Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 519, 2022 г.

В. Е. Федоров, Л. В. Борель, Н. Д. Иванова

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

§1. Введение

В последние десятилетия дробное интегро-дифференциальное исчисление все активнее используется в задачах математического моделирования различных реальных процессов в физике, химии, биологии, экономических и гуманитарных науках и др. (см, например, [1–4]). В то же время обратные задачи, как известно, возникают при решении многих прикладных проблем [5–9]. Линейные обратные задачи для уравнений с дробными производными исследовались в работах многих авторов, см. работы [10–21] и библиографию в них. В данной работе исследуется класс нелинейных обратных задач для квазилинейных уравнений с производными Римана–Лиувилля

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + G(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t), u(t)), \quad t \in (0, T], \tag{1}$$

$$D^{\alpha-m+k}x(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t), \quad t \in (0, T]. \tag{3}$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $D^{\beta}x(t)$ – дробные производные Римана–Лиувилля при $\beta \geqslant 0$ и дробные интегралы Римана–Лиувилля при $\beta < 0$. Неизвестными функциями являются $x(t)$ и $u(t)$, (3) – условие переопределения. Линейный замкнутый плотно определенный в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ оператор A принадлежит классу операторов $\mathcal{A}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$, порождающих аналитические в

Ключевые слова: дробная производная Римана–Лиувилля, дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, задача типа Коши, обратная задача, существование и единственность решения, начально-краевая задача.

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, проект НШ-2708.2022.1.1.

секторе разрешающие семейства уравнения $D^\alpha x(t) = Ax(t)$, нелинейное отображение $G : [0,T] \times \mathfrak{X}^n \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ удовлетворяет набору некоторых специальных условий, $\Phi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{U}$ – линейный ограниченный оператор.

Класс операторов $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ введен в рассмотрение в работе [22] при изучении линейных уравнений методами теории аналитических разрешающих семейств операторов. Однозначная разрешимость задачи типа Коши (2) (в данном контексте – так называемой прямой задачи) для линейного неоднородного уравнения (1) (при $G = f(t)$) исследована в [23] в случае непрерывной в норме графика оператора A функции $f(t)$ и в [24] для гельдеровой функции $f(t)$. Задача типа Коши для линейных и нелинейных уравнений вида (1) с несколькими производными и интегралами Римана–Лиувилля исследовалась в работах [25–28]. Линейные обратные задачи для уравнения (1) с $G = B(t)u$, где неизвестный элемент u не зависит от t, исследовались в [16] в случае $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ и в [12] в случае линейного ограниченного оператора A.

В данной работе нелинейная обратная задача (1)–(3) исследуется с использованием подхода, предложенного в монографии [6] при изучении вопросов локального существования и единственности обобщенного и гладкого решений аналогичной задачи при $\alpha = 1$, $G = G(t, x(t), u(t))$ методом сжимающих отображений. Тем самым исследованы вопросы разрешимости для широкого класса нелинейных обратных задач для уравнений с неограниченными операторами в банаховых пространствах, включающих в себя в качестве частных случаев многие обратные задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных.

Второй параграф содержит результаты работ [23,24] об однозначной разрешимости задачи типа Коши для линейного неодродного уравнения (1). Третий параграф состоит из двух частей. В первой получена теорема о локальном существовании единственного обобщенного решения, во втором показано, что при некоторых дополнительных условиях полученное обобщенное решение является гладким. В частности, дополнительно требуется непрерывность нелинейного отображения G в норме графика оператора A. Следствием из данного результата является утверждение о локальном существовании единственного гладкого решения исследуемой задачи в случае, когда оператор A ограничен. В четвертом параграфе продемонстрировано использование полученных абстрактных результатов на примере модельной начально-краевой задачи для нагруженного уравнения дробной диффузии с несколькими производными Римана–Лиувилля по времени и неизвестными коэффициентами, зависящими от времени.

§2. Задача типа Коши для линейного неоднородного уравнения

Пусть $\mathfrak{X}$ – банахово пространство, $\mathbb{R}_+ := \{c \in \mathbb{R} : c > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, для функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{X}$ интеграл Римана–Лиувилля имеет вид

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} h(s)ds, \quad J^0 h(t) := h(t), \quad t > 0,$$

а производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (m-1, m]$ есть $D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha} h(t)$. Здесь D^m – производная порядка $m \in \mathbb{N}$. По определению будем считать, что $D^\beta h(t) := J^{-\beta} h(t)$ при $\beta \leqslant 0$.

Для $h : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{X}$ преобразование Лапласа обозначим через $\mathfrak{L}[h]$. Имеет место равенство [22]

$$\mathfrak{L}[J^\alpha h](\lambda) = \lambda^{-\alpha} \mathfrak{L}[h](\lambda), \quad \mathfrak{L}[D^\alpha h](\lambda) = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[h](\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{\alpha-1-k} h(0) \lambda^k,$$

где $D^\beta h(0) := \lim\limits_{t\to 0+} D^\beta h(t)$.

Через $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ обозначим банахово пространство всех линейных ограниченных операторов A в пространстве $\mathfrak{X}$, а через $\mathcal{C}l(\mathfrak{X})$ – множество всех линейных замкнутых операторов в пространстве $\mathfrak{X}$ с плотной областью определения D_A, снабженной нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} := \|\cdot\|_{\mathfrak{X}} + \|A\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ оператора A. Будем использовать также обозначения $R_\mu(A) := (\mu I - A)^{-1}$, $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$, $S_{\theta_0,a_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a_0)| < \theta_0,\ \lambda \neq a_0\}$, $\Sigma_\varphi := \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg\tau| < \varphi,\ \tau \neq 0\}$.

При $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$ определим класс $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ операторов $A \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X})$, для которых выполняются следующие условия:

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ имеем $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : R_\mu(A) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})\}$;

(ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что

$$\forall \lambda \in S_{\theta,a} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leqslant \frac{K(\theta,a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Замечание 1. В [22] показано, что $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда существует аналитическое в секторе $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$ экспоненциально ограниченное разрешающее семейство операторов линейного однородного уравнения ${}^C D^\alpha x(t) = Ax(t)$, где ${}^C D^\alpha x$ – дробная производная Герасимова–Капуто.

Лемма 1. [23]. *Пусть* $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$X_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + re^{\pm i\theta}, \, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi}, \, \varphi \in [-\theta, \theta]\}$ *при некоторых* $\delta > 0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. *Тогда отображение* X_β *допускает аналитическое продолжение в сектор* $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$ *и при любых* $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ *найдется такое* $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, *что для всех* $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$

$$\|X_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leqslant C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re}t}(|t|^{-1} + a)^\beta, \quad \beta \geqslant 0,$$

$$\|X_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leqslant C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re}t}|t|^{-\beta}, \quad \beta < 0.$$

Замечание 2. Поскольку $X_\beta(t)$ определяется как интеграл от резольвенты замкнутого оператора A, то операторы $X_\beta(t)$ коммутируют с A при любых $\beta \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Замечание 3. Из леммы 1 следует, что $\lim\limits_{t\to 0+} X_\beta(t) = 0$ при $\beta < 0$, поэтому соответствующие отображения X_β непрерывны в норме $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Отметим также тот факт, что при любом $y \in \mathfrak{X}$ $\lim\limits_{t\to 0+} X_0(t)y = y$, следовательно, $X_0(t)y \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{X})$.

Пусть $T > 0$, при заданной функции $f : [0, T] \to \mathfrak{X}$ рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in (0, T]. \tag{4}$$

Функция $x \in C((0, T]; D_A)$, для которой $J^{m-\alpha}x \in C^{m-1}([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C^m((0, T]; \mathfrak{X})$, называется решением задачи типа Коши

$$D^{\alpha-m+k}x(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{5}$$

для уравнения (4), если выполняются условия (5) и при всех $t \in (0, T]$ справедливо равенство (4).

Функция $f \in C([0,T];\mathfrak{X})$ называется гельдеровой с показателем $\gamma \in (0,1]$, если существует такое $C > 0$, что при всех $t,s \in [0,T]$ выполняется неравенство $\|f(t)-f(s)\|_{\mathfrak{X}} \leqslant C|t-s|^{\gamma}$. При этом используется обозначение $f \in C^{\gamma}([0,T];\mathfrak{X})$.

Теорема 1. [23, 24]. *Пусть* $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $f\in C([0,T];D_A)\cup C^{\gamma}([0,T];\mathfrak{X})$, $\gamma\in(0,1]$. *Тогда при любых* $x_0,x_1,\dots,x_{m-1}\in D_A$ *функция*

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m-1}X_{m-\alpha-k}(t)x_k+\int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds \tag{6}$$

является единственным решением задачи (4), (5).

Замечание 4. В условиях теоремы 1 $X_{m-\alpha-k}(t)x_k$ – единственное решение задачи типа Коши $D^{\alpha-m+j}x(0)=0$, $j\in\{0,1,\dots,m-1\}\setminus\{k\}$, $D^{\alpha-m+k}x(0)=x_k$ для однородного уравнения $D^\alpha x(t)=Ax(t)$. Интеграл из правой части равенства (6) является единственным решением задачи $D^{\alpha-m+j}x(0)=0$, $j=0,1,\dots,m-1$, для неоднородного уравнения (4).

Замечание 5. Очевидно, что

$$J^kX_{m-\alpha}(t)=X_{m-\alpha-k}(t),\quad k=0,1,\dots,m-1,$$

поэтому в теореме 1 решение может быть выражено только через оператор-функцию $X_{m-\alpha}$:

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m-1}J^kX_{m-\alpha}(t)x_k+\int_0^t J^{m-1}X_{m-\alpha}(t-s)f(s)ds.$$

§3. Нелинейная обратная задача

3.1. Обобщенное решение. Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n\leqslant m-1<\alpha\leqslant m$, $m_j<\alpha_j\leqslant m_j\in\mathbb{Z}$. Некоторые из чисел α_j могут быть отрицательными, им в рассматриваемом уравнении будут соответствовать дробные интегралы Римана–Лиувилля $D^{\alpha_j}x(t):=J^{-\alpha_j}x(t)$.

Обозначим $\overline{\alpha}:=\max\{\alpha_j:\alpha_j-m_j>\alpha-m\}$, $\overline{m}:=\lceil\overline{\alpha}\rceil$ – наименьшее целое число, не превосходимое числом $\overline{\alpha}$ (или $\overline{m}:=-1$, если $\{\alpha_j:\alpha_j-m_j>\alpha-m\}=\emptyset$), $\underline{\alpha}:=\max\{\alpha_j:\alpha_j-m_j<\alpha-m\}$, $\underline{m}:=\lceil\underline{\alpha}\rceil$ (или $\underline{m}:=0$, если $\{\alpha_j:\alpha_j-m_j<\alpha-m\}=\emptyset$), $m^*:=\max\{\overline{m},\underline{m}-1\}$ –

дефект задачи типа Коши для уравнения с несколькими производными Римана–Лиувилля (см. [26]), $m^{**} := \max\{m^* + 1, 0\}$.

Будем использовать также обозначение $j_0 := \max\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \alpha_j - m_j = \alpha - m\}$. Если множество $\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \alpha_j - m_j = \alpha - m\}$ пусто, обозначим $m_{j_0} := -1$.

Рассмотрим задачу

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + G(t, D^{\alpha_1} x(t), D^{\alpha_2} x(t), \ldots, D^{\alpha_n} x(t), u(t)), \quad t \in (0, T], \tag{7}$$

$$D^{\alpha - m + k} x(0) = x_k, \quad k = m^{**}, m^{**} + 1, \ldots, m - 1, \tag{8}$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t), \quad t \in (0, T], \tag{9}$$

которая состоит в нахождении функций $x : (0, T] \to \mathfrak{X}$, $u : [0, T] \to \mathfrak{U}$ из соотношений (7)–(9). Здесь $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ – некоторые банаховы пространства, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$, $G : [0, T] \times \mathfrak{X}^n \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{X}$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{U})$, $\Psi : [0, T] \to \mathfrak{U}$.

Замечание 6. В работе [26] показано, что для существования решения задачи типа Коши для уравнения с несколькими дробными производными Римана–Лиувилля необходимо считать все начальные данные x_k при $k = 0, 1, \ldots, m^* - 1$ равными нулю. Поэтому имеет смысл рассматривать только неполную задачу типа Коши $D^{\alpha - m + k} x(0) = x_k$, $k = m^*, m^* + 1, \ldots, m - 1$. В данном случае для существования конечного предела при $t \to 0+$ аргументов нелинейного отображения G, производных $D^{\alpha_j} x(t)$ необходимо рассматривать случай $x_{m^*} = 0$. Поэтому индекс k в начальных условиях типа Коши (8) начинается со значения $m^{**} = m^* + 1$ (если не оказалось, что $m^* + 1 < 0$).

Замечание 7. Если $\alpha_n \in (\alpha - 1, m - 1]$, то $m^* = m - 1$, $m^{**} = m$ и начальные условия (8) в рассматриваемой задаче отсутствуют.

Пара функций $(x, u) \in C((0, T]; \mathfrak{X}) \times C([0, T]; \mathfrak{U})$, для которых выполняются включения $D^{\alpha_j} x \in C([0, T]; \mathfrak{X})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и при всех $t \in (0, T]$ справедливы равенства (9) и

$$x(t) = \sum_{k=m^{**}}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t) x_k + \int_0^t X_{1-\alpha}(t - s) G(s, D^{\alpha_1} x(s), \ldots, D^{\alpha_n} x(s), u(s)) ds, \tag{10}$$

называется обобщенным решением задачи (7)–(9) на отрезке $[0,T]$.

Замечание 8. Основанием для такого определения обобщенного решения служит вид решения из теоремы 1. В англоязычной литературе решения такого типа называются mild solution.

Введем обозначения

$$\widetilde{x}(t)=\frac{t^{\alpha-m+m^{**}}x_{m^{**}}}{\Gamma(\alpha-m+m^{**}+1)}+\frac{t^{\alpha-m+m^{**}+1}x_{m^{**}+1}}{\Gamma(\alpha-m+m^{**}+2)}+\dots+\frac{t^{\alpha-1}x_{m-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

$\widetilde{x}_j=D^{\alpha_j}\widetilde{x}(0)$, $j=1,2,\dots,n$. В силу свойств дефекта m^* задачи типа Коши [26] $\widetilde{x}_j=x_{\alpha_j-\alpha+m}$ при $\alpha_j\in\{\alpha-m+m^{**},\alpha-m+m^{**}+1,\dots,\alpha-1\}$, в противном случае $\widetilde{x}_j=0$. Будем использовать также обозначение $\overline{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$.

Сформулируем следующие условия $(\mathcal{A})$–$(\mathcal{F})$.

$(\mathcal{A})$ Отображение $G:[0,T]\times\mathfrak{X}^n\times\mathfrak{U}\to\mathfrak{X}$ представимо в виде

$$G(t,\overline{y},u)=G_1(t,\overline{y})+G_2(t,\overline{y},u),\quad (t,\overline{y},u)\in[0,T]\times\mathfrak{X}^n\times\mathfrak{U}.$$

При $\overline{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathfrak{X}^n$, $R,T>0$ обозначим

$$S_{\mathfrak{X}^n}(\overline{a},R):=\{\overline{y}\in\mathfrak{X}^n:\ \|y_j-a_j\|_{\mathfrak{X}}<R,\ j=1,2,\dots,n\},$$

$$S_{\mathfrak{X}^n}(\overline{a},R,T):=[0,T]\times S_{\mathfrak{X}^n}(\overline{a},R).$$

Для достаточно гладкой функции Ψ определим

$$y_0:=D^\alpha\Psi(0)-\Phi G_1(0,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\dots,\widetilde{x}_n).$$

$(\mathcal{B})$ Уравнение $\Phi G_2(0,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\dots,\widetilde{x}_n,u)=y_0$ относительно u имеет единственное в $\mathfrak{U}$ решение $u_0\in\mathfrak{U}$.

$(\mathcal{C})$ Существует такое отображение $G_3:[0,T]\times\mathfrak{U}^{n+1}\to\mathfrak{U}$, что

$$\Phi G_2(t,\overline{y},u)=G_3(t,\Phi y_1,\Phi y_2,\dots,\Phi y_n,u).$$

Замечание 9. Такое условие может выполняться, например, если отображение G_2 линейно по $\overline{y}$ или если оно изначально зависит от $\Phi y_1,\Phi y_2,\dots,\Phi y_n$.

$(\mathcal{D})$ Существует такое $R>0$, что при всех $t\in[0,T]$ отображение $z=G_3(t,D^{\alpha_1}\Psi(t),D^{\alpha_2}\Psi(t),\dots,D^{\alpha_n}\Psi(t),u)$ как функция от u в шаре $S_{\mathfrak{U}}(u_0,R)$ имеет обратное отображение $u=F(t,z)$.

$(\mathcal{E})$ Существует такое $R>0$, что отображение F непрерывно по совокупности переменных (t,z) на множестве $S_{\mathfrak{U}}(u_0,R,T)$ и удовлетворяет условию Липшица по z.

($\mathcal{F}$) Существует такое $R > 0$, что отображения $G_1(t, \overline{y})$ и $G_2(t, \overline{y}, u)$ непрерывны по совокупности переменных

$$S_{\mathfrak{X}^n \times \mathfrak{U}}((\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_n, u_0), R, T)$$

и удовлетворяют условию Липшица по $(\overline{y}, u)$.

Лемма 2. *Пусть* $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\Phi, \overline{\Phi A} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{U})$, $x_k \in \mathfrak{X}$,

$$f_k(t) := \Phi X_{m-\alpha-k}(t) x_k, \quad k = m^{**}, m^{**}+1, \dots, m-1.$$

Тогда

$$D^\alpha f_k(t) = \overline{\Phi A} X_{m-\alpha-k}(t) x_k \in C((0, T]; \mathfrak{U}),$$

$k = m^{**}, m^{**}+1, \dots, m-1$.

Доказательство. При фиксированном $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ положим

$$y_k := R_\lambda(A) x_k \in D_A, \quad k = m^{**}, m^{**}+1, \dots, m-1.$$

Тогда в силу замечания 4 $D^\alpha X_{m-\alpha-k}(t) y_k = A X_{m-\alpha-k}(t) y_k$ и согласно замечанию 2

$$f_k(t) = \Phi X_{m-\alpha-k}(t)(\lambda I - A) y_k = \lambda \Phi X_{m-\alpha-k}(t) y_k - \Phi A X_{m-\alpha-k}(t) y_k,$$

$$\begin{aligned} D^\alpha f_k(t) &= \lambda \Phi D^\alpha X_{m-\alpha-k}(t) y_k - \overline{\Phi A} D^\alpha X_{m-\alpha-k}(t) y_k \\ &= \lambda \overline{\Phi A} X_{m-\alpha-k}(t) y_k - \overline{\Phi A} X_{m-\alpha-k}(t) A y_k \\ &= \overline{\Phi A} X_{m-\alpha-k}(t) x_k \in C((0, T]; \mathfrak{U}). \end{aligned} \qquad \square$$

Лемма 3. *Пусть* $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\Phi, \overline{\Phi A} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{U})$, $f \in C([0, T]; \mathfrak{X})$,

$$g(t) := \Phi \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s) f(s) ds.$$

Тогда

$$D^\alpha g(t) = \overline{\Phi A} \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s) f(s) ds + \Phi f(t) \in C([0, T]; \mathfrak{U}).$$

Доказательство. При $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ положим $h(t) := R_\lambda(A)f(t) \in D_A$, $t \in [0,T]$. Тогда $Ah(t) = \lambda R_\lambda(A)f(t) - f(t) \in C([0,T];\mathfrak{X})$, поэтому $h \in C([0,T];D_A)$. Согласно замечанию 2

$$g(t) = \Phi \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)(\lambda I - A)h(s)ds = (\lambda\Phi - \Phi A)\int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)h(s)ds,$$

поэтому в силу замечания 4

$$\begin{aligned} D^\alpha g(t) &= (\lambda\Phi - \overline{\Phi A})D^\alpha \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)h(s)ds \\ &= (\lambda\Phi - \overline{\Phi A})\left(A\int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)h(s)ds + h(t)\right) \\ &= \overline{\Phi A}\left(\lambda\int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)h(s)ds - A\int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)h(s)ds\right) + (\lambda\Phi - \overline{\Phi A})h(t) \\ &= \overline{\Phi A}\int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds + \Phi f(t). \end{aligned}$$

При этом использовано равенство $\overline{\Phi A}h(t) = \Phi Ah(t)$, справедливое в силу включений $h(t) \in D_A$, $t \in [0,T]$. □

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1,2,\dots,n$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $x_k \in D_A$, $k = m^{**}, m^{**}+1,\dots,m_{j_0}$, $x_j \in \mathfrak{X}$, $j = m_{j_0}+1, m_{j_0}+2,\dots,m-1$; $m^* \geqslant 0$ *или* $x_0 = 0$; $\Phi, \overline{\Phi A} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{U})$, $\Psi, D^\alpha\Psi \in C([0,T];\mathfrak{U})$, $\Psi(0) = 0$, *выполняются условия* $(\mathcal{A})$–$(\mathcal{F})$. *Тогда при некотором* $T_1 \in (0,T]$ *существует единственное обобщенное решение* $(x,u) \in C([0,T_1];\mathfrak{X}) \times C([0,T_1];\mathfrak{U})$ *задачи* (7)–(9) *на отрезке* $[0,T_1]$.

Доказательство. Для $\alpha_j < \alpha - m$ имеем в силу замечания 3

$$D^{\alpha_j}X_{m-\alpha-k}(t) = X_{m-\alpha-k+\alpha_j}(t) \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{X})),$$

так как $m - \alpha - k + \alpha_j \leqslant m - \alpha + \alpha_j < 0$.

Рассмотрим случай $\alpha_j \geqslant \alpha - m$. При таких $k \in \{m^{**}, m^{**}+1, \dots, m-1\}$, что $\alpha_j < \alpha - m + k$ имеем

$$D^{\alpha_j} X_{m-\alpha-k}(t) = X_{m-\alpha-k+\alpha_j}(t) \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{X}))$$

аналогично. Пусть $\alpha_j \geqslant \alpha - m + k$, тогда при $\alpha_j - m_j < \alpha - m$ имеем $\alpha_j < \alpha - m + m_j \leqslant \alpha - m + m^* + 1 \leqslant \alpha - m + m^{**}$, противоречие. В случае $\alpha_j - m_j > \alpha - m$ получаем $k \leqslant m - \alpha + \alpha_j \leqslant m - \alpha + m^* \leqslant m - \alpha + m^{**} - 1 < m^{**}$, противоречие.

Если же $\alpha_j \geqslant \alpha - m + k$, $\alpha_j - m_j = \alpha - m$, то при $x_k \in D_A$ имеем

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}[D^{\alpha_j} X_{m-\alpha-k}(t)x_k](\lambda) = \lambda^{m-1-k+\alpha_j} R_{\lambda^\alpha}(A)x_k - \lambda^{m_j-k-1}x_k \\ &= \lambda^{m_j-k-1+\alpha} R_{\lambda^\alpha}(A)x_k - \lambda^{m_j-k-1}x_k = \lambda^{m_j-k-1} R_{\lambda^\alpha}(A)Ax_k.\end{aligned}$$

Действием обратного преобразования Лапласа получим

$$D^{\alpha_j} X_{m-\alpha-k}(t)x_k = X_{m_j-k-\alpha}(t)Ax_k \in C([0,T];\mathfrak{X})$$

согласно замечанию 3, так как $m_j - k - \alpha \leqslant m - 1 - k - \alpha < 0$.

В силу свойств оператора свертки при $\alpha_j \leqslant m-1$, $f \in C([0,T];\mathfrak{X})$

$$\begin{aligned}&D^{\alpha_j} \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds = D^{m_j} \int_0^t J^{m_j-\alpha_j} X_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds \\ &= D^{m_j} \int_0^t X_{1-\alpha+\alpha_j-m_j}(t-s)f(s)ds = \int_0^t X_{1-\alpha+\alpha_j}(t-s)f(s)ds,\end{aligned}$$

так как $1 - \alpha + \alpha_j - m_j + k \leqslant \alpha_j - \alpha < 0$ при $k = 0, 1, \dots, m_j - 1$. Поэтому из равенства (10) следует, что для $j = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}D^{\alpha_j} x(t) = &\sum_{k=m^{**}}^{m-1} D^{\alpha_j} X_{m-\alpha-k}(t)x_k \\ &+ \int_0^t X_{1-\alpha+\alpha_j}(t-s)G(s, D^{\alpha_1}x(s), \dots, D^{\alpha_n}x(s), u(s))ds\end{aligned} \tag{11}$$

при условии непрерывности на $[0,T]$ функций $D^{\alpha_1}x, D^{\alpha_2}x, \dots, D^{\alpha_n}x, u$.

Если (x,u) – обобщенное решение задачи (7)–(9), подставим правую часть равенства (10) в (9) и получим равенство при $t \in (0,T]$

$$\sum_{k=m^{**}}^{m-1} \Phi X_{m-\alpha-k}(t)x_k$$
$$+ \Phi \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)G(s, D^{\alpha_1}x(s), \dots, D^{\alpha_n}x(s), u(s))ds = \Psi(t).$$

Возьмем производную Римана–Лиувилля порядка α от обеих частей этого равенства, тогда в силу лемм 2 и 3 при $t \in (0, T]$

$$D^\alpha \sum_{k=m^{**}}^{m-1} \Phi X_{m-\alpha-k}(t)x_k +$$
$$+ D^\alpha \Phi \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)G(s, D^{\alpha_1}x(s), D^{\alpha_2}x(s), \dots, D^{\alpha_n}x(s), u(s))ds$$
$$= \overline{\Phi A} \sum_{k=m^{**}}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t)x_k + \Phi G(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t), u(t))$$
$$+ \overline{\Phi A} \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)G(s, D^{\alpha_1}x(s), \dots, D^{\alpha_n}x(s), u(s))ds = D^\alpha \Psi(t).$$

Учитывая условия $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$ и непрерывность оператора Φ, перепишем последнее равенство в виде

$$D^\alpha \Psi(t) - \overline{\Phi A} \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)G(s, D^{\alpha_1}x(s), D^{\alpha_2}x(s), \dots, D^{\alpha_n}x(s), u(s))ds$$
$$- \overline{\Phi A} \sum_{k=m^{**}}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t)x_k - \Phi G_1(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t))$$
$$= \Phi G_2(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), \dots, D^{\alpha_n}x(t), u(t))$$
$$= G_3(t, \Phi D^{\alpha_1}x(t), \Phi D^{\alpha_2}x(t), \dots, \Phi D^{\alpha_n}x(t), u(t))$$
$$= G_3(t, D^{\alpha_1}\Psi(t), D^{\alpha_2}\Psi(t), \dots, D^{\alpha_n}\Psi(t), u(t)). \quad (12)$$

Это уравнение с помощью условия $(\mathcal{D})$ может быть записано как

$$u(t) = F(t, z(t)), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}z(t) = D^\alpha\Psi(t)\\ &- \overline{\Phi A}\int\limits_0^t X_{1-\alpha}(t-s)G(s,D^{\alpha_1}x(s),D^{\alpha_2}x(s),\ldots,D^{\alpha_n}x(s),u(s))ds\\ &- \overline{\Phi A}\sum_{k=m^{**}}^{m-1}X_{m-\alpha-k}(t)x_k - \Phi G_1(t,D^{\alpha_1}x(t),D^{\alpha_2}x(t),\ldots,D^{\alpha_n}x(t)).\end{aligned}$$

Тогда система, состоящая из уравнений (11) при $j = 1, 2, \ldots, n$ и (13), является системой относительно неизвестных функций $y_1 := D^{\alpha_1}x$, $\ldots$, $y_n := D^{\alpha_n}x$, u.

При $m^* \geqslant 0$ (или при $x_0 = 0$) имеем $k \geqslant m^{**} \geqslant 1$, $m-\alpha-k \leqslant m-\alpha-1 < 0$ и функции $X_{m-\alpha-k}(t)$ стремятся к нулю при $t \to 0+$ согласно замечанию 3. В силу леммы 1 при некотором $C > 0$ для всех t из правой окрестности нуля в $\mathbb{R}_+$ выполняется неравенство $\|X_{1-\alpha}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leqslant Ct^{\alpha-1}$, а поэтому с учетом условия $(\mathcal{F})$

$$\left\|\int\limits_0^t X_{1-\alpha}(t-s)G(s,D^{\alpha_1}x(s),D^{\alpha_2}x(s),\ldots,D^{\alpha_n}x(s),u(s))ds\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leqslant C_1t^\alpha \to 0$$

при $t \to 0+$. Теперь устремим в первом равенстве в (12) $t \to 0+$ и получим уравнение

$$y_0 := D^\alpha\Psi(0) - \Phi G_1(0,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\ldots,\widetilde{x}_n) = \Phi G_2(0,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\ldots,\widetilde{x}_n,u).$$

По условию $(\mathcal{B})$ оно имеет единственное в $\mathfrak{U}$ решение u_0.

Определим метрическое пространство

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_T := \big\{(\overline{y},u) \in C([0,T];\mathcal{X}^n\times\mathfrak{U}) : \|y_j(t)-\widetilde{x}_j\|_{\mathfrak{X}} \leqslant R,\\ j = 1,2,\ldots,n, \|u(t)-u_0\|_{\mathfrak{U}} \leqslant R\big\}\end{aligned}$$

с нормой пространства $C([0,T];\mathcal{X}^n\times\mathfrak{U})$ от разности пары двух элементов из $\mathfrak{M}_T$ в качестве метрики на такой паре. Тогда $\mathfrak{M}_T$ является полным метрическим пространством. Зададим векторное отображение

$H = (H^1, H^2, \dots, H^{n+1})$: при $j = 1, 2, \dots, n$

$$H^j(y_1, y_2 \dots, y_n, u) = \sum_{k=m^{**}}^{m-1} D^{\alpha_j} X_{m-\alpha-k}(t) x_k$$
$$+ \int_0^t X_{1-\alpha+\alpha_j}(t-s) G(s, y_1(s), \dots, y_n(s), u(s)) ds,$$
$$H^{n+1}(y_1, y_2, \dots, y_n, u) = F\Bigg(t, D^\alpha \Psi(t) - \overline{\Phi A} \sum_{k=m^{**}}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t) x_k$$
$$- \Phi G_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$$
$$- \int_0^t \overline{\Phi A} X_{1-\alpha}(t-s) G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_n(s), u(s)) ds \Bigg).$$

Теперь задача (7)–(9) редуцирована к нелинейной системе уравнений

$$\begin{aligned} y_1(t) &= H^1(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), u(t)), \\ y_2(t) &= H^2(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), u(t)), \\ &\dots, \\ y_n(t) &= H^n(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), u(t)), \\ u(t) &= H^{n+1}(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), u(t)). \end{aligned}$$

При $j = 1, 2, \dots, n$ имеем $H^j(y_1(0), y_2(0), \dots, y_n(0), u(0)) = y_j(0) = \widetilde{x}_j$, при этом $H^{n+1}(y_1(0), y_2(0), \dots, y_n(0), u(0)) = F(0, z(0)) = F(0, y_0) = u_0$. В условиях данной теоремы для $(y_1, y_2, \dots, y_n, u) \in \mathfrak{M}_T$ функция $H(y_1(t), \dots, y_n(t), u(t))$ непрерывна по t на $[0, T]$, следовательно, при достаточно малом T H отображает множество $\mathfrak{M}_T$ в него же.

Пусть $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, n$ $y_j^i(t) = H^j(y_1^i(t), y_2^i(t), \dots, y_n^i(t), u^i(t))$, $u^i(t) = H^{n+1}(y_1^i(t), y_2^i(t), \dots, y_n^i(t), u^i(t))$, тогда для $k = 1, 2, \dots, n$ в силу выполнения условия Липшица для отображений G и F (условия $(\mathcal{E})$ и $(\mathcal{F})$) выполняются неравенства

$$\|y_k^1(t) - y_k^2(t)\|_{\mathcal{X}}$$
$$\leqslant cT^{\alpha-\alpha_n} \left(\sum_{j=1}^n \sup_{s\in[0,T]} \|y_j^1(s) - y_j^2(s)\|_{\mathfrak{X}} + \sup_{s\in[0,T]} \|u^1(s) - u^2(s)\|_{\mathfrak{U}} \right),$$

$$\|u^1(t)-u^2(t)\|_{\mathfrak{U}} \leqslant c_1 \sum_{j=1}^{n} \sup_{s\in[0,T]} \|y_j^1(s)-y_j^2(s)\|_{\mathfrak{X}}$$

$$+ c_2 T^{\alpha} \left(\sum_{j=1}^{n} \sup_{s\in[0,T]} \|y_j^1(s)-y_j^2(s)\|_{\mathfrak{X}} + \sup_{s\in[0,T]} \|u^1(s)-u^2(s)\|_{\mathfrak{U}} \right)$$

$$\leqslant (ncc_1+c_3)T^{\alpha-\alpha_n} \left(\sum_{j=1}^{n} \sup_{s\in[0,T]} \|y_j^1(s)-y_j^2(s)\|_{\mathfrak{X}} + \sup_{s\in[0,T]} \|u^1(s)-u^2(s)\|_{\mathfrak{U}} \right).$$

Поэтому при достаточно малом $T>0$ отображение H является сжатием на $\mathfrak{M}_T$ и имеет в $\mathfrak{M}_T$ единственную неподвижную точку $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0, u^0)$.

При $\alpha_j \leqslant 0$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$

$$D^{-\alpha_j} y_j(t) = \sum_{k=m^{**}}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t)x_k$$

$$+ \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)G(s, y_1(s), \ldots, y_n(s), u(s))ds,$$

так как в этом случае $D^{-\alpha_j}D^{\alpha_j}h(t) = h(t)$. Тогда, например, при $\alpha_1 \leqslant 0$ пара $(x^0(t), u^0(t))$, где $x^0(t) := D^{-\alpha_1}y_1^0(t) \in C([0,T];\mathfrak{X})$, является обобщенным решением обратной задачи (7)–(9).

Если $\alpha_1 > 0$, то

$$D^{-\alpha_j}D^{\alpha_j}h(t) = h(t) - \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{t^{\alpha-m+k}D^{\alpha-m+k}h(0)}{\Gamma(\alpha-m+k+1)},$$

поэтому

$$D^{-\alpha_j} y_j(t) = \sum_{k=m^{**}}^{m_j-1} \left(X_{m-\alpha-k}(t) - \frac{t^{\alpha-m+k}}{\Gamma(\alpha-m+k+1)} \right) x_k$$

$$+ \sum_{k=m_j}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t)x_k + \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)G(s, y_1(s), \ldots, y_n(s), u(s))ds,$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь учитывается тот факт, что в силу замечания 4 при $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$D^{\alpha-m+k}|_{t=0} \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)G(s, y_1(s), \dots, y_n(s), u(s))ds = 0.$$

Обобщенным решением задачи (7)–(9) здесь является пара $(x^0(t), u^0(t))$, где

$$x^0(t) := D^{-\alpha_j} y_j^0(t) + \sum_{k=m^{**}}^{m_j-1} \frac{t^{\alpha-m+k} x_k}{\Gamma(\alpha - m + k + 1)}$$

при любом $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Если существует два обобщенных решения: (x^0, u^0) на $[0, T_0]$ и (x^1, u^1) на $[0, T_1]$, $T_1 < T_0$, то каждое из них соответствует некоторой неподвижной точке

$$(D^{\alpha_1} x^0, D^{\alpha_2} x^0, \dots, D^{\alpha_n} x^0, u^0) \ \text{ и } \ (D^{\alpha_1} x^1, D^{\alpha_2} x^1, \dots, D^{\alpha_n} x^1, u^1)$$

сжимающего отображения H на $\mathfrak{M}_{T_1}$. В силу единственности неподвижной точки $u^0(t) = u^1(t)$ при $t \in [0, T_1]$, $D^{\alpha_1}(x^0(t) - x^1(t)) = 0$. Подействуем производной $D^{-\alpha_1}$ на это равенство и получим $x^0(t) = x^1(t)$. Если $\alpha_1 > 0$, принимается во внимание совпадение начальных данных $x_{m^{**}}, x_{m^{**}+1}, \dots, x_{m-1}$ из условий (8) для двух решений одной и той же задачи. □

3.2. Гладкое решение. После доказательства теоремы 2 возникает вопрос о том, какие условия гарантируют для полученного обобщенного решения обратной задачи гладкость, соответствующую порядку уравнения (7). В данном параграфе мы дадим на него один из возможных ответов, усилив требования на пространственную гладкость отображения G и начальных данных x_k.

Пара функций $(x, u) \in C((0, T]; D_A) \times C([0, T]; \mathfrak{U})$, для которой

$$J^{m-\alpha} x \in C^{m-1}([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C^m((0, T]; \mathfrak{X}), \quad D^{\alpha_j} x \in C([0, T]; \mathfrak{X}),$$

$j = 1, 2, \dots, n$, выполняются равенства (7), (9) при $t \in (0, T]$ и (8), называется гладким решением задачи (7)–(9) на отрезке $[0, T]$.

Для доказательства существования гладкого решения обратной задачи заменим условие $(\mathcal{F})$ более сильным условием:

($\mathcal{F}_1$) Существует такое $R > 0$, что отображения $G_1(t, \overline{y})$ и $G_2(t, \overline{y}, u)$ удовлетворяют условию Липшица по $(\overline{y}, u)$ и непрерывны в норме графика оператора A по совокупности переменных на множестве $S_{\mathfrak{X}^n \times \mathfrak{U}}((\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_n, u_0), R, T)$.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $x_k \in D_A$, $k = m^{**}, m^{**}+1, \dots, m-1$; $m^* \geqslant 0$ *или* $x_0 = 0$; $\Phi, \overline{\Phi A} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{U})$, $\Psi \in C([0,T]; \mathfrak{U})$, $D^\alpha \Psi \in C([0,T]; \mathfrak{U})$, $\Psi(0) = 0$, *выполняются условия* ($\mathcal{A}$)–($\mathcal{E}$), ($\mathcal{F}_1$). *Тогда при некотором* $T_1 \in (0, T]$ *существует единственное гладкое решение* (x, u) *обратной задачи* (7)–(9) *на отрезке* $[0, T_1]$.

Доказательство. Поскольку выполнение условия ($\mathcal{F}_1$) влечет справедливость условия ($\mathcal{F}$), существует обобщенное решение

$$(x^0(t), u^0(t)) \in C((0, T_1]; \mathfrak{X}) \times C([0, T_1]; \mathfrak{U})$$

задачи (7)–(9) на некотором достаточно малом отрезке $[0, T_1]$, т. е. при $t \in (0, T_1]$

$$x^0(t) = \sum_{k=m^{**}}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t) x_k + \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s) G(s, D^{\alpha_1} x^0(s), \dots, D^{\alpha_n} x^0(s), u^0(s)) ds.$$

При этом $D^{\alpha_j} x^0(t) \in C([0,T]; \mathfrak{X})$, $j = 1, 2, \dots, n$.

В силу замечания 4 при $x_k \in D_A$

$$D^{\alpha-m+l} X_{m-\alpha-k}(t) x_k = X_{l-k}(t) x_k \in C([0,T]; \mathfrak{X}), \ l = 0, 1, \dots, m-1,$$
$$D^\alpha X_{m-\alpha-k}(t) x_k = A X_{m-\alpha-k}(t) x_k = X_{m-\alpha-k}(t) A x_k \in C([0,T]; \mathfrak{X}),$$

так как $k \geqslant 1$ при $m^* \geqslant 0$, т. е. при $m^{**} \geqslant 1$, или $x_0 = 0$ при $m^* < 0$.

Из условия ($\mathcal{F}_1$) следует, что $G(t, D^{\alpha_1} x^0(t), \dots, D^{\alpha_n} x^0(t), u^0(t)) \in C([0,T]; D_A)$, поэтому с учетом замечания 4

$$D^{\alpha-m+l} \int_0^t X_{1-\alpha}(t-s) G(s, D^{\alpha_1} x^0(s), D^{\alpha_2} x^0(s), \dots, D^{\alpha_n} x^0(s), u^0(s)) ds$$
$$= \int_0^t X_{1-m+l}(t-s) G(s, D^{\alpha_1} x^0(s), \dots, D^{\alpha_n} x^0(s), u^0(s)) ds,$$

$$l = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$D^\alpha \int\limits_0^t X_{1-\alpha}(t-s) G(s, D^{\alpha_1} x^0(s), D^{\alpha_2} x^0(s), \dots, D^{\alpha_n} x^0(s), u^0(s)) ds$$

$$= \int\limits_0^t X_{1-\alpha}(t-s) A G(s, D^{\alpha_1} x^0(s), D^{\alpha_2} x^0(s), \dots, D^{\alpha_n} x^0(s), u^0(s)) ds$$

$$+ G(t, D^{\alpha_1} x^0(t), D^{\alpha_2} x^0(t), \dots, D^{\alpha_n} x^0(t), u^0(t)) \in C([0,T]; \mathfrak{X}).$$

Таким образом, в условиях данной теоремы (x^0, u^0) – классическое решение обратной задачи (7)–(9). □

Поскольку любой ограниченный оператор принадлежит классу $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ (см. [23]) и в этом случае условие $(\mathcal{F}_1)$ совпадает с $(\mathcal{F})$, из доказанной теоремы сразу получаем следствие.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $x_k \in \mathfrak{X}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$; $m^* \geqslant 0$ *или* $x_0 = 0$; $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{U})$, $\Psi \in C([0,T]; \mathfrak{U})$, $D^\alpha \Psi \in C([0,T]; \mathfrak{U})$, $\Psi(0) = 0$, *выполняются условия* $(\mathcal{A})$–$(\mathcal{F})$. *Тогда при некотором* $T_1 \in (0, T]$ *существует единственное гладкое решение* (x, u) *обратной задачи* (7)–(9) *на отрезке* $[0, T_1]$.

§4. Приложение к обратной задаче для нагруженного уравнения

Рассмотрим начально-краевую задачу для нагруженного уравнения

$$\begin{gathered} D_t^\alpha w(\xi,t) = \nu \Delta w(\xi,t) + \sum_{l=1}^n v_l(t) f_l(\xi,t) H_l\left(\langle \eta_l(\cdot), D_t^{\alpha_l} w(\cdot,t)\rangle\right) + \\ + v_{n+1}(t) g(\xi,t) + h(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \end{gathered} \tag{14}$$

$$w(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{15}$$

$$D_t^{\alpha-m+k} w(\xi,0) = w_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = m^{**}, m^{**}+1, \dots, m-1, \tag{16}$$

содержащую неизвестные коэффициенты v_l, $l = 1, 2, \dots, n+1$, в уравнении и поэтому снабженную условиями переопределения

$$\langle \eta_l(\xi), w(\xi,t)\rangle = \psi_l(t), \quad t \in [0,T], \quad l = 1, 2, \dots, n+1, \tag{17}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, D_t^β – дробная производная

Римана–Лиувилля порядка $\beta \geqslant 0$ (или дробный интеграл Римана–Лиувилля при $\beta < 0$) по переменной t, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m$, $\nu > 0$, $\Delta = D^2_{\xi_1} + D^2_{\xi_2} + \cdots + D^2_{\xi_d}$ – оператор Лапласа, заданы функции $f_l, g, h : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $H_l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l = 1,2,\ldots,n$, $w_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k = m^{**}, m^{**}+1, \ldots, m-1$, $\eta_l : \Omega \to \mathbb{R}$, $\psi_l : [0,T] \to \mathbb{R}$, $l = 1,2,\ldots,n+1$. Функции $w : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $v_l : [0,T] \to \mathbb{R}$, $l = 1,2,\ldots,n+1$, неизвестны.

Положим

$$\mathfrak{X} = L_2(\Omega),\ A = \nu\Delta,\ D_A = H^2_0(\Omega) := \{z \in H^2(\Omega) : z(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}, \tag{18}$$

$$\mathfrak{U} = \mathbb{R}^{n+1},\ G : \mathbb{R} \times L_2(\Omega)^n \times \mathbb{R}^{n+1} \to L_2(\Omega),$$

$$G(t,\overline{y},\overline{u}) = \sum_{l=1}^{n} u_l f_l(\cdot,t) H_l(\langle \eta_l, y_l \rangle) + u_{n+1} g(\cdot,t) + h(\cdot,t), \tag{19}$$

$$\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n),\ \overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}).$$

Таким образом, $x(t) = w(\cdot,t) \in \mathfrak{X}$, $u(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{n+1}(t)) \in \mathfrak{U}$ при $t \in [0,T]$.

Следующие 2 леммы являются очевидными следствиями лемм 6 и 7 из работы [29].

Лемма 4. *Пусть* $\alpha > 1$,

$$\exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi)\ \exists a_1 \geqslant 0\ \forall \mu \in S_{\theta_1,a_1}\ \mu^\alpha \in \rho(A);$$

$$\exists C_1 > 0\ \forall \mu \in S_{\theta_1,a_1}\ \|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leqslant \frac{C_1}{|\mu^\alpha - a_1|}.$$

Тогда $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, $a_0 \geqslant a_1$, $a_0 > 1$.

Лемма 5. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$,

$$\exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi)\ \exists a_0 \in [0,1)\ \forall \mu \in S_{\theta_1,a_0}\ \mu^\alpha \in \rho(A);$$

$$\exists C_1 > 0\ \forall \mu \in S_{\theta_1,a_0}\ \|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leqslant \frac{C_1}{|\mu^\alpha - a_0|}.$$

Тогда $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ *при некотором* $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$.

Используя эти утверждения, получим следующий результат.

Лемма 6. *Пусть* $\alpha \in (0,2)$, $\nu > 0$, *пространство* $\mathfrak{X}$ *и оператор* A *определены в* (18). *Тогда* $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $a_0 \geqslant 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$.

Доказательство. Возьмем $\alpha \in [1,2)$, $\delta \in (0, \pi(1/\alpha - 1/2))$, $\theta_1 = \pi/2 + \delta$, $a_1 = 0$. Тогда $(\mu^\alpha I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$ для всех $\mu \in S_{\theta_1,0}$, так как $|\arg \mu^\alpha| \in [0,\pi)$ и спектр оператора A отрицательный. Следовательно, при $\mu \in S_{\theta_1,0}$, $x \in L_2(\Omega)$

$$\|(\mu^\alpha I - A)^{-1} x\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\langle x, \varphi\rangle|^2}{|\mu^\alpha - \nu\lambda_k|^2} \leqslant \frac{\|x\|^2_{L_2(\Omega)}}{\sin^2\theta_1 |\mu^\alpha|^2}.$$

При $\alpha = 1$ сразу получаем, что $A \in \mathcal{A}_1(\theta_1, 0)$, при $\alpha \in (1,2)$ по лемме 4 $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $a_0 > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi/2 + \delta)$.

В случае $\alpha \in (0,1)$ используется лемма 5 аналогичным образом. В этом случае мы можем взять $a_0 = 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$. $\square$

Поскольку мы будем рассматривать $\alpha \in (0,2)$, то $m = 1$ или $m = 2$. В случае $\alpha \in (0,1]$ имеем $m = 1$, $\alpha_n \leqslant m - 1 = 0$. При $m^* = 0$ имеем $m^{**} = 1$ и тогда начальное условие (16) отсутствует. Если же $m^* < 0$, то $m^{**} = 0$ и единственное начальное условие в силу условия $m^* \geqslant 0$ или $x_0 = 0$ имеет вид

$$D_t^{\alpha-1} w(\xi, 0) = 0, \quad \xi \in \Omega. \tag{20}$$

Для $\alpha \in (1,2)$ имеем $m = 2$, $\alpha_n \leqslant 1$, а m^{**} может принимать значения 0, 1 и 2. Тогда начальных условий соответственно два

$$D_t^{\alpha-2} w(\xi, 0) = 0, \quad D_t^{\alpha-1} w(\xi, 0) = w_1(\xi), \quad \xi \in \Omega, \tag{21}$$

или одно

$$D_t^{\alpha-1} w(\xi, 0) = w_1(\xi), \quad \xi \in \Omega, \tag{22}$$

или они отсутствуют. Поэтому, говоря о задаче (14)–(17), будем подразумевать, что начальные условия в ней имеют одну из форм (20), (21) или (22), или вообще отсутствуют в зависимости от параметров α и m^{**} в уравнении (14).

Определим при $\alpha \in (0,1]$ и при $\alpha \in (1,2)$, если при этом $m^{**} = 2$, $\widetilde{w}(\xi, t) = 0$, а при $\alpha \in (1,2)$, $m^{**} \in \{0,1\}$ –

$$\widetilde{w}(\xi, t) = \frac{t^{\alpha-1} w_1(\xi)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \widetilde{w}_j(\xi) = D_t^{\alpha_j} \widetilde{w}(\xi, 0), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Отметим при этом, что поскольку $m^{**} \leqslant 1$, то $\alpha_j \leqslant m^* \leqslant 0$ при $\alpha_j - m_j \neq \alpha - m$. Таким образом, $\widetilde{w}_j(\xi) = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, n-1$; $\widetilde{w}_n(\xi) = w_1(\xi)$ при $\alpha_n = \alpha - 1$ и $\widetilde{w}_n(\xi) = 0$ в противном случае.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha \in (0,2)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\nu > 0$; *при* $\alpha \in (1,2)$, $m^{**} \in \{0,1\}$ $w_1 \in H_0^2(\Omega)$, *если* $\alpha_n = \alpha - 1$, *и* $w_1 \in L_2(\Omega)$ *в противном случае*; $m^* \geqslant 0$ *или* $w_0 = 0$; $f_l, g, h \in C([0,T]; L_2(\Omega))$, *функции* $H_l \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *локально липшицевы*, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\psi_l, D_t^\alpha \psi_l, D_t^{\alpha_j} \psi_l \in C([0,T];\mathbb{R})$, $\psi_l(0) = 0$, $\eta_l \in H_0^2(\Omega)$, $l = 1, 2, \ldots, n+1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\det \Xi_0 := \det \|a_{k,l}\|_{k,l=1}^{n+1} \neq 0$, *где* $a_{k,l} := \langle \eta_k, f_l(\cdot, 0)\rangle H_l(\langle \eta_l, \widetilde{w}_l\rangle)$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $a_{k,n+1} := \langle \eta_k, g(\cdot, 0)\rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$; *при* $t \in [0,T]$ $\det \Xi(t) := \det \|b_{k,l}(t)\|_{k,l=1}^{n+1} \neq 0$, *где* $b_{k,l}(t) := \langle \eta_k, f_l(\cdot, t)\rangle H_l(D_t^{\alpha_l} \psi_l(t))$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $b_{k,n+1}(t) := \langle \eta_k, g(\cdot, t)\rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$. *Тогда при некотором* $T_1 \in (0,T]$ *существует единственное обобщенное решение* $(w, v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}) \in C([0,T_1]; L_2(\Omega) \times \mathbb{R}^{n+1})$ *обратной задачи* (14)–(17) *на отрезке* $[0, T_1]$.

Доказательство. С учетом леммы 6 применим теорему 2 к задаче (14)–(17). Имеем $x_0 = 0$ при $m^{**} = 0$, $x_1 = w_1(\cdot)$ при $\alpha \in (1,2)$, $m^{**} \in \{0,1\}$, оператор $G : [0,T] \times L_2(\Omega)^n \times \mathbb{R} \to L_2(\Omega)$, определенный в (19), непрерывен по совокупности переменных в силу условий на функции H_l, f_l, $l = 1, 2, \ldots, n$, g, h. Для линейного оператора

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n+1}) : L_2(\Omega) \to \mathbb{R}^{n+1}, \ \Phi_l y := \langle \eta_l, y\rangle, \ l = 1, 2, \ldots, n+1,$$

непрерывность следует из неравенств $|\Phi_l y| \leqslant \|\eta_l\|_{L_2(\Omega)} \|y\|_{L_2(\Omega)}$, $l = 1, \ldots, n+1$. Поэтому для $\eta_l, y \in H_0^2(\Omega)$ $\langle \eta_l, Ay\rangle = \langle A\eta_l, y\rangle$,

$$|\langle \eta_l, Ay\rangle| \leqslant C \|\eta_l\|_{H^2(\Omega)} \|y\|_{L_2(\Omega)}, \quad l = 1, 2, \ldots, n+1,$$

следовательно, $\overline{\Phi A} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \mathbb{R}^{n+1})$.

Далее $G(t, \overline{y}, \overline{u}) = G_1(t, \overline{y}) + G_2(t, \overline{y}, \overline{u})$, где $G_1(t, \overline{y}) := h(\cdot, t)$,

$$G_2(t, \overline{y}, \overline{u}) := \sum_{l=1}^{n} u_l f_l(\cdot, t) H_l(\langle \eta_l, y_l\rangle) + g(\cdot, t) u_{n+1},$$

поэтому отображение $G_1 : [0,T] \times L_2(\Omega)^n \to L_2(\Omega)$ непрерывно по $(t, \overline{y})$, а $G_2 : [0,T] \times L_2(\Omega)^n \times \mathbb{R}^{n+1} \to L_2(\Omega)$ непрерывно по $(t, \overline{y}, \overline{u})$ и липшицево по $(\overline{y}, \overline{u})$ на множестве $S_{L_2(\Omega)^n \times \mathbb{R}^{n+1}}(0, R, T)$ при любом $R > 0$. Кроме того, при $k = 1, 2, \ldots, n+1$

$$\begin{aligned}\Phi_k G_2(t,\overline{y},\overline{u}) &= \sum_{l=1}^{n} u_l \langle \eta_k, f_l(\cdot,t)\rangle H_l(\langle \eta_l, y_l\rangle) + u_{n+1}\langle \eta_k, g(\cdot,t)\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{n} u_l \langle \eta_k, f_l(\cdot,t)\rangle H_l(\Phi_l y_l) + u_{n+1}\langle \eta_k, g(\cdot,t)\rangle \\ &= G_{3,k}(t,\Phi y_1,\Phi y_2,\dots,\Phi y_n,\overline{u}),\end{aligned}$$

где $G_3 = (G_{3,1}, G_{3,2}, \dots, G_{3,n+1}) : [0,T] \times \mathbb{R}^{(n+1)^2} \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Возьмем $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1})$, $y_{0l} = D^\alpha \psi_l(0) - \langle \eta_l, h(\cdot,0)\rangle$, $l = 1,2,\dots,n+1$, $\overline{y}_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n+1})$. Система уравнений

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n} u_l \langle \eta_k, f_l(\cdot,0)\rangle H_l(\langle \eta_l, \widetilde{w}_l\rangle) + u_{n+1}\langle \eta_k, g(\cdot,0)\rangle = y_{0k} \\ = D^\alpha \psi_k(0) - \langle \eta_k, h(\cdot,0)\rangle,\end{aligned}$$

$k = 1,2,\dots,n+1$, имеет единственное решение

$$\overline{u}_0 = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0n+1}) = \Xi_0^{-1}\overline{y}_0$$

в силу условия $\det \Xi_0 \neq 0$. Аналогично может быть показано, что отображение $\overline{u} = \Xi^{-1}(t)\overline{z} := F(t,\overline{z})$ определено при $t \in [0,T]$ как обратное к отображению

$$z_k = \sum_{l=1}^{n} u_l \langle \eta_k, f_l(\cdot,t)\rangle H_l(D_t^{\alpha_l}\psi_l(t)) + u_{n+1}\langle \eta_k, g(\cdot,t)\rangle,\ k = 1,2,\dots,n+1,$$

по отношению к переменным $\overline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$. Так как $D_t^\alpha \psi_l \in C([0,T];\mathbb{R})$, $D_t^{\alpha_j}\psi_l \in C([0,T];\mathbb{R})$ при $l = 1,2,\dots,n+1$, $j = 1,2,\dots,n$, то $\Xi \in C([0,T];\mathbb{R}^{(n+1)^2})$, $\min\limits_{t\in[0,T]} |\det \Xi(t)| > 0$, существует конечный $\max\limits_{t\in[0,T]} |\det \Xi^{-1}(t)|$. Таким образом, отображение $F : [0,T] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ непрерывно по совокупности переменных и липшицево по $\overline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ и условия $(\mathcal{A})$–$(\mathcal{F})$ выполняются. По теореме 2 получаем существование единственного обобщенного решения задачи (14)–(17) на отрезке $[0,T_1]$ при некотором $T_1 \in (0,T]$. □

Теорема 5. *Пусть* $\alpha \in (0,2)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1,2,\dots,n$, $\nu > 0$; *при* $\alpha \in (1,2)$,

$m^{**} \in \{0,1\}$ $w_1 \in H_0^2(\Omega)$; $m^* \geqslant 0$ *или* $w_0 = 0$; $f_l, g, h \in C([0,T]; H_0^2(\Omega))$, *функции* $H_l \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *локально липшицевы,* $l = 1, 2, \dots, n$,

$$\psi_l, D_t^{\alpha}\psi_l, D_t^{\alpha_j}\psi_l \in C([0,T];\mathbb{R}),$$

$\psi_l(0) = 0$, $\eta_l \in H_0^2(\Omega)$, $l = 1, 2, \dots, n+1$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\det \Xi_0 := \det \|a_{k,l}\|_{k,l=1}^{n+1} \neq 0$, *где* $a_{k,l} := \langle \eta_k, f_l(\cdot, 0)\rangle H_l(\langle \eta_l, \widetilde{w}_l\rangle)$, $k = 1, 2, \dots, n+1$, $l = 1, 2, \dots, n$, $a_{k,n+1} := \langle \eta_k, g(\cdot, 0)\rangle$, $k = 1, 2, \dots, n+1$; *при* $t \in [0,T]$ $\det \Xi(t) := \det \|b_{k,l}(t)\|_{k,l=1}^{n+1} \neq 0$, *где* $b_{k,l}(t) := \langle \eta_k, f_l(\cdot, t)\rangle H_l(D_t^{\alpha_l}\psi_l(t))$, $k = 1, 2, \dots, n+1$, $l = 1, 2, \dots, n$, $b_{k,n+1}(t) := \langle \eta_k, g(\cdot, t)\rangle$, $k = 1, 2, \dots, n+1$. *Тогда при некотором* $T_1 \in (0, T]$ *существует единственное гладкое решение* $(w, v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ *обратной задачи* (14)–(17) *на отрезке* $[0, T_1]$.

Доказательство. В силу условий на $f_l(\cdot, t)$, $l = 1, 2, \dots, n$, $g(\cdot, t)$, $h(\cdot, t)$ выполняется условие $(\mathcal{F}_1)$. Рассуждая, как при доказательстве предыдущей теоремы, по теореме 3 получим существование единственного гладкого решения задачи (14)–(17) на отрезке $[0, T_1]$ при достаточно малом $T_1 \in (0, T]$. □

Замечание 10. Если $g = 0$ в уравнении (16) и неизвестный коэффициент v_{n+1} в задаче отсутствует, задача может быть исследована аналогичным образом с пространством $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^n$.

4.1. Пример. Рассмотрим задачу в области $\Omega = (0, \pi)$

$$
\begin{aligned}
D_t^{3/2} w(\xi, t) = D_\xi^2 w(\xi, t) &+ v_1(t) \sin\xi \cdot \cos\left(2\int_0^\pi D_t^{-3/4} w(\xi, t)\sin\xi d\xi\right)\\
&+ v_2(t)\sin(2\xi) e^{5\int_0^\pi D_t^{1/2} w(\xi,t)\sin(2\xi)d\xi}\\
&+ v_3(t)\sin(3\xi), \quad (\xi, t) \in (0,\pi)\times(0,T],\\
w(0,t) = w(\pi, t) = 0&, \quad t \in (0, T],\\
D_t^{-1/2} w(\xi, 0) = 0, \quad D_t^{1/2} w(\xi, 0) &= w_1(\xi), \quad \xi \in (0,\pi),\\
\int_0^\pi w(\xi, t)\sin(l\xi) d\xi &= t^{1+l}, \quad t \in [0, T], \quad l = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Здесь $\alpha = 3/2$, $m = 2$, $n = 2$, $\alpha_1 = -3/4$, $\alpha_2 = 1/2$, $\underline{m} = 0$, $\overline{m} = -1$, $m^* = -1$, $m^{**} = 0$, $H_1(z) = \cos(2z)$, $H_2(z) = e^{5z}$, $f_l(\xi, t) = \sin(l\xi)$, $l =$

$1, 2$, $\eta_l(\xi) = \sin(l\xi)$, $\psi_l(t) = t^{1+l}$, $l = 1, 2, 3$, $g(\xi, t) = \sin(3\xi)$, $h(\xi, t) = 0$, $\widetilde{w}_1(\xi) = 0$, $\widetilde{w}_2(\xi) = w_1(\xi)$,

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} e^{5\int\limits_0^\pi w_1(\xi)\sin 2\xi d\xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad \det \Xi_0 \neq 0,$$

$$\Xi(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\cos(2D_t^{-3/4}\psi_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} e^{5D_t^{1/2}\psi_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{4t^{11/4}}{\Gamma(15/4)}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} e^{30t^{5/2}/\Gamma(7/2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad \det \Xi(t) \neq 0$$

при достаточно малых $t > 0$. Из теоремы 5 следует существование единственного гладкого решения данной задачи при $w_1 \in H_0^2(0, \pi)$.

Список литературы

1. А. М. Нахушев, *Дробное исчисление и его приложения.* М., Физматлит, 2003.
2. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam, Boston, Heidelberg: Elsevier Science Publishing, 2006.
3. V. E. Tarasov, *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles*, New York: Springer, 2011.
4. V. V. Uchaykin, *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*, Beijing: Higher Education Press, 2012.
5. A. I. Kozhanov, *Composite Type Equations and Inverse Problems*, Utrecht: VSP, 1999.
6. A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., 2000.
7. Yu. Ya. Belov, *Inverse problems for parabolic equations*, Utrecht: VSP, 2002.
8. A. Favini, A. Lorenzi, *Differential Equations. Inverse and Direct Problems*, New York: Chapman and Hall/CRC, 2006.
9. С. И. Кабанихин, О. И. Криворотько, *Оптимизационные методы решения обратных задач иммунологии и эпидемиологии.* — Ж. вычислит. мат. и мат. физики **60**, No. 4 (2020), 590–600.
10. D. G. Orlovsky, *Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann. Liouville fractional derivative in a Hilbert space.* — Ж. Сиб. федер. ун-та. Сер. мат. и физ. **8**, No. 1 (2015), 55–63.

11. V. E. Fedorov, N. D. Ivanova, *Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order.* — Fractional Calculus and Appl. Anal. **20**, No. 3 (2017), 706–721.
12. V. E. Fedorov, R. R. Nazhimov, *Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann–Liouville derivative.* — Fractional Calculus and Appl. Anal. **22**, No. 2 (2019), 271–286.
13. D. G. Orlovsky, *Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space.* — J. Physics: Conference Ser. **1205**, No. 1 (2019), 012042.
14. В. Е. Федоров, М. Костич, *Задача идентификации для сильно вырожденных эволюционных уравнений с производной Герасимова–Капуто.* — Дифференц. уравнения **57**, No. 1 (2021), 100–113.
15. В. Е. Федоров, А. В. Нагуманова, *Линейные обратные задачи для вырожденного эволюционного уравнения с производной Герасимова–Капуто в секториальном случае.* — Мат. заметки. Сев.-Восточ. федер. ун-та. **27**, No. 2 (2020), 54–76.
16. V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova, A. S. Avilovich, *A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case.* — Math. Methods in the Appl. Sci. **44**, No. 15 (2021), 11961–11969.
17. V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova, M. Kostić, *A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **29**, No. 2 (2021), 173–184.
18. A. B. Kostin, S. I. Piskarev, *Inverse source problem for the abstract fractional differential equation.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **29**, No. 2 (2021), 267–281.
19. M. M. Turov, V. E. Fedorov, B. T. Kien, *Linear inverse problems for multi-term equations with Rieman–Liouville derivative.* — Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика **38** (2021), 36–53.
20. D. Orlovsky, S. Piskarev, *Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **30**, No. 2 (2022), 221–237.
21. М. В. Плеханова, Е. М. Ижбердеева, *О корректности обратной задачи для вырожденного эволюционного уравнения с дробной производной Джрбашяна–Нерсесяна.* — Итоги науки и техники. Сер. соврем. математика и ее прил. Темат. обзоры **213** (2022), 80–88.
22. E. G. Bajlekova, *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces.* Ph.D. Thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001.
23. В. Е. Федоров, А. С. Авилович, *Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана–Лиувилля в секториальном случае.* — Сиб. мат. журн. **60**, No. 2 (2019), 461–477.
24. А. С. Авилович, Д. М. Гордиевских, В. Е. Федоров, *Вопросы однозначной разрешимости и приближенной управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гельдеровой правой частью.* — Челяб. физ.-мат. журн. **5**, No. 1 (2020), 5–21.

25. V. E. Fedorov, A. S. Avilovich, *Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case.* — Complex Variables and Elliptic Equations **66**, No. 6–7 (2021), 1108–1121.
26. В. Е. Федоров, М. М. Туров, *Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана–Лиувилля.* — Сиб. мат. журн. **62**, No. 5 (2021), 1143–1162.
27. V. E. Fedorov, W.-S. Du, M. M. Turov, *On the unique solvability of incomplete Cauchy type problems for a class of multi-term equations with the Riemann–Liouville derivatives.* — Symmetry **14**, No. 1 (2022), 75.
28. V. E. Fedorov, M. M. Turov, B. T. Kien, *A class of quasilinear equations with Riemann–Liouville derivatives and bounded operators.* — Axioms **11** (2022), 96.
29. В. Е. Федоров, Е. А. Романова, А. Дебуш, *Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка.* — Сиб. журн. чистой и приклад. математики **16**, No. 2 (2016), 93–107.

Fedorov V. E., Borel L. V., Ivanova N. D. Nonlinear inverse problems for a class of equation s with Riemann–Liouville derivatives.

The issues of local unique solvability in the sense of generalized and smooth solutions of nonlinear inverse problems for equations in Banach spaces with several fractional Riemann–Liouville derivatives and Riemann–Liouville integrals are investigated. The operator in the linear part is assumed to generate the analytic in the sector resolving family of operators of the corresponding linear equation, the unknown coefficients in the equation depend on time. The conditions of unique solvability of the inverse problem in Banach space are used in the study of a class of initial boundary value problems for a loaded fractional diffusion equation with several Riemann–Liouville derivatives and Riemann–Liouville integrals in time and unknown coefficients, with integral overdefinition conditions.

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001 Челябинск, Россия
E-mail: kar@csu.ru

Поступило 21 октября 2022 г.

С.-Петербургский Горный Университет,
21-я линия, 2, 199106 Ст.-Петербург, Россия
E-mail: lidiya904@mail.ru

Институт естественных и точных наук,
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),
пр. Ленина, 76, 454080 Челябинск, Россия
E-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com