметров a и b является целым числом

$$a = b + n - 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то фундаментальная пара решений для особой точки $z = \infty$ в терминах гипергеометрического ряда $F(a, b, c; z)$ имеет следующий вид

$$w_5 = z^{-a} F\Big(a, a - c + 1, n; \frac{1}{z}\Big), \tag{18}$$

$$w_6 = z^{-a} F\Big(a, a - c + 1, n; \frac{1}{z}\Big) \ln z \tag{19}$$
$$+ z^{-a} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!(k-1)!}{(n-k-1)!(1-a)_k (c-a)_k} (-z)^k + O(1) \Big),$$

где

$$a, a - c + 1 \neq n - 1, n - 2, \dots 0, -1, -2, \dots,$$

а в качестве $(1-a)_k$, $(c-a)_k$ используется стандартное обозначение

$$(d)_k = d(d+1) \cdots (d+k-1), \quad (d)_0 = 1.$$

Отсюда видно, что решения w_5 и w_6 ведут себя на бесконечности как z^{-a} и $O(z^{-a+n-1})$, соответственно, и, подставляя эти степени в (17), получаем

$$z^{c/2}(1-z)^{a-1-c/2} w_5 = O(z^{-1}), \quad z \to \infty, \tag{20}$$
$$z^{c/2}(1-z)^{a-1-c/2} w_6 = O(z^2), \quad z \to \infty.$$

То есть из двух решений (18), (19) только первое удовлетворяет условию (14) для поведения функции $\tilde{\alpha}(r)$ на бесконечности.

Теперь, с помощью формулы 15.8.5 из [11] напишем разложение решения w_5 в окрестности точки $z = 1$

$$w_5(z) \frac{\sin \pi(n + c - 2a - 1)}{\pi} = \frac{F(a, a - n + 1, 2a - c - n + 2; 1 - z)}{\Gamma(n-a)\Gamma(n - a + c - 1)}$$
$$- (z-1)^{n+c-2a-1} z^{1-c} \frac{F(n-a, 1-a, n+c-2a; 1-z)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}. \tag{21}$$

Далее будем предполагать, что величина $c - 2a$ не является целым числом. Тогда, используя оценку (17), можно сделать вывод, что вклады первого и второго слагаемого из правой части (21) в $\tilde{\alpha}(z-1)$ в окрестности точки $z = 1$ с точностью до констант имеют вид

$$(1-z)^{a-1-c/2} \quad \text{и} \quad (1-z)^{a-1-c/2}(1-z)^{n+c-2a-1} = (1-z)^{n+c/2-a-2}$$

соответственно. В случае $n = 4$ условие (14) приводит к неравенствам

$$a - 1 - c/2 \geqslant 1, \tag{22}$$

$$0 \geqslant a - 1 - c/2, \tag{23}$$

которые не могут быть удовлетворены одновременно. Таким образом, для существования решений уравнения (13) с условиями (14) необходимо, чтобы одно из слагаемых в разложении (21) было равно нулю.

Исследуем равенство нулю второго слагаемого. Оно может иметь место, когда аргумент одной их гамма-функций $\Gamma(a)$, $\Gamma(a - c - 1)$ в знаменателе является отрицательным целым числом. Оба эти аргумента входят в решение (18) и в условие (22) симметрично, поэтому будем считать, что отрицательным целым числом является аргумент второй гамма-функции

$$a - c + 1 = -k, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{24}$$

Тогда из условия (22) следует, что

$$a \geqslant k + 5.$$

Условие $a-c+1 = -k$ означает, что гипергеометрический ряд $F(a, a-c+1, n; \frac{1}{z})$ из решения (18) обрывается на k-й степени, а значит функцию $\tilde{\alpha}$ можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(z-1) &= (1-z)^{a-1-c/2} z^{-a} F\Big(a, a-c+1, n; \frac{1}{z}\Big) \\ &= (1-z)^{(a-k-3)/2} z^{-a/2} \sum_{j=0}^{k} \frac{(a)_j(-k)_j}{(n)_j j!} \frac{1}{z^j}. \end{aligned} \tag{25}$$

Отметим, что, ввиду ограниченности суммы в правой части этого выражения для всех конечных z, при условии (24) нет необходимости в исследовании поведения $w_5(z)$ с помощью разложения (21). То есть неравенства (14) для $\tilde{\alpha}$ выполняются независимо от условия нецелочисленности величины $c - 2a$.

Для исследования возможности равенства нулю первого слагаемого в разложении (21) произведем замену

$$a = n - \tilde{a}, \quad c = 2 - \tilde{c}, \tag{26}$$

получим

$$w_5(z)\frac{\sin\pi(2\tilde a-n-\tilde c+1)}{\pi}=\frac{F(n-\tilde a,\tilde a-1,n-2\tilde a+\tilde c;1-z)}{\Gamma(\tilde a)\Gamma(\tilde a-\tilde c+1)}$$
$$-(z-1)^{2\tilde a-n-\tilde c+1}z^{n-\tilde a+\tilde c-1}\frac{F(\tilde a,\tilde a-n+1,2\tilde a-n-\tilde c+2;1-z)}{\Gamma(n-\tilde a)\Gamma(n-\tilde a+\tilde c-1)}.$$

Замена (26) переводит неравенство (23) в неравенство

$$\tilde a-1-\tilde c/2\geqslant 1,$$

то есть для равенства нулю первого слагаемого в (21) мы имеем такие же условия в терминах параметров $\tilde a$, $\tilde c$, как условия для равенства нулю второго слагаемого в терминах параметров a и c. Применяя преобразование Эйлера для замены параметров гипергеометрической функции

$$\begin{aligned}w_5(z)&=z^{-a}F\Big(a,a-c+1,n;\frac{1}{z}\Big)\\&=\Big(1-\frac{1}{z}\Big)^{n-2a+c-1}z^{-a}F\Big(n-a,n-a+c-1,n;\frac{1}{z}\Big)\\&=(1-z)^{2\tilde a-n-\tilde c+1}z^{-\tilde a+\tilde c-1}F\Big(\tilde a,\tilde a-\tilde c+1,n;\frac{1}{z}\Big),\end{aligned}$$

получаем для решения $\tilde\alpha(z-1)$ выражение

$$\begin{aligned}\tilde\alpha(z-1)&=z^{c/2}(1-z)^{a-1-c/2}w_5(z)\\&=(z-1)^{\tilde a-1-\tilde c/2}z^{-\tilde a+\tilde c/2}F\Big(\tilde a,\tilde a-\tilde c+1,n;\frac{1}{z}\Big),\end{aligned}$$

вид которого совпадает с видом решения (25), полученным из условия равенства нулю второго слагаемого в (21) в терминах a и c. Замена (26) также не меняет и вид параметризации (11), (12)

$$\chi=\frac{1}{16}(4a(a-n+1)-2c(2a-n))=\frac{1}{16}(4\tilde a(\tilde a-n+1)-2\tilde c(2\tilde a-n))$$
$$\xi=\frac{1}{16}c(c-2),=\frac{1}{16}\tilde c(\tilde c-2),$$

и, таким образом, можно сделать вывод, что выражение (25) перечисляет все возможные решения уравнения (13) с условиями (14).

§4. Свойства функций, параметризующих калибровочное поле

В предыдущей части с помощью параметризации (2), (9), мы построили оператор Фаддеева–Попова, зануляющий функции, определяемые выражениями (4), (7), (25). Оценка (20) показывает, что $\alpha(r)$ убывает на бесконечности как $O(r^{-2})$, а значит функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ интегрируема с квадратом на всем пространстве $\mathbb{R}^3$, то есть оператор Фаддеева–Попова имеет нетривиальное ядро как оператор, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3) \otimes su(2)$.

Подставим условие (24) в параметризацию (9) и получим для допустимых функций $f(r)$ следующее выражение

$$f(r) = \frac{2(k+1) - a(k+2)}{4(\varsigma r + 1)} + \frac{(a+k)^2 - 1}{16(\varsigma r + 1)^2}, \quad a \geqslant k+5, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Несложно показать, заменяя $a+k$ во втором слагаемом на новую переменную, что в данном выражении различным значениям пар чисел a и k соответствуют разные параметризующие функции $f(r)$. Также можно заметить, что в полученном выражении первое слагаемое всегда отрицательно, а второе всегда положительно. Поведение всей суммы при больших r определяется первым слагаемым, поэтому, начиная с некоторого расстояния от начала координат функция $f(r)$ всегда отрицательна. Поведение функции при малых r определяется сооотношением параметров a и k. В частности, среди множества комбинаций этих параметров существуют такие наборы, при которых $f(r)$ удовлетворяет условию

$$f(0) = 0,$$

так, что построенное по ней поле $A_l(\boldsymbol{x})$ оказываются регулярными в начале координат. Запишем это условие

$$f(0) = \frac{1}{4}(2(k+1) - a(k+2)) + \frac{1}{16}((a+k)^2 - 1) = 0$$

и получим для параметра a квадратное уравнение

$$a^2 - 2(k+4)a + k^2 + 8k + 7 = 0.$$

Решение этого уравнения, с учетом условия $a \geqslant k+5$, выглядит следующим образом

$$a = k + 7,$$

при этом

$$f(r) = -\frac{k^2 - 7k + 12}{4(\varsigma r + 1)} + \frac{(2k+7)^2 - 1}{16(\varsigma r + 1)^2}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Отметим, что структура нулей оператора Фаддеева–Попова в виде последовательности функций характерна для границ регионов Грибова [4].

При построении функций $f(r)$ использовалось уравнение (8), которое, изходя из поведения $f(r)$, изначально имело две фиксированные особые точки $r = 0$ и $r = \infty$. Мы намеренно ограничивали множество допустимых функций $f(r)$ таким образом, чтобы уравнение (8) оставалось регулярным и приобретало только одну новую особую точку $r = -\varsigma^{-1}$. Свобода выбора этой точки покрывается инвариантностью уравнения (5) относительно масштабного преобразования

$$A_l(\boldsymbol{x}) \to \frac{1}{\rho} A_l(\rho \boldsymbol{x}), \qquad f(r) \to f(\rho r),$$
$$\varphi(\boldsymbol{x}) \to \varphi(\rho \boldsymbol{x}), \qquad \alpha(r) \to \alpha(\rho r),$$

то есть, если пара $f(r)$, $\alpha(r)$ удовлетворяет уравнению (5), то пара $f(\rho r)$, $\alpha(\rho r)$ обладает этим же свойством, но при этом особая точка в уравнении для $\alpha(\rho r)$ сдвигается из точки $-\varsigma^{-1}$ в точку $-(\rho\varsigma)^{-1}$.

Заключение

В работе была построена серия SU(2) калибровочных полей $A_l(\boldsymbol{x})$, порождающих нули соответвтсвующих им операторов Фаддеева–Попова. Для построения была использована параметризация с помощью простых рациональных функций расстояния r до начала координат. Полученные в результате калибровочные поля в общем случае имеют сингулярность в начале координат и характеризуются двумя параметрами: целым положительным и вещественным неотрицательными числами.

Список литературы

1. В. Н. Попов, Л. Д. Фаддеев, *Теория возмущений для калибровочно-инвариантных полей.* — Препринт ИТФ-67-036, Киев, 1967.
2. J. Schwinger, *Non-Abelian gauge fields. Relativistic invariance.* — Phys. Rev., **127** (1962) 324–330.
3. N. H. Christ, T. D. Lee, *Operator ordering and Feynman rules in Gauge theories.* — Phys. Rev. D, **22** (1980), 970–972.

4. V. N. Gribov, *Quantization of non-Abelian gauge theories.* — Nucl. Phys. B, **139** (1978), 1–19.
5. F. Henyey, *Gribov ambiguity without topological charge.* — Phys. Rev. D, **20** (1979), 1460.
6. A. Ilderton, M. Lavelle, D. McMullan, *Colour, copies and confinement.* — JHEP 0703, (2007) 044, [hep-th/0701168].
7. R. R. Landim, L. C. Q. Vilar, O. S. Ventura, V. E. R. Lemes, *On the zero modes of the Faddeev-Popov operator in the Landau gauge.* — J. Math. Phys., **55** (2014), 022901.
8. Р. Д. Рихтмайер, *Принципы современной математической физики*, т. 1, М. Мир (1982).
9. Ф. Олвер, *Асимптотика и специальные функции*, М. Наука (1990).
10. E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Dover Books on Mathematics (1976), 374–401.
11. A. B. Olde Daalhuis, *Hypergeometric function.* — In: F. W. J. Olver, D. M. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark (eds.), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press.

Bolokhov T. A. Examples of zero modes of the Faddeev–Popov operator for the $SU(2)$ gauge field.

We construct zeros of the Faddeev–Popov operator for the SU(2) gauge field in the Coulomb gauge parametrized by expressions with a simple interaction of components of spacial and internal symmetries. The radial component of the gauge field is taken in the form of rational expression with negative poles of the first and the second order.

Ст.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: timur@pdmi.ras.ru

Поступило 1 июня 2023 г.