Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 519, 2022 г.

М. Д. Сурначёв

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕКОЭРЦИТИВНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИВЕРГЕНТНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СНОСОМ ИЗ КЛАССА КАТО

1. Введение

Пусть Ω – область (не обязательно ограниченная) в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Рассмотрим пару сопряжённых задач Дирихле

$$Lu = -\operatorname{div}(\mathbb{A}(x)\nabla u) + \mathbf{b}(x)\cdot\nabla u = f, \quad f \in W^{-1,2}(\Omega), \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{1.1}$$

и

$$L^*u = -\operatorname{div}(\mathbb{A}(x)\nabla u + \mathbf{b}(x)u) = f, \quad f \in W^{-1,2}(\Omega), \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{1.2}$$

где матрица $\mathbb{A} \in (L^\infty(\Omega))^{n\times n}$ симметрическая и удовлетворяет условию равномерной эллиптичности

$$\nu|\xi|^2 \leqslant \mathbb{A}(x)\xi\cdot\xi \leqslant M|\xi|^2, \quad M,\nu > 0, \tag{1.3}$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Пространство $W_0^{1,2}(\Omega)$ есть замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2},$$

а $W^{-1,2}(\Omega)$ – сопряжённое к нему пространство, $W^{-1,2}(\Omega) = (W_0^{1,2}(\Omega))^*$. Относительно сноса $\mathbf{b}$ предположим, что $|\mathbf{b}|^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и имеет место неравенство типа Харди

$$\int\limits_\Omega |\mathbf{b}|^2\varphi^2\,dx \leqslant C_H^2 \int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{1.4}$$

Ключевые слова: некоэрцитивная задача Дирихле, классы Като-Штуммеля, существование и единственность решения, стационарное уравнение конвекции-диффузии, снос.

Введём билинейные формы $\alpha, \beta, \gamma : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$\alpha(u,v) = \int\limits_\Omega \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla v\,dx, \quad \beta(u,v) = \int\limits_\Omega \mathbf{b}v \cdot \nabla u\,dx,$$
$$\gamma(u,v) = \alpha(u,v) + \beta(u,v) = \int\limits_\Omega (\mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla v + \mathbf{b}v \cdot \nabla u)\,dx. \tag{1.5}$$

В силу условий (1.3) и (1.4), формы α, β являются ограниченными, а форма α коэрцитивной:

$$|\alpha(u,v)| \leqslant M\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \alpha(u,u) \geqslant \nu\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},$$
$$|\beta(u,v)| \leqslant \big\|v\mathbf{b}\big\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_H\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.6}$$

откуда следует и ограниченность формы γ. Здесь и далее говорим, что $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in L^p(\Omega)$, если $g = |\mathbf{g}| \in L^p(\Omega)$, и полагаем $\|\mathbf{g}\|_{L^p(\Omega)} := \|g\|_{L^p(\Omega)}$.

Для $f \in W^{-1,2}(\Omega)$ и $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ через $\langle f, v\rangle$ будем обозначать действие линейного функционала $f \in W^{-1,2}(\Omega)$ на элемент $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Функцию $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ будем называть решением задачи (1.1), если

$$\gamma(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \text{для всех} \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{1.7}$$

Аналогично, функция $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ является решением задачи (1.2), если

$$\gamma(v,u) = \langle f, v\rangle \quad \text{для всех} \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{1.8}$$

Форме $\gamma(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ ставятся в соответствие ограниченные линейные операторы $L, L^* : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$, которые определяются соотношениями

$$\langle Lu, v\rangle = \gamma(u,v) \quad \text{для всех} \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{1.9}$$

и

$$\langle L^*u, v\rangle = \gamma(v,u) \quad \text{для всех} \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{1.10}$$

В операторном виде задача (1.1) записывается как $Lu = f$, а задача (1.2) как $L^*u = f$, при этом $\|L\|, \|L^*\| \leqslant M + C_H$ и

$$\langle Lu, v\rangle = \langle L^*v, u\rangle \quad \text{для всех} \quad u, v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Перейдём к обсуждению известных результатов по разрешимости задач (1.1), (1.2). Если величина C_H в (1.4) достаточно мала, $C_H < \nu$, то

$$\gamma(u,u) \geqslant (\nu - C_H) \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx,$$

и разрешимость задач (1.1), (1.2) немедленно следует из леммы Лакса-Мильграма вместе с оценкой

$$\|L^{-1}\|, \|(L^*)^{-1}\| \leqslant (\nu - C_H)^{-1}.$$

При этом, хорошо известно, что для $\mathbf{b} \in L^n(\Omega)$ теорема существования и единственности решений задач (1.1), (1.2) имеет место без условия малости на норму $\|\mathbf{b}\|_{L^n(\Omega)}$. Например, такие результаты могут быть найдены в [1, Раздел 8.2]. В этом случае для решения задачи (1.1) имеет место принцип максимума (напр. [1, Раздел 8.1], [2–4], откуда следует единственность решения. По теореме Фредгольма отсюда следует существование решения уравнения $Lu = f$ для любой правой части f вместе с ограниченностью обратного оператора, L^{-1}. По двойственности, это сразу даёт разрешимость сопряжённой задачи $L^*u = f$ вместе с оценкой для нормы $(L^*)^{-1}$. Пусть $L^*u = f$ и $Lv = g$, тогда

$$\langle g, u\rangle = \langle Lv, u\rangle = \langle L^*u, v\rangle = \langle f, v\rangle \leqslant \|f\| \cdot \|v\| \leqslant \|L^{-1}\| \cdot \|f\| \cdot \|g\|.$$

Так как $\operatorname{Im} L = W^{-1,2}(\Omega)$, отсюда имеем $\|(L^*)^{-1}\| \leqslant \|L^{-1}\|$. Этот метод даёт существование и ограниченность обратных операторов L^{-1} и $(L^*)^{-1}$ без конкретной оценки их нормы.

Для задачи (1.1) в работе М. Кикко [5] была получена замечательная оценка

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant K\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \tag{1.11}$$

с константой K, зависящей только от n, ν и $\|\mathbf{b}\|_{L^n(\Omega)}$. В операторной форме эта оценка имеет вид $\|L^{-1}\| \leqslant K$. При этом величину K можно оценить сверху как $\nu^{-1}\exp\big(C(n)\nu^{-n}\|\mathbf{b}\|^n_{L^n(\Omega)}\big)$. По двойственности сразу получаем также неравенство $\|(L^*)^{-1}\| \leqslant K$ с той же константой K.

Оценки такого рода для некоэрцитивных задач типа (1.1) возникали также в работах [6–8] и далее использовались в ряде работ, например [9–14].

Некоэрцитивные задача в форме (1.2) изучались в работах [15–18], однако полученные там оценки для $\mathbf{b} \in L^n(\Omega)$ были хуже той, которая получается по двойственности из результатов [5–8]. Для задачи (1.2) оценки типа оценок Кикко были получены в [12, 13] при дополнительном условии на $\operatorname{div}\mathbf{b}$. Это обусловлено тем, что авторы [12, 13] получали оценку решения в $W^{1,2}(\Omega)$, что требует дополнительного контроля нормы решения в $L^2(\Omega)$.

Отметим недавнюю работу [19] в которой рассматривался снос $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}''$, где $\mathbf{b}' \in L^\infty(\Omega)$, а $\mathbf{b}''$ принадлежит пространству Марцинкевича $L^{n,\infty}(\Omega)$ и имеет в этом пространстве достаточно малую норму. Близкие вопросы исследовались в [20, 21].

В работе [10] для задачи (1.1) была получена оценка типа (1.11) для сноса из класса типа Като (Като–Штуммеля), которая содержала дополнительно зависимость от нормы $\mathbf{b}$ в $L^2(\Omega)$. В случае неограниченной области условие $\mathbf{b} \in L^2(\Omega)$ налагает повышенные требования на скорость стремления $\mathbf{b}$ к нулю на бесконечности.

Целью настоящей работы является получение оценки типа (1.11) для сноса из класса типа Като. В целом рассуждения близки работе [10] (которая основана, в свою очередь, на модификации техники [5–8]. Кроме того, мы получаем аналогичную оценку и для задачи (1.2) без использования двойственности.

Для формулировки основного результата работы нам потребуются некоторые обозначения. В дальнейшем полагаем, что $\mathbf{b} = 0$ вне Ω. Функции из $W_0^{1,2}(\Omega)$ также будем полагать продолженными нулём вне Ω. Через B_r^x обозначим открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x. Пусть $B_r = B_r^0$.

Хорошо известно (см. напр. [34, 35], для удобства читателя доказательство этого факта приведено ниже), что если

$$V(|\mathbf{b}|^2, \mathbb{R}^n) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy < \infty, \tag{1.12}$$

то неравенство (1.4) выполняется с константой

$$C_H^2 = C_0 \cdot V(|\mathbf{b}|^2, \mathbb{R}^n), \quad C_0 = C_0(n) = ((n-2)\omega_n)^{-1}, \tag{1.13}$$

Здесь и далее через ω_n обозначается поверхностная $(n-1)$ мера единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\omega_n = |\partial B_1|_{n-1}$.

Предположим, что $|\mathbf{b}|^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ и найдётся неотрицательная функция $\psi(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, неубывающая по обоим аргументам, такая, что для всех

$R > 0$ выполняется $\lim\limits_{t\to 0} \psi(t,R) = 0$ и

$$\sup_{x\in B_R} \int\limits_{B_t^x} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy \leqslant \psi^2(t,R), \quad 0 < t < t_0. \tag{1.14}$$

Также предположим, что найдётся такая невозрастающая функция Θ, что $\Theta(r) \to 0$ при $r \to \infty$ и для всех $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ выполняется

$$\int\limits_{\Omega\setminus B_R} |\mathbf{b}|^2 v^2\,dx \leqslant \Theta^2(R) \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dx. \tag{1.15}$$

Из условий (1.14), (1.15) следует выполнение неравенства (1.4). В силу (1.13), для любой функции $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ и любого $t < t_0$ выполняется

$$\int\limits_{B_R} |\mathbf{b}|^2 v^2\,dx \leqslant C_0\biggl(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{B_R} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy\biggr) \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\biggl(\int\limits_{B_R\cap B_t^x} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy + \int\limits_{B_R\setminus B_t^x} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy\biggr) \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C_0\biggl(\psi^2(t,R+t) + t^{2-n}\int\limits_{B_R} |\mathbf{b}|^2\,dy\biggr) \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dy.$$

Совмещая эту оценку с неравенством (1.15) получаем (1.4) с константой

$$C_H^2 = \Theta^2(R) + C_0\biggl(\psi^2(t,R+t) + t^{2-n}\int\limits_{B_R} |\mathbf{b}|^2\,dy\biggr).$$

Из (1.13) также следует, что условие (1.15) выполнено, если

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy \leqslant (C_0(n))^{-1}\Theta^2(R) \to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty. \tag{1.16}$$

Более того (см. лемму 4.4), при выполнении условий (1.14), (1.15) вложение $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^2(\Omega, |\mathbf{b}|^2\,dx)$ компактно.

Пусть $\Lambda(r)$ – такая функция, что

$$\int\limits_{B_r} |\mathbf{b}|^2\,dx \leqslant \Lambda^2(r), \quad r \geqslant 1. \tag{1.17}$$

В силу условий (1.14), (1.15), найдутся положительные числа ρ_* и R_*, такие, что

$$\Theta^2(R_*) \leqslant \frac{\nu^2}{8}, \quad \psi^2(\rho_*, R_* + \rho_*) \leqslant \frac{\nu^2}{16C_0}. \tag{1.18}$$

Обозначим

$$m_* = \frac{16C_0(n)}{\nu^2} \rho_*^{2-n} \Lambda^2(R_*). \tag{1.19}$$

Теорема 1.1. *При выполнении условий* (1.14), (1.15) *для любой функции* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *верны оценки*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant K\|Lu\|_{W^{-1,2}(\Omega)}, \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant K\|L^*u\|_{W^{-1,2}(\Omega)}, \tag{1.20}$$

где $K = 2^{m_*+2}\nu^{-1}$.

Имеет место однозначная разрешимость задач (1.1), (1.2).

Теорема 1.2. *Если выполняются условия* (1.14), (1.15), *то задачи Дирихле* (1.1), (1.2) *однозначно разрешимы для любой правой части* $f \in W^{-1,2}(\Omega)$, *а решения удовлетворяют оценке*

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant K\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)}, \quad K = 2^{m_*+2}\nu^{-1},$$

где m_* *определено в* (1.19).

Для $k \geqslant 0$ положим

$$T_k(s) = \min(|s|, k) \operatorname{sign} s = \max(-k, \min(k, s)) \tag{1.21}$$

и при $0 \leqslant k < l \leqslant \infty$ определим

$$T_{k,l}(s) = T_l(s) - T_k(s). \tag{1.22}$$

Теорема 1.1 является следствием двух следующих теорем, в которых также предполагаются условия (1.14), (1.15), а число m_* определено в (1.19).

Теорема 1.3. *Для любой функции* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *найдётся такое число* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \leqslant m_*$, *и такая убывающая последовательность неотрицательных чисел* $+\infty = k_0 > k_1 > \ldots > k_p > k_{p+1} = 0$, *что*

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu} \sum_{j=0}^{p} 2^{p-j} F_j, \quad F_j = \frac{\langle Lu, T_{k_{j+1},k_j}(u)\rangle}{\|T_{k_{j+1},k_j}(u)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}}. \tag{1.23}$$

Теорема 1.4. *Для любой функции* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *найдётся такое число* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \leqslant m_*$, *и такая возрастающая последовательность неотрицательных чисел* $0 = k_0 < k_1 < \ldots < k_p < k_{p+1} = +\infty$, *что*

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu} \sum_{j=0}^{p} 2^{p-j} F_j, \quad F_j = \frac{\langle L^* u, T_{k_j,k_{j+1}}(u) \rangle}{\|T_{k_j,k_{j+1}}(u)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}}. \tag{1.24}$$

В формулах (1.23), (1.24) мы полагаем $0/0 = 0$, если такая неопределённость возникает. Теоремы 1.3, 1.4 доказываются независимо без использования двойственности. Оценку (1.23) далее используем для оценки ёмкостной меры и доказательства принципа максимума.

Далее работа устроена следующим образом. В разделе 2 приведены различные условия для $\mathbf{b}$, которые гарантируют выполнение неравенства (1.4). Раздел 3 посвящён теоремам вложения с весами из классов Като. Раздел 4 содержит вспомогательные утверждения. В разделах 5 и 6 приводятся доказательства теорем 1.3 и 1.4, соответственно. В разделе 7 доказывается теорема 1.2. Раздел 8 содержит аналог теоремы 1.3 для решений неравенств. В разделе 9 с помощью теоремы 1.3 получены оценки ёмкостной меры. В разделе 10 интегралы в (1.12) и условиях (1.14), (1.16) оцениваются в более простых терминах.

2. Неравенства типа Харди

Приведём примеры условий на снос, обеспечивающих выполнение неравенства (1.4), и, как следствие, ограниченность форм β, γ, заданных (1.5).

1. Если $|\mathbf{b}(x)| \leqslant B|x|^{-1}$, тогда по неравенству Харди для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется

$$\int\limits_\Omega |\mathbf{b}|^2 \varphi^2 \, dx \leqslant B^2 \int\limits_\Omega \frac{\varphi^2}{|x|^2} \, dx \leqslant \left(\frac{2B}{n-2} \right)^2 \int\limits_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx.$$

2. Для $\mathbf{b} \in L^n(\Omega)$ и $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ имеем

$$\int\limits_\Omega |\mathbf{b}|^2 \varphi^2 \, dx \leqslant \left(\int\limits_\Omega |\mathbf{b}|^n \, dx \right)^{2/n} \left(\int\limits_\Omega |\varphi|^{2n/(n-2)} \, dx \right)^{\frac{n}{n-2}}$$

$$\leqslant S^2 \left(\int\limits_\Omega |\mathbf{b}|^n \, dx \right)^{2/n} \int\limits_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx,$$

где $S = S(n)$ – константа в неравенстве Соболева

$$\|\varphi\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega} \leqslant S\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Таким образом, неравенство (1.4) верно с константой $C_H = S\|\mathbf{b}\|_{L^n(\Omega)}$.

3. Неравенство (1.4) также имеет место в случае $|\mathbf{b}| \in L^{n,\infty}(\Omega)$, где $L^{n,\infty}(\Omega)$ – пространство Марцинкевича. Будем говорить, что $g \in L^{p,\infty}(\Omega)$, если

$$\|g\|_{L^{p,\infty}(\Omega)} := \sup_{t>0} t\,|\{|g| > t\} \cap \Omega|^{1/p} < +\infty.$$

Для $p, q \in [1, +\infty)$ определим пространства Лоренца $L^{p,q}(\Omega)$ как множество функций f, измеримых в Ω, таких, что

$$\|f\|_{L^{p,q}(\Omega)} = \left(p\int\limits_0^{+\infty} |\{|f| > t\} \cap \Omega|^{q/p} t^{q-1}\,dt\right)^{1/q} < +\infty.$$

Напомним, что $L^{p,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ для $1 \leqslant p < \infty$. Для пространств Лоренца и Марцинкевича справедливо неравенство Гёльдера в следующей форме: если $p, p' \in (1, +\infty)$, $q, q' \in [1, +\infty]$, $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$, $q^{-1} + (q')^{-1} = 1$, то

$$\int\limits_\Omega |fg|\,dx \leqslant \|f\|_{L^{p,q}(\Omega)}\|g\|_{L^{p',q'}(\Omega)} \tag{2.1}$$

для всех $f \in L^{p,q}(\Omega)$, $g \in L^{p',q'}(\Omega)$. Как обычно, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in L^{p,q}(\Omega)$, если $g = |\mathbf{g}| \in L^{p,q}(\Omega)$, и $\|\mathbf{g}\|_{L^{p,q}(\Omega)} = \|g\,\|_{L^{p,q}(\Omega)}$. Дальнейшие свойства пространств Лоренца могут быть найдены, например, в [22, Chap. V, Sec. 3], [23, Sec. 1.4], [24, Chap. 8].

Имеет место следующее уточнение классической теоремы вложения С.Л. Соболева, которое мы приводим лишь для нужного нам случая: для всех $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|v\|_{L^{2n/(n-2),2}(\Omega)} \leqslant S_*\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.2}$$

где константа S_* зависит только от n. Неравенство (2.2) можно получить, например, как следствие соболевского представления функции (напомним, что $\omega_n = |\partial B_1|_{n-1}$)

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_\Omega \frac{(x-y)\cdot\nabla v(y)}{|x-y|^n}\,dy, \quad v \in W_0^{1,1}(\Omega), \tag{2.3}$$

для почти всех $x \in \Omega$, и "теоремы о свёртке" (см. [25]) или обобщенной теоремы Марцинкевича (напр., [26], [22, глава V, теорема 3.15], [23, глава 1, теорема 1.4.19]).

Пользуясь неравенством Гёльдера (2.1), неравенством типа Соболева (2.2), и тем, что $\|f^r\|_{L^{p,q}(\Omega)} = \|f\|^r_{L^{pr,qr}(\Omega)}$, для всех $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ имеем

$$\int\limits_\Omega |\mathbf{b}|^2 v^2\,dx \leqslant \|\,|\mathbf{b}|^2\|_{L^{n/2,\infty}(\Omega)} \|v^2\|_{L^{n/(n-2),1}(\Omega)}$$

$$\leqslant \|\,\mathbf{b}\|^2_{L^{n,\infty}(\Omega)} \|v\|^2_{L^{2n/(n-2),2}(\Omega)} \leqslant S_*^2 \|\mathbf{b}\|^2_{L^{n,\infty}(\Omega)} \int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx.$$

Таким образом, неравенство (1.4) верно с константой

$$C_H = S_* \|\mathbf{b}\|_{L^{n,\infty}(\Omega)}.$$

4. Ещё один известный пример выполнения условия (1.4) дают так называемые классы Като (или Като–Штуммеля). Более подробно мы остановимся на этом ниже, а пока приведём соответствующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega |\mathbf{b}|^2 v^2\,dx \leqslant C_0(n) \sup_{x\in\Omega} \int\limits_\Omega \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy \cdot \int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx \qquad (2.4)$$

для всех $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

5. В работах [27, 28] было найдено достаточное (и близкое к необходимому) условие выполнения неравенства (1.4). А именно, если для любого борелевского множества E справедливо

$$\int\limits_E |\mathbf{b}|^2\,dx \leqslant \frac{(n-2)\omega_n}{4} \operatorname{cap} E, \qquad (2.5)$$

где $\operatorname{cap} E$ – ёмкость множества E (с нормировкой $\operatorname{cap} B_1^0 = 1$), то неравенство (1.4) справедливо для $\Omega = \mathbb{R}^n$ с константой $C_H = 1$. С другой стороны, в случае справедливости (1.4) выполняется

$$\int\limits_E |\mathbf{b}|^2\,dx \leqslant (n-2)\omega_n \operatorname{cap} E.$$

Для этого достаточно (в случае компакта E) в неравенстве (1.4) выбрать в качестве функции φ ёмкостной потенциал E. В подобных терминах сформулирован и критерий компактности вложения $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^2(\Omega, |\mathbf{b}|^2\,dx)$. Проверка условия (2.5) представляет отдельную задачу. В [28] в качестве примера приводится получение неравенства (1.4) с константой $C_H = S_*(n)\|\mathbf{b}\|_{L^{n,\infty}(\Omega)}$.

Различные критерии ограниченности квадратичных форм, связанных с операторами второго порядка, были получены в [29–31].

6. В работе [32] было показано, что для $p \in (1, n/2]$ неравенство (1.4) для $\Omega = \mathbb{R}^n$ имеет место с константой

$$C_H^2 \leqslant c(n,p) \sup_{x,r} \biggl(r^{2p-n} \int\limits_{B_r^x} |\mathbf{b}|^{2p}\,dy \biggr)^{1/p}. \tag{2.6}$$

Далее существенно более простое доказательство этого факта было дано в [33]. Условие конечности величины в правой части (2.6) достаточно близко к необходимому. Выбирая в неравенстве (1.4) функцию $\varphi_{x_0,r}(x) = \varphi((x-x_0)/r)$, где $\varphi \in C_0^\infty(B_2^0)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi = 1$ в B_1^0, $|\nabla\varphi| \leqslant 10$, для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ получим

$$r^{2-n} \int\limits_{B_r^{x_0}} |\mathbf{b}|^2\,dx \leqslant c(n) C_H^2.$$

Отсюда, если дополнительно $|\mathbf{b}|^2$ принадлежит классу Макенхаупта $A_\infty(\mathbb{R}^n)$, следует конечность супремума в правой части (2.6) для некоторого $p > 1$.

7. Отметим также работы [34, 35], в которых, в частности, было показано, что в неравенстве (1.4) для $\Omega = \mathbb{R}^n$ константу можно оценить как

$$C_H^2 = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \inf_{\eta>0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{\eta(x)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}} \eta(y)\,dy. \tag{2.7}$$

Из этой оценки следует неравенство (2.4), которое соответствует выбору $\eta \equiv 1$. Также в работе [35] содержится упрощённый вывод неравенства (2.6), основанный на применении результатов [36] об оценке потенциалов Рисса на функциях из классов Кампанато-Морри.

Замечание. В настоящей работе используется достаточно грубый вариант получения оценки квадратичной формы $\beta(u,v)$ (см. (1.6)), через неравенство типа Харди (1.4), так же как и компактность далее исследуется в этом смысле (см. лемму 4.4). Точные условия ограниченности форм, связанных с дифференциальными операторами второго порядка, и критерии компактности см. [31].

3. Классы Като и связанные с ними неравенства

Напомним некоторые классические результаты о функциях из классов типа Като (или Като–Штуммеля). Эти классы и их варианты достаточно популярны в теории эллиптических и параболических уравнений второго порядка [37–48].

Пусть D – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и $0 \leqslant f \in L^1(D)$. Положим

$$\begin{aligned} V(f,D) &= \sup_{x\in D} \int\limits_D \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy, \\ \widetilde{V}(f,D) &= \sup_{x\in \mathbb{R}^n} \int\limits_D \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy, \\ V(f,r,D) &= \sup_{x\in \mathbb{R}^n} \int\limits_{B_r^x\cap D} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Если $f_1 \leqslant f_2$, $D_1 \subset D_2$ и $r_1 \leqslant r_2$, то $V(f_1,D_1) \leqslant V(f_2,D_2)$, $\widetilde{V}(f_1,D_1) \leqslant \widetilde{V}(f_2,D_2)$, $V(f_1,r,D_1) \leqslant V(f_2,r_2,D_2)$.

Начнём с доказательства хорошо известного неравенства (2.4), которое приводится здесь для удобства читателя. Напомним, что ω_n обозначает поверхностную $(n-1)$-меру единичной сферы ∂B_1 в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3.1. *Пусть $v \in W_0^{1,2}(D)$, где D – область в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\int\limits_D v^2 f\,dx \leqslant C_0(n) V(f,D) \int\limits_D |\nabla v|^2\,dx. \tag{3.2}$$

Можно взять $C_0(n) = ((n-2)\omega_n)^{-1}$.

Перед тем, как приступить к доказательству этого утверждения, напомним следующий хорошо известный результат.

Тест Шура. *Пусть $K(x,y)$ неотрицательная измеримая функция на $D \times D$ и найдутся такие положительная функция q и неотрицательная функция p такие, что*

$$\int\limits_D K(x,y)q(y)\,dy \leqslant Ap(x) \quad \text{и} \quad \int\limits_D K(x,y)p(x)\,dx \leqslant Bq(y)$$

для п.в. $x, y \in D$. Тогда интегральный оператор

$$(T\varphi)(x) = \int\limits_D K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

ограничен в $L^2(D)$ и $\|Tf\|_{L^2(D)} \leqslant \sqrt{AB}\|f\|_{L^2(D)}$ для любой $f \in L^2(D)$.

Будем также использовать известное равенство (частный случай полугруппового свойства потенциалов Рисса, напр. [49, Chap. V, Sec. 1]):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{1-n}|y-z|^{1-n}\,dy = C(n)|x-z|^{2-n}. \tag{3.3}$$

Доказательство леммы 3.1. Напомним, что для $v \in W_0^{1,2}(D)$ имеет место соболевское представление (2.3), откуда

$$|v(x)| \leqslant \frac{1}{\omega_n}\int\limits_D |x-y|^{1-n} \cdot |\nabla v(y)|\,dy, \quad \omega_n = |\partial B_1|_{n-1},$$

для почти всех $x \in D$. Поэтому для доказательства искомого неравенства достаточно доказать ограниченность в $L^2(D)$ интегрального оператора

$$(T\varphi)(x) = \int\limits_D K(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad K(x,y) = |x-y|^{1-n}\sqrt{f(x)}.$$

Докажем вначале оценку в форме Шехтера (2.7). Применим тест Шура. Пусть функция $\eta > 0$. Положим

$$q(y) = \int\limits_D |y-z|^{1-n} f(z)\eta(z)\,dz, \quad p(x) = \sqrt{f(x)}\eta(x).$$

Используя свойство (3.3) получим

$$\begin{aligned}\int\limits_D |x-y|^{1-n}\sqrt{f(x)}q(y)dy &= \sqrt{f(x)}\int\limits_D f(z)\eta(z)\int\limits_D |x-y|^{1-n}|y-z|^{1-n}dy\,dz\\ &= C(n)\sqrt{f(x)}\int\limits_D |x-z|^{2-n}f(z)\eta(z)\,dz\\ &\leqslant C(n)p(x)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{\eta(x)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x-z|^{2-n}f(z)\eta(z)\,dz.\end{aligned}$$

Далее,

$$\int\limits_D |x-y|^{1-n}\sqrt{f(x)}p(x)\,dx = \int\limits_D |x-y|^{1-n}f(x)\eta(x)\,dx = 1\cdot q(y).$$

В силу леммы Шура отсюда следует ограниченность интегрального оператора T в $L^2(D)$ с оценкой

$$\int\limits_D (T\varphi)^2\,dx \leqslant\ C(n)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{\eta(x)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x-z|^{2-n}f(z)\eta(z)\,dz\cdot\int\limits_D\varphi^2\,dz.$$

Полагая $\eta\equiv 1$, отсюда получим

$$\int\limits_D v^2 f\,dx \leqslant C(n)\int\limits_D (T|\nabla v|)^2(x)\,dx \leqslant C_0(n)V(f,D)\int\limits_D |\nabla v|^2\,dy,$$

что и составляет неравенство (3.2). □

Непосредственно выражение для константы $C_0(n)$ в (3.2) удобнее получить из другого варианта доказательства.

Второе доказательство леммы 3.1. Достаточно доказать неравенство (3.2) для $v\in C_0^\infty(D)$ и функции $f\in L^\infty(D)$ с компактным носителем. Продолжим v и f нулём вне D. Пусть функция $\eta>0$. Тогда функция

$$U(x)=\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int\limits_D\frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\eta(y)\,dy,$$

является решением уравнения $-\triangle U = f\eta$ в $\mathbb{R}^n$. Выбирая в интегральном тождестве для уравнения $-\triangle U = f\eta$ пробную функцию

$(U+\varepsilon)^{-1}v^2$, получим

$$-\int\limits_D |\nabla U|^2(U+\varepsilon)^{-2}v^2\,dx+2\int\limits_D (U+\varepsilon)^{-1}v\nabla U\cdot\nabla v\,dx=\int\limits_D (U+\varepsilon)^{-1}v^2 f\eta\,dx.$$

По неравенству Коши

$$\int\limits_D (U+\varepsilon)^{-1}v^2 f\eta\,dx\leqslant\int\limits_D |\nabla v|^2\,dx.$$

Устремляя $\varepsilon\to 0$, приходим к неравенству

$$\int\limits_D U^{-1}v^2 f\eta\,dx\leqslant\int\limits_D |\nabla v|^2\,dx.$$

Отсюда,

$$\int\limits_D v^2 f\,dx\leqslant\|\eta^{-1}U\|_{L^\infty(D)}\int\limits_D |\nabla v|^2\,dx, \tag{3.4}$$

что составляет оценку (2.7). В случае $\eta\equiv 1$ имеем $\|\eta^{-1}U\|_{L^\infty(D)}=C_0(n)V(f,D)$, и из (3.4) получаем (3.2). □

Лемма 3.2. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и неотрицательная измеримая функция f равна нулю вне D. Тогда для любых $z\in\mathbb{R}^n$, $r>0$ и $v\in W^{1,2}(B^z_{r/4})$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{B^z_{r/4}} v^2 f\,dx\leqslant C(n)V(f,r,D)\int\limits_{B^z_{r/4}} (|\nabla v|^2+r^{-2}v^2)\,dx. \tag{3.5}$$

Доказательство. Продолжим v до $\widetilde{v}\in W^{1,2}_0(B^z_{r/2})$, так, что $\widetilde{v}=v$ в $B^z_{r/4}$ и

$$\int\limits_{B^z_{r/2}} |\nabla\widetilde{v}|^2\,dx\leqslant C(n)\int\limits_{B^z_{r/4}} (|\nabla v|^2+r^{-2}v^2)\,dx.$$

Совмещая эту оценку с (3.2), и учитывая, что $V(f, B^z_{r/2}) \leqslant V(f, r, D)$, получим

$$\int\limits_{B^z_{r/4}} v^2 f\,dx \leqslant \int\limits_{B^z_{r/2}} \widetilde{v}^2 f\,dx \leqslant C(n)V(f, B^z_{r/2}) \int\limits_{B^z_{r/2}} |\nabla \widetilde{v}|^2\,dx$$
$$\leqslant C(n)V(f, r, D) \int\limits_{B^z_{r/4}} (|\nabla v|^2 + r^{-2}v^2)\,dx.$$

Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *В условиях леммы* 3.1 *для любого* $r > 0$ *выполняется*

$$\int\limits_D v^2 f\,dx \leqslant C_1(n)V(f, r, D) \int\limits_D (|\nabla v|^2 + r^{-2}v^2)\,dx. \tag{3.6}$$

Доказательство леммы 3.3. Будем считать, что f и v продолжены нулём вне D. Покроем D системой замкнутых кубов $\{K_j\}$ со сторонами $2h$, $h = r/(4\sqrt{n})$, центрами x_j, с рёбрами параллельными координатным осям, так, что пересечение любых двух кубов этой системы может происходить только по их границе. Тогда D принадлежит объединению шаров $B^{x_j}_{r/4}$ и в любой точке могут пересекаться не более $(\sqrt{n} + 2)^n$ шаров из этой системы. Применяя в каждом из этих шаров оценку (3.5), суммируя получающиеся оценки и учитывая конечность пересечения, получаем неравенство (3.6). Лемма 3.3 доказана. □

4. Вспомогательные утверждения

Далее предполагаются выполненными условия (1.14), (1.15) (и, как следствие, (1.4)), (1.17) и используются обозначения (3.1) предыдущего раздела.

Лемма 4.1. *Для всех* $R > 0$ *при* $|E \cap B_R| \to 0$ *справедливо*

$$\widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E \cap B_R) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{E\cap B_R} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy \to 0.$$

Доказательство. Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $\rho > 0$ оценим

$$\int\limits_{E\cap B_R} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}} dy \leqslant \int\limits_{B_\rho^x \cap B_R} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}} dy + \int\limits_{(E\cap B_R)\setminus B_\rho^x} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \leqslant \psi^2(\rho, R+\rho) + \rho^{2-n} \int\limits_{E\cap B_R} |\mathbf{b}|^2\, dy. \tag{4.1}$$

Выбирая достаточно малое ρ, можно сделать сколь угодно малым первое слагаемое в правой части, а при фиксированном ρ и $|E \cap B_R| \to 0$ второе слагаемое в правой части стремится к нулю в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Лемма 4.1 доказана. □

Лемма 4.2. *Пусть E_j, $j = 1, \ldots, m$, – система непересекающихся (с точностью до нулевой меры) множеств в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любых положительных чисел ε, ρ и R, таких, что $\psi^2(\rho, R+\rho) < \varepsilon$, выполняется неравенство*

$$\sum_{j=1}^m \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E_j \cap B_R) \leqslant m\varepsilon + \rho^{2-n}\Lambda^2(R).$$

Доказательство. Из условия (1.14), аналогично (4.1), следует, что для каждого $j = 1, \ldots, m$, и чисел ε и ρ, указанных в утверждении леммы, выполняется

$$\widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E_j \cap B_R) \leqslant \varepsilon + \rho^{2-n} \int\limits_{E_j\cap B_R} |\mathbf{b}|^2\, dy.$$

Так как множества E_j могут пересекаться лишь по множеству нулевой меры, то суммируя полученные неравенства и используя условие (1.17) получаем

$$\sum_{j=1}^m \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E_j \cap B_R) \leqslant m\varepsilon + \rho^{2-n} \int\limits_{B_R} |\mathbf{b}|^2\, dy \leqslant m\varepsilon + \rho^{2-n}\Lambda^2(R).$$

Лемма 4.2 доказана. □

Как следствие леммы 4.1 также получаем следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть $R > 0$ и E_j монотонно возрастающая к множеству $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ последовательность множеств: $E_1 \subset E_2 \subset \ldots E_k \subset$*

.... Тогда

$$\widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E\cap B_R) = \lim_{j\to\infty} \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E_j\cap B_R).$$

Пусть $R>0$ и E_j монотонно убывающая к $E=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ последовательность множеств: $E_1\supset E_2\supset E_3\ldots\supset E_k\supset\ldots$. Тогда

$$\widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E\cap B_R) = \lim_{j\to\infty} \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E_j\cap B_R).$$

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе аналогично. Пусть $E=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$. Очевидно, что

$$\widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E\cap B_R) \geqslant \lim_{j\to\infty} \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E_j\cap B_R).$$

Покажем обратное неравенство. Для любого $k\in\mathbb{N}$ из определения $\widetilde{V}$ имеем

$$\widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E\cap B_R) \leqslant \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, E_k\cap B_R) + \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, (E\setminus E_k)\cap B_R).$$

Так как $(E\setminus E_k)\cap B_R$ является монотонно убывающей последовательностью множеств принадлежащих множеству конечной меры, то $|(E\setminus E_k)\cap B_R|\to 0$ при $k\to\infty$. Осталось применить лемму 4.1. Лемма 4.3 доказана. □

Лемма 4.4. *Вложение $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^2(\Omega, |\mathbf{b}|^2\,dx)$ является компактным.*

Доказательство. Пусть $\varphi_{R,r}\in C_0^\infty(B_{R+r})$ удовлетворяет $0\leqslant\varphi_{R,r}\leqslant 1$, $\varphi_{R,r}\geqslant 1$ в шаре B_R и $|\nabla\varphi_{R,r}|\leqslant 8r^{-1}$. Тогда в силу леммы 3.3 и условия (1.14),

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega\cap B_R} |\mathbf{b}|^2 v^2\,dx &\leqslant \int\limits_{\Omega\cap B_{R+r}} |\mathbf{b}|^2 (v\varphi_{R+r})^2\,dx\\ &\leqslant C(n)V(|\mathbf{b}|^2, r, \Omega\cap B_{R+r})\int\limits_{\Omega}(|\nabla(v\varphi_{R,r})|^2 + r^{-2}(v\varphi_{R,r})^2)\,dx\\ &\leqslant C(n)\psi^2(r, R+r)\int\limits_{\Omega\cap B_{R+r}}(|\nabla v|^2 + r^{-2}v^2)\,dx.\end{aligned}$$

Таким образом, для всех $0 < r < R$ используя последнюю оценку и условие (1.15) получим

$$\int\limits_{\Omega} |\mathbf{b}|^2 v^2\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega\setminus B_R} |\mathbf{b}|^2 v^2\, dx + \int\limits_{\Omega\cap B_R} |\mathbf{b}|^2 v^2\, dx$$

$$\leqslant (\Theta^2(R) + C(n)\psi^2(r,2R)) \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + C(n) r^{-2}\psi^2(r, R+r) \int\limits_{\Omega\cap B_{R+r}} v^2 dx.$$

Так как $\Theta(R)$ может быть сделано сколь угодно малым за счёт выбора $R > 0$, а $\psi(r, 2R)$ может быть сделано сколь угодно малым за счёт выбора $r > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $R(\varepsilon), C(\varepsilon) > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |\mathbf{b}|^2 v^2\, dx \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, dx + C(\varepsilon) \int\limits_{\Omega\cap B_{R(\varepsilon)}} v^2\, dx.$$

В силу компактности вложения $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^2(\Omega\cap B_R)$ для любого $R > 0$, отсюда следует компактность вложения $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^2(\Omega, |\mathbf{b}|^2\, dx)$. Лемма 4.4 доказана. □

5. Доказательство теоремы 1.3

Так как по теореме вложения Соболева $u \in L^{2n/(n-2)}(\Omega)$, то по неравенству Чебышева $|\{|u| > k\}| < \infty$ при любом $k > 0$ и $|\{|u| > k\}| \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть R_* такой, что $\Theta^2(R_*) \leqslant \nu^2/8$. Для $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant +\infty$ обозначим

$$\begin{aligned} g(t_1,t_2) &= \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, \{t_1 < u < t_2\}\cap B_{R_*}),\\ h(t_1,t_2) &= \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, \{t_1 \leqslant u < t_2\}\cap B_{R_*}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

По первому аргументу эти функции невозрастающие, а по второму неубывающие. Из леммы 4.3 следует, что при фиксированном t_2 выполняется

$$\lim_{t\to t_1+0} g(t,t_2) = g(t_1,t_2), \qquad \lim_{t\to t_1-0} h(t,t_2) = h(t_1,t_2), \tag{5.2}$$

то есть функция g по первому аргументу непрерывна справа , а функция h слева. Кроме того, из леммы 4.1 следует, что

$$\lim_{t_1\to t_2-0} g(t_1,t_2) = \lim_{t_1\to t_2-0} h(t_1,t_2) = 0. \tag{5.3}$$

Последнее соотношение верно том числе и если $t_2 = +\infty$.

Напомним обозначения (1.21), (1.22):

$$T_k(s) = \min(|s|, k) \operatorname{sign} s = \max(-k, \min(k, s)), \quad k \geqslant 0,$$
$$T_{k,l}(s) = T_l(s) - T_k(s), \quad 0 \leqslant k < l \leqslant \infty.$$

Пусть

$$\Omega(k, l) = \{k < |u| < l\} \cap \Omega. \tag{5.4}$$

Далее через χ_A будем обозначать характеристическую функцию множества A.

Из (2.4) и того, что $\nabla T_{k,l}(u) = \chi_{\Omega(k,l)} \nabla u$ почти всюду в Ω, следует

$$\begin{aligned} |\beta(T_{k,l}(u), v)| &\leqslant \|\mathbf{b}\chi_{\Omega(k,l)} v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla T_{k,l}(u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \big(C_0(n)\widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, \Omega(k,l) \cap B_{R_*}) + \Theta^2(R_*)\big)^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Докажем вспомогательное утверждение, в котором $C_0 = C_0(n)$ – константа в неравенстве (2.4).

Лемма 5.1. *Пусть для* $0 \leqslant k_{j+1} < k_j < k_{j-1} < \ldots < k_1 < k_0 = +\infty$ *выполняется*

$$g(k_{s+1}, k_s) < \frac{\nu^2}{8C_0}, \quad s = 0, \ldots, j. \tag{5.6}$$

Тогда

$$\|\nabla T_{k_{j+1},k_j}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu} \frac{\langle Lu, T_{k_{j+1},k_j}(u)\rangle}{\|\nabla T_{k_{j+1},k_j}(u)\|_{L^2(\Omega)}} + \sum_{s=0}^{j-1} \|\nabla T_{k_{s+1},k_s}(u)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Положим

$$u_s = T_{k_{s+1},k_s}(u), \quad s = 0, \ldots, j, \tag{5.8}$$

и выберем в (1.9) пробную функцию $v = u_j$. Получаем

$$\alpha(u, u_j) = -\beta(u, u_j) + \langle Lu, u_j \rangle. \tag{5.9}$$

Отметим, что

$$\alpha(u, u_j) = \alpha(u_j, u_j) \geqslant \nu \|\nabla u_j\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{5.10}$$

а так как $u_j \nabla u = u_j \nabla(u_j + u_{j-1} + \ldots + u_0)$, то

$$\beta(u, u_j) = \sum_{s=0}^{j} \beta(u_s, u_j).$$

Из неравенства (5.5) и условия (5.6) следует, что

$$|\beta(u, u_j)| \leqslant \sum_{s=0}^{j} |\beta(u_s, u_j)| \leqslant \frac{\nu}{2}\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} \sum_{s=0}^{j} \|\nabla u_s\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.11}$$

С помощью неравенств (5.10) и (5.11), из (5.9) получим

$$\nu\|\nabla u_j\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \langle Lu, u_j\rangle + \frac{\nu}{2}\|\nabla u_j\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} \sum_{s=0}^{j-1} \|\nabla u_s\|_{L^2(\Omega)},$$

откуда после сокращений следует

$$\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu}\frac{\langle Lu, u_j\rangle}{\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}} + \sum_{s=0}^{j-1} \|\nabla u_s\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.12}$$

С учётом обозначения (5.8) это в точности искомое неравенство (5.7). Лемма 5.1 доказана. □

Доказательство теоремы 1.3. Положим $k_0 = +\infty$. Определим убывающую последовательность неотрицательных чисел $k_1 > k_2 > k_3 > \dots$ индуктивным образом. Пусть $k_{j-1} > 0$ уже определено. Тогда полагаем

$$k_j = \inf\{t > 0 \,:\, g(t, k_{j-1}) \leqslant \nu^2/(8C_0(n))\}.$$

Из (5.3) следует, что $k_j < k_{j-1}$. В силу свойства (5.2), имеем $g(k_j, k_{j-1}) \leqslant \nu^2/(8C_0(n))$. Так как $g \leqslant h$ и функция h непрерывна слева, то либо $k_j = 0$, либо $h(k_j, k_{j-1}) \geqslant \nu^2/(8C_0(n))$. Если $k_j = 0$, то процесс построения останавливается.

В силу нашего определения последовательности k_j и леммы 4.2, в которой $\varepsilon = \nu^2/(16C_0(n))$, для произвольного $m \in \mathbb{N}$, такого, что определено $k_m > 0$, имеем

$$\begin{aligned} m\frac{\nu^2}{8C_0(n)} \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} h(k_{j+1}, k_j) &\leqslant \sum_{j=0}^{m-1} \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, \{k_{j+1} \leqslant |u| < k_j\} \cap B_{R_*}) \\ &\leqslant m\frac{\nu^2}{16C_0(n)} + \rho_*^{2-n}\Lambda^2(R_*), \end{aligned}$$

где ρ_* – такое положительное число, что $\psi^2(\rho_*, R_*+\rho_*) \leqslant \nu^2/(16C_0(n))$.

Следовательно,

$$m \leqslant m_* := \frac{16C_0(n)}{\nu^2}\rho_*^{2-n}\Lambda^2(R_*). \tag{5.13}$$

Таким образом, процесс построения последовательности k_j останавливается за конечное число шагов. и для номера p такого, что $k_p > 0$ и $k_{p+1} = 0$, справедлива оценка $p \leqslant m_*$.

Используем далее обозначение (5.8). Для каждого $j = 0, \dots, p$ запишем оценку (5.7) (или, что то же самое, (5.12)):

$$\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu} \frac{\langle Lu, u_j \rangle}{\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}} + \sum_{s=0}^{j-1} \|\nabla u_s\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.14}$$

Добавляя к левой и правой части $\sum_{s=0}^{j-1} \|\nabla u_s\|_{L^2(\Omega)}$, придём к оценке

$$\sum_{s=0}^{j} \|\nabla u_s\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu} \frac{\langle Lu, u_j \rangle}{\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}} + 2\sum_{s=0}^{j-1} \|\nabla u_s\|_{L^2(\Omega)}.$$

Итерируя эту оценку, получаем неравенство

$$\sum_{s=0}^{p} \|\nabla u_s\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu} \sum_{s=0}^{p} 2^{p-s} \frac{\langle Lu, u_s \rangle}{\|\nabla u_s\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Так как $\nabla u = \sum_{s=0}^{p} \nabla u_s$, то из последней оценки следует неравенство

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu} \sum_{s=0}^{p} 2^{p-s} \frac{\langle Lu, u_s \rangle}{\|\nabla u_s\|_{L^2(\Omega)}},$$

которое и составляет заявленную в формулировке теоремы оценку. Теорема 1.3 доказана. □

6. Доказательство теоремы 1.4

Будем пользоваться обозначениями (1.21), (1.22), (5.4). Пусть снова $R_* > 0$ такое, что $\Theta^2(R_*) \leqslant \nu^2/8$, для $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \infty$ функция $g(t_1, t_2)$ определяется как в (5.1), а

$$\widetilde{h}(t_1, t_2) = \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, \{t_1 < u \leqslant t_2\} \cap B_{R_*}).$$

Из лемм 4.1, 4.3 вытекают следующие свойства функций g и $\widetilde{h}$:

$$\lim_{t \to s+0} g(s,t) = \lim_{t \to s+0} \widetilde{h}(s,t) = 0, \tag{6.1}$$

$$g(s, +\infty) = \widetilde{h}(s, +\infty) = \lim_{t \to +\infty} g(s,t) = \lim_{t \to +\infty} \widetilde{h}(s,t), \tag{6.2}$$

$$\lim_{\tau \to t-0} g(s,\tau) = g(s,t), \qquad \lim_{\tau \to t+0} \widetilde{h}(s,\tau) = \widetilde{h}(s,t). \tag{6.3}$$

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 6.1. *Пусть* $0 \leqslant k < l \leqslant \infty$ *и*

$$g(k,l) \leqslant \frac{\nu^2}{8C_0(n)}. \tag{6.4}$$

Тогда

$$\|\nabla T_{k,l}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu}\frac{\langle L^*u, T_{k,l}(u)\rangle}{\|\nabla T_{k,l}(u)\|_{L^2(\Omega)}} + \|\nabla T_k(u)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.5}$$

Доказательство. В соотношении (1.10) выберем пробную функцию $v = T_{k,l}(u)$:

$$\alpha(T_{k,l}(u), u) = -\beta(T_{k,l}(u), u) + \langle L^*u, T_{k,l}(u)\rangle. \tag{6.6}$$

Так как $\nabla T_{k,l}(u) = \chi_{\Omega(k,l)}\nabla u$ почти всюду в Ω, то пользуясь условием эллиптичности (1.3) получаем

$$\alpha(T_{k,l}(u), u) = \alpha(T_{k,l}(u), T_{k,l}(u)) \geqslant \nu\|\nabla T_{k,l}(u)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.7}$$

С другой стороны, так как $u = T_k(u) + T_{k,l}(u) + (u - T_l(u))$, и

$$(u - T_l(u))\nabla T_{k,l}(u) = 0 \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega,$$

то

$$u\nabla T_{k,l}(u) = T_k(u)\nabla T_{k,l}(u) + T_{k,l}(u)\nabla T_{k,l}(u) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega,$$

что влечёт соотношение

$$\beta(T_{k,l}(u), u) = \int\limits_\Omega \mathbf{b}u\cdot\nabla T_{k,l}(u)\,dx = \beta(T_{k,l}(u), T_{k,l}(u)) + \beta(T_{k,l}(u), T_k(u)).$$

Используя неравенство (5.5), выбор R_* и условие (6.4), придём к неравенству

$$|\beta(T_{k,l}(u), u)| \leqslant \frac{\nu}{2}\|\nabla T_{k,l}(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|\nabla T_{k,l}(u)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla T_k(u)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.8}$$

Применяя неравенства (6.7) и (6.8) для оценки членов в (6.6), получаем после сокращений оценку (6.5). Лемма 6.1 доказана. □

Доказательство теоремы 1.4. Положим $k_0 = 0$ и будем строить возрастающую последовательность чисел k_j, $j \in \mathbb{N}$, следующим образом. Пусть число $k_{j-1} < +\infty$ определено. Тогда положим

$$k_j = \sup\{t > k_j \,:\, g(k_{j-1}, t) \leqslant \nu^2/(8C_0)\}.$$

В силу свойства (6.1) справедливо $k_j > k_{j-1}$. Так как $g \leqslant h$, из свойства (6.3) следует, что $g(k_{j-1}, k_j) \leqslant \nu^2/(8C_0)$, при этом либо $k_j = +\infty$, либо $h(k_j, k_{j-1}) \geqslant \nu^2/(8C_0(n))$. Если $k_j = +\infty$, то процесс построения останавливается.

В силу нашего определения последовательности k_j и леммы 4.2, в которой $\varepsilon = \nu^2/(16C_0(n))$, для произвольного $m \in \mathbb{N}$, такого, что определено $k_m < +\infty$, имеем

$$m\frac{\nu^2}{8C_0(n)} \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} h(k_j, k_{j+1}) \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, \{k_j < |u| \leqslant k_{j+1}\} \cap B_{R_*})$$
$$\leqslant m\frac{\nu^2}{16C_0(n)} + \rho_*^{2-n}\Lambda^2(R_*),$$

где ρ_* – такое положительное число, что $\psi^2(\rho_*, R_* + \rho_*) \leqslant \nu^2/(16C_0)$. Следовательно, для m справедлива оценка (5.13), т.е. $m \leqslant m_*$, где m_* определёно в (1.19).

Таким образом, процесс построения последовательности k_j останавливается за конечное число шагов и для номера p такого, что $k_p < \infty$ и $k_{p+1} = \infty$, справедлива оценка $p \leqslant m_*$. Применяя для каждого $j = 0, \ldots, p$ оценку (6.5) с параметрами $k = k_j$, $l = k_{j+1}$, получим

$$\|\nabla T_{k_j,k_{j+1}}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu}\frac{\langle L^*u, T_{k_j,k_{j+1}}(u)\rangle}{\|\nabla T_{k_j,k_{j+1}}(u)\|_{L^2(\Omega)}} + \|\nabla T_{k_j}(u)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Добавляя к обеим частям этого неравенства $\|\nabla T_{k_j}(u)\|_{L^2(\Omega)}$, в силу соотношения $T_{k_{j+1}}(u) = T_{k_j}(u) + T_{k_j,k_{j+1}}(u)$ получим

$$\|\nabla T_{k_{j+1}}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu}\frac{\langle L^*u, T_{k_j,k_{j+1}}(u)\rangle}{\|\nabla T_{k_j,k_{j+1}}(u)\|_{L^2(\Omega)}} + 2\|\nabla T_{k_j}(u)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Итерируя это соотношение по $j = 0, \ldots, p$ и пользуясь тем, что $T_{k_{p+1}}(u) = T_\infty(u) = u$, придём к неравенству (1.24). Теорема 1.4 доказана. □

7. Однозначная разрешимость задач Дирихле

В этом разделе мы доказываем теорему 1.2 об однозначной разрешимости задач (1.1), (1.2) для любой правой части $f \in W^{-1,2}(\Omega)$.

Доказательство теоремы 1.2. Из теоремы 1.1 следует, что задачи (1.1), (1.2) могут иметь не больше одного решения для любой правой части $f \in W^{-1,2}(\Omega)$.

Для доказательства существования можно, например, применить основанную на применении теоремы Фредгольма схему (см. [1, Раздел 8.2]), используя компактность вложения $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^2(\Omega, |\mathbf{b}|^2\,dx)$

(см. лемму 4.4). Мы получим решение как предел решений задач с ограниченными сносами в конечных областях.

Для $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим задачи Дирихле (1.1) в областях $\Omega_k = \Omega \cap B_k$ со сносом $\mathbf{b}^{(k)} = (T_k(b_1), \dots, T_k(b_n))$ (см. (1.21)):

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}(x)\nabla u_k) + \mathbf{b}^k(x) \cdot \nabla u_k = f, \quad f \in W^{-1,2}(\Omega), \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega_k).$$

Эти задачи однозначно разрешимы (напр., [1, Раздел 8.2]), а в силу теоремы 1.1 выполняется $\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega_k)} \leqslant K\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \leqslant M$ с константой M, не зависящей от номера k. Здесь и далее считаем функции u_k продолженными нулём вне Ω_k. Также для любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем $\mathbf{b}^{(k)}\varphi \to \mathbf{b}\varphi$ в $L^2(\Omega)$. С точностью до выделения подпоследовательности, $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ в $L^2(\Omega)$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, и $u_k \to u$ в $L^2(B_R)$ для любого $R > 0$. Переходя к пределу в интегральном тождестве

$$\int\limits_\Omega \mathbb{A}\nabla u_k \cdot \nabla\varphi\, dx + \int\limits_\Omega \mathbf{b}^{(k)}\varphi \cdot \nabla u_k\, dx = \langle f, \varphi\rangle$$

для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, и используя плотность $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_0^{1,2}(\Omega)$, придём к соотношению (1.7). Однозначная разрешимость задачи (1.1) доказана.

Для задачи (1.2) доказательство аналогично. Рассматриваем задачи Дирихле (1.2) в областях Ω_k со сносом $\mathbf{b}^{(k)}$:

$$-\operatorname{div}\big(\mathbb{A}(x)\nabla u_k + \mathbf{b}^k(x)u_k\big) = f, \quad f \in W^{-1,2}(\Omega), \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega_k).$$

Однозначная разрешимость этих задач известна, а в силу теоремы 1.1 имеет место равномерная оценка $\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega_k)} \leqslant K\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \leqslant M$ с константой M, не зависящей от номера k. С точностью до выделения подпоследовательности считаем, что $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ в $L^2(\Omega)$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, и $u_k \to u$ в $L^2(B_R)$ для любого $R > 0$.

Покажем, что

$$\mathbf{b}^{(k)}u_k \to \mathbf{b}u \quad \text{в} \quad L^2(\Omega \cap B_R) \quad \text{для всех} \quad R > 0.$$

В самом деле,

$$\mathbf{b}^{(k)}u_k - \mathbf{b}u = (\mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{b})u_k + \mathbf{b}(u_k - u). \tag{7.1}$$

Для первого слагаемого в правой части (7.1), из неравенства (3.2)

$$\int\limits_{\Omega\cap B_R} |\mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{b}|^2|u_k|^2\, dx \leqslant C_0(n)\widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, \{|\mathbf{b}| > \sqrt{n}k\} \cap B_R) \int\limits_\Omega |\nabla u_k|^2\, dx$$
$$\leqslant C_0(n)M \cdot \widetilde{V}(|\mathbf{b}|^2, \{|\mathbf{b}| > \sqrt{n}k\} \cap B_R) \to 0$$

при $k \to \infty$ в силу леммы 4.1. Второе слагаемое в правой части (7.1) стремится к нулю в $L^2(\Omega)$ в силу леммы 4.4 о компактности вложения $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^2(\Omega, |\mathbf{b}|^2\,dx)$.

Переходя к пределу в интегральном тождестве

$$\int\limits_{\Omega} \mathbb{A}\nabla u_k \cdot \nabla\varphi\,dx + \int\limits_{\Omega} \mathbf{b}^{(k)} u_k \cdot \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle$$

для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, и используя плотность $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_0^{1,2}(\Omega)$, придём к соотношению (1.8).

Теорема 1.2 доказана. □

8. Оценки решений неравенств

Скажем, что функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$, является решением неравенства $Lu \leqslant f$ в Ω, удовлетворяющим $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$, если $u_+ = \max(u, 0) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ и

$$\gamma(u, v) \leqslant \langle f, v\rangle \quad \text{для всех неотрицательных} \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Скажем, что функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$, является решением неравенства $Lu \geqslant f$ в Ω, удовлетворяющим $u \geqslant 0$ на $\partial\Omega$, если $u_- = \max(-u, 0) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ и

$$\gamma(u, v) \geqslant \langle f, v\rangle \quad \text{для всех неотрицательных} \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

В силу условий (1.3) и (1.4) формы α, β, γ корректно определены и ограничены на $W^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega)$ (см. (1.6)), соответственно корректно определяется и оператор $L : W^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ тем же отношением (1.9).

Сформулируем аналогичную теореме 1.1 оценку для решений неравенств, где также предполагается выполнение условий (1.14), (1.15), а величина $K = 2^{m_*+2}\nu^{-1}$ та же, что и в теореме 1.1 (значение m_* определено в (1.19)).

Теорема 8.1. *При выполнении условий* (1.14), (1.15) *для любого решения неравенства $Lu \leqslant f$ в Ω, удовлетворяющего $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$, справедлива оценка $\|u_+\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant K\|f\|_{W^{-1,2}}(\Omega)$, а для любого решения неравенства $Lu \geqslant f$ в Ω, удовлетворяющего $u \geqslant 0$ на $\partial\Omega$, справедлива оценка $\|u_-\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant K\|f\|_{W^{-1,2}}(\Omega)$*

Доказательство. Докажем оценку для u_+. В силу теоремы 1.3, найдётся последовательность $+\infty = k_0 > \ldots > k_p > k_{p+1} = 0$, $p \leqslant m_*$, такая, что

$$\|u_+\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu} \sum_{j=0}^{p} 2^{p-j} \frac{\langle Lu_+, T_{k_{j+1},k_j}(u_+)\rangle}{\|T_{k_{j+1},k_j}(u_+)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}}.$$

Для всех $j = 0, \ldots, p$ справедливо

$$\langle Lu_+, T_{k_{j+1},k_j}(u_+)\rangle = \langle Lu, T_{k_{j+1},k_j}(u_+)\rangle \leqslant \langle f, T_{k_{j+1},k_j}(u_+)\rangle,$$

где последнее соотношение выполняется в силу $Lu \leqslant f$. Таким образом,

$$\|u_+\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \frac{2}{\nu} \sum_{j=0}^{p} 2^{p-j} \leqslant 2^{m_*+2}\nu^{-1}\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)}.$$

Для случая $Lu \geqslant f$, $u \geqslant 0$ на $\partial\Omega$ оценка получается из первого случая, так как тогда $L(-u) \leqslant -f$, $-u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$, $(-u)_+ = u_-$. $\square$

В качестве следствия, получаем принцип максимума.

Следствие 8.1. *Для любого решения неравенства $Lu \leqslant 0$ в Ω, удовлетворяющего $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$, справедливо $u \leqslant 0$ почти всюду в Ω, а для любого решения неравенства $Lu \geqslant 0$ в Ω, удовлетворяющего $u \geqslant 0$ на $\partial\Omega$, справедливо $u \geqslant 0$ почти всюду в Ω.*

9. Оценки ёмкостной меры

В ряде приложений (напр. см. [50]) важно знать оценку ёмкостной меры, отвечающей данному оператору.

Далее в этому разделе также предполагаются выполненными условия (1.14), (1.15), а как следствие и неравенство (1.4). Далее K – число из формулировки теоремы 1.1, числа M, ν определены в (1.3), а C_H определено в неравенстве (1.4).

Пусть Ω, как и выше, область в $\mathbb{R}^n$, а F – компакт, содержащийся в Ω. Для построения ёмкостных потенциала и меры используем ту же конструкцию, что и в [51] (без использования теории вариационных неравенств). Введём класс

$$\mathcal{A}(F, \Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ : \ \varphi = 1 \quad \text{в окрестности} \quad F\}.$$

Пусть U_F^L – *ёмкостной потенциал* компакта F – определяется как $v+\varphi$, где φ – произвольная функция из $\mathcal{A}(F,\Omega)$, а v – решение задачи Дирихле

$$Lv = -L\varphi \quad \text{в} \quad \Omega, \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega \setminus F), \tag{9.1}$$

которое полагается продолженным нулём на F. В силу теоремы (1.2), задача (9.1) однозначно разрешима и функция $U_F^L \in W_0^{1,2}(\Omega)$ не зависит от выбора φ. По построению, $U_F^L = 1$ на F (как в обычном смысле, так и в вариационном) и $LU_F^L = 0$ в $\Omega \setminus F$. Кроме того, по принципу максимума $0 \leqslant U_F^L \leqslant 1$ в Ω.

Пусть также $\operatorname{cap}(F,\Omega)$ – ёмкость компакта F относительно Ω, которая определяется как

$$\operatorname{cap}(F,\Omega) = \inf_{\varphi\in\mathcal{A}(F,\Omega)} \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx.$$

Для произвольного $\varphi \in \mathcal{A}(F,\Omega)$ и функции v – решения задачи (9.1), в силу ограниченности операторов $L : W^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega \setminus F)$ (это следствие неравенства (1.4), см. (1.6)) и

$$L^{-1} : W^{-1,2}(\Omega \setminus F) \to W_0^{1,2}(\Omega \setminus F)$$

(это следствие теоремы 1.1) выполняется

$$\begin{aligned}\|\nabla U_F^L\|_{L^2(\Omega)} &= \|\nabla U_F^L\|_{L^2(\Omega\setminus F)} \leqslant \|\nabla v\|_{L^2(\Omega\setminus F)} + \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega\setminus F)}\\ &\leqslant K\|L\varphi\|_{W^{-1,2}(\Omega\setminus F)} + \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega\setminus F)} \leqslant ((M+C_H)K+1)\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора функции $\varphi \in \mathcal{A}(F,\Omega)$,

$$\|\nabla U_F^L\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant ((M+C_H)K+1)^2 \operatorname{cap}(F,\Omega). \tag{9.2}$$

Нетрудно показать, что U_F^L удовлетворяет неравенству $LU_F^L \geqslant 0$ в Ω (в смысле определения, данного в предыдущем разделе), откуда следует существование регулярной борелевской неотрицательной меры $\mu_F^L \in W^{-1,2}(\Omega)$, сосредоточенной на ∂F, такой, что

$$LU_F^L = \mu_F^L.$$

Меру μ_F^L назовём *ёмкостной мерой* компакта F (соответствующей оператору L).

Выбирая в определении решения (1.7) пробные функции из $\mathcal{A}(F,\Omega)$, получаем

$$\langle LU_F^L, \varphi\rangle = \langle \mu_F^L, \varphi\rangle = \mu_F^L(\partial F),$$

откуда в силу ограниченности оператора L, оценки (9.2) и произвольности выбора функции φ следует

$$\mu_F^L(\partial F) \leqslant (M + C_H)((M + C_H)K + 1)\mathrm{cap}\,(F, \Omega).$$

В силу соотношения $0 \leqslant U_F^L \leqslant 1$ для любых значений $k, l \geqslant 0$ выполняется $0 \leqslant T_{k,l}(U_F^L) \leqslant 1$ (см. (1.22)), поэтому $\langle \mu_F^L, T_{k,l}(U_F^L)\rangle \leqslant \mu_F^L(\partial F)$. Применяя теорему 1.3 (где в неравенстве (1.23) мы домножаем обе части неравенства на $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$), приходим к неравенству

$$\|\nabla U_F^L\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\nu}\sum_{j=0}^{p} 2^{p-j}\mu_F^L(\partial F) \leqslant K\mu_F^L(\partial F).$$

Так как в силу определения ёмкости

$$\|\nabla U_F^L\|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant \mathrm{cap}\,(F, \Omega),$$

совмещая последние два неравенства получаем

$$\mu_F^L(\partial F) \geqslant K^{-1}\mathrm{cap}\,(F, \Omega).$$

Из полученных оценок вытекает

Теорема 9.1. *Пусть μ_F^L – ёмкостная мера компакта F. Тогда*

$$K^{-1}\mathrm{cap}\,(F, \Omega) \leqslant \mu_F^L(\partial F) \leqslant (M + C_H)((M + C_H)K + 1)\mathrm{cap}\,(F, \Omega).$$

10. Условия принадлежности классам типа Като

Ряд условий выполнения (1.14) указан в [37].

В этом разделе приводятся некоторые способы проверки условий (1.12), (1.14), (1.16). Положим

$$W(x, r) = r^{2-n}\int\limits_{B_r^x} |\mathbf{b}(y)|^2\,dy, \quad W(r) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} W(x, r),$$

$$I_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|y|^{n-2}}\,dy, \quad I(R) = \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|y|^{n-2}}\,dy,$$

$$I(x, R) = \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x - y|^{n-2}}\,dy.$$

Очевидно, что $W(x,r) \geqslant 2^{2-n}W(x,\rho)$ и $W(r) \geqslant 2^{2-n}W(\rho)$ для $\rho \in [r/2, r]$. В частности,

$$W(r) \leqslant \frac{2^{n-2}}{\ln 2} \int\limits_{r}^{2r} W(\rho)\rho^{-1}\, d\rho. \tag{10.1}$$

Переходя к полярным координатам, будем иметь

$$\int\limits_{B_r^x} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy = W(x,r) + (n-2)\int\limits_{0}^{t} W(x,\rho)\rho^{-1}\, d\rho. \tag{10.2}$$

Выполняется соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy = (n-2)\int\limits_{0}^{+\infty} W(x,\rho)\rho^{-1}\, d\rho. \tag{10.3}$$

Из сходимости интеграла

$$\int\limits_{0} W(\rho)\rho^{-1}\, d\rho < \infty$$

в силу (10.1) и (10.2) и следует выполнение условия (1.14) с оценкой

$$\psi^2(t,R) \leqslant W(t) + (n-2)\int\limits_{0}^{t} W(\rho)\rho^{-1}\, d\rho \leqslant 2^n \int\limits_{0}^{2t} W(\rho)\rho^{-1}\, d\rho. \tag{10.4}$$

Оценим величину $I(x,R)$. Если $|x| < R/2$, то для $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_R$ выполняется $|y-x| \geqslant |y|/2$, откуда

$$I(x,R) \leqslant 2^{n-2} I(R).$$

Если же $|x| > R/2$, то

$$I(x,R) \leqslant \int\limits_{B^x_{|x|/2}} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy + 3^{n-2} I(R).$$

Здесь мы использовали то, что $|y-x| \geqslant |x|/2$ влечёт $|y-x| \geqslant |y|/3$. Оценим теперь интеграл в правой части, используя (10.2). Так как

$$W(x, |x|/2) \leqslant 3^{n-2} I(|x|/2), \tag{10.5}$$

то

$$\sup_{|x|>R/2} W(x, |x|/2) \leqslant 3^{n-2} I(R/4).$$

Таким образом,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} I(x,R) \leqslant \widetilde{\theta}^2(R) := 3^n I(R/4) + (n-2)\sup_{|x|>R/2}\int\limits_0^{|x|/2} W(x,\rho)\rho^{-1}\,d\rho. \tag{10.6}$$

и условие (1.16) выполняется, если правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $R\to\infty$. Соответственно, условие (1.15) выполняется с оценкой $\Theta^2(R)\leqslant C_0(n)\widetilde{\theta}^2(R)$.

Для оценки величины $V(|\mathbf{b}|^2,\mathbb{R}^n)$ можно использовать соотношение (10.3). С другой стороны, полагая в неравенстве (10.6) значение $R=0$, приходим к оценке

$$V(|\mathbf{b}|^2,\mathbb{R}^n)\leqslant (n-2)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int\limits_0^{|x|/2} W(x,\rho)\rho^{-1}\,d\rho + 3^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|y|^{n-2}}\,dy. \tag{10.7}$$

Из приведённых оценок получаем следующее

Предложение 10.1. *Пусть*

$$I_0<\infty,\qquad \int\limits_0 W(\rho)\rho^{-1}\,d\rho<\infty,\qquad \sup_{|x|>R/2}\int\limits_0^{|x|/2} W(x,\rho)\rho^{-1}\,d\rho\to 0$$

при $R\to\infty$. *Тогда выполняются условия* (1.12), (1.14), (1.16) *с оценками* (10.7), (10.4), (10.6), *соответственно.*

Пусть $\varphi_*:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ – ограниченная невозрастающая функция, удовлетворяющая условию Дини на бесконечности

$$\int\limits_1^{+\infty}\varphi_*(s)s^{-1}\,ds<\infty, \tag{10.8}$$

а $\psi_*,\xi_*:[0,1]\to[0,+\infty)$ – неубывающие функции, такие что $\psi_*(0)$, $\xi_*(0)=0$, удовлетворяющие условию Дини в нуле:

$$\int\limits_0\psi_*(s)s^{-1}\,ds<\infty,\qquad \int\limits_0\xi_*(s)s^{-1}\,ds<\infty. \tag{10.9}$$

Предположим, что

$$\int\limits_{B_r^x} |\mathbf{b}(y)|^2\,dy \leqslant r^{n-2}\xi_*(r), \quad 0<r<2, \tag{10.10}$$

$$\int\limits_{B_r^x} |\mathbf{b}(y)|^2\,dy \leqslant r^{n-2}\varphi_*(|x|)\psi_*\left(\frac{r}{|x|}\right), \quad 0<r<\frac{|x|}{2}. \tag{10.11}$$

Тогда (см. (10.4)) условие (1.14) выполняется с оценкой

$$\psi^2(t,R) \leqslant \xi_*(t) + (n-2)\int\limits_0^t \xi_*(s)s^{-1}\,ds \leqslant 2^n \int\limits_0^{2t} \xi_*(s)s^{-1}\,ds.$$

Интегрируя неравенство

$$|x|^{2-2n} \int\limits_{B^x_{|x|/2}} |\mathbf{b}(y)|^2\,dy \leqslant 2^{n-2}|x|^{-n}\varphi_*(|x|)\psi_*(1/2)$$

по $\mathbb{R}^n \setminus B_R$, пользуясь теоремой Фубини и тем, что множество $\{(x,y) : |x-y| < |x|/2\}$ содержит множество $\{(x,y) : |x-y| < |y|/3\}$, получим

$$\int\limits_{|y|>R/2} |\mathbf{b}(y)|^2 \int\limits_{B^y_{|y|/3}\setminus B_R} |x|^{2-2n}\,dx\,dy \leqslant 2^{n-2}\omega_n\psi_*(1/2)\int\limits_R^\infty \varphi_*(\rho)\rho^{-1}\,d\rho.$$

Отсюда,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|y|^{n-2}}\,dy \leqslant C(n)\psi_*(1/2)\int\limits_R^\infty \varphi_*(\rho)\rho^{-1}\,d\rho. \tag{10.12}$$

С другой стороны, (10.11) влечёт

$$\int\limits_0^{|x|/2} W(x,\rho)\rho^{-1}\,d\rho \leqslant 2^{n-2}\varphi_*(|x|)\int\limits_0^{1/2} \psi_*(s)s^{-1}\,ds.$$

Таким образом, сходимость интегралов (10.8), (10.9) гарантирует выполнение условия (1.16) (см. (10.6)), а, следовательно, и (1.15) с оценкой

$$
\begin{aligned}
\Theta^2(R) &\leqslant C_0(n) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} I(x,R) \\
&\leqslant C(n)\psi_*(1/2) \int\limits_{R/4}^{\infty} \varphi_*(\rho)\rho^{-1}\,d\rho + C(n)\varphi_*(R) \int\limits_0^{1/2} \psi_*(s)s^{-1}\,ds \\
&\leqslant C(n)\biggl(\psi_*(1/2) + \int\limits_0^{1/2} \psi_*(s)s^{-1}\,ds\biggr) \int\limits_{R/4}^{\infty} \varphi_*(\rho)\rho^{-1}\,d\rho.
\end{aligned}
$$

Далее, пользуясь условиями (10.10), (10.9) и неравенствами (10.2), (10.1) оценим

$$
\int\limits_{B_{1/2}} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|y|^{n-2}}\,dy \leqslant 2^n \int\limits_0^1 \xi_*(s)s^{-1}\,ds.
$$

В силу (10.10) также имеем

$$
\int\limits_{B_{16}\setminus B_{1/2}} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|y|^{n-2}}\,dy \leqslant C(n)\xi_*(1/2) \leqslant C(n) \int\limits_0^1 \xi_*(s)s^{-1}\,ds.
$$

Из последних двух неравенств и (10.12),

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathbf{b}(y)|^2}{|y|^{n-2}}\,dy \leqslant C(n)\psi_*(1/2) \int\limits_{16}^{\infty} \varphi_*(\rho)\rho^{-1}\,d\rho + C(n)\varphi_*(0) \int\limits_0^1 \psi_*(s)s^{-1}\,ds.
$$

Из последнего неравенства, (10.7) и (10.11),

$$
\begin{aligned}
V(|\mathbf{b}|^2,\mathbb{R}^n) &\leqslant C(n)\varphi_*(0) \int\limits_0^{1/2} \psi_*(s)s^{-1}\,ds \\
&\qquad + C(n)\psi_*(1/2) \int\limits_1^{\infty} \varphi_*(\rho)\rho^{-1}\,d\rho + C(n) \int\limits_0^1 \xi_*(s)s^{-1}\,ds.
\end{aligned}
$$

Автор благодарит А. И. Назарова и анонимного рецензента за полезные замечания к настоящей работе.

Список литературы

1. Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М., Наука, 1989.
2. M. Chicco, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale.* — Boll. Unione Mat. Ital. (3) **22**, (1967) 368–372.
3. M. Chicco, *Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale.* — Boll. Unione Mat. Ital. (4) **3** (1970), 384–394.
4. N.S. Trudinger, *Linear elliptic operators with measurable coefficients.* — Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (3) **27**, No. 2 (1973), 265-308 .
5. M. Chicco, *An apriori inequality concerning elliptic second order partial differential equations of variational type.* — Matematiche (Catania) **26** (1971), 173–182.
6. G. Bottaro, M. E. Marina, *Problema di Dirichlet per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati.* — Boll. Unione Mat. Ital. (4) **8** (1973), 46-56.
7. G. Bottaro, *Problema al contorno misto per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati.* — Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (8) **55**, No. 3–4 (1973), 187–193 .
8. G. Bottaro, *Alcune condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità della soluzione di una disequazione variazionale non coerciva.* — Ann. Mat. Pura Appl. (4) **106** (1975), 187–203.
9. M. Transirico, M. Troisi, *Equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui e di tipo variazionale in aperti non limitati.* — Boll. Unione Mat. Ital. (7) **2** (1988), 385—398.
10. C. Vitanza, P. Zamboni, *The Dirichlet problem for second order differential equations with coefficients in the Stummel class in unbounded domains.* — Ann. Univ. Ferrara **40** (1994), 97–110.
11. M. Transirico, M. Troisi, A. Vitolo, *Spaces of Morrey type and elliptic equations in divergence form on unbounded domains.* — Boll. Unione Mat. Ital. (7) **9** (1995), 153–174.
12. S. Monsurrò, M. Transirico, *Dirichlet problem for divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients.* — Bound. Value Probl. **2012**, 20 pp. (2012).
13. S. Monsurrò, M. Transirico, *A priori bounds in L^p for solutions of elliptic equations in divergence form.* — Bull. Sci. Math. **137**, No. 7 (2013), 851–866.
14. S. Monsurrò, M. Transirico, *On some L^p estimates for solutions of elliptic equations in unbounded domains.* — Math. Bohem. **140**, No. 4 (2015), 507–515.
15. J. Droniou, *Non-coercive Linear Elliptic Problems.* — Potential Anal. **17** (2002), 181–203.
16. L. Boccardo, *Some developments on Dirichlet problems with discontinuous coefficients.* — Boll. Unione Mat. Ital. **2**, No. 1 (2009), 285–297.
17. L. Boccardo, *Dirichlet problems with singular convection terms and applications.* — J. Diff. Eqs. **258**, No. 7 (2015), 2290–2314.
18. L. Boccardo, S. Buccheri, G.R. Cirmi, *Two Linear Noncoercive Dirichlet Problems in Duality.* — Milan J. Math. **86** (2018), 97–104.
19. S. Buccheri, *Gradient estimates for nonlinear elliptic equations with first order terms.* — Manuscripta Math. **165** (2021), 191–225.

20. L. Boccardo, L. Orsina, *Very singular solutions for linear Dirichlet problems with singular convection terms.* — Nonlinear Anal. **194** (2020), 111437.
21. G. Zecca, *Existence and uniqueness for nonlinear elliptic equations with lower-order terms.* — Nonlinear Anal. **75** (2012), 899–912.
22. E.M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Mathematical Series, No. 32, Princeton University Press, Princeton, NJ (1971).
23. L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, 3rd ed.. Springer New York, NY (2014).
24. L. Pick, A. Kufner, O. John, S. Fučík, *Function Spaces: Volume 1*, 2nd rev. and ext. ed. De Gruyter, Berlin, Boston (2012).
25. R. O'Neil, *Convolution operators and $L(p,q)$ spaces.* — Duke Math. J. **30** (1963), 129–142.
26. R. Hunt, *An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces*, — Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 803–807.
27. В. Г. Мазья, *Об отрицательном спектре многомерного оператора Шредингера.* — Докл. АН СССР **144**, No. 4 (1962), 721–722.
28. В. Г. Мазья, *К теории многомерного оператора Шредингера.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **28**, No. 5 (1964), 1145–1172
29. V. G. Mazya, I. E. Verbitski, *The Schrödinger operator on the energy space: boundedness and compactness criteria.* — Acta Math. **188** (2002), 263–302.
30. V. G. Mazya, I. E. Verbitski, *Infinitesimal form boundedness and Trudinger's subordination for the Schrödinger operator.* — Invent. math. **162** (2005), 81–136.
31. V. G. Mazya, I. E. Verbitski, *Form boundedness of the general second-order differential operator.* — Comm. Pure Appl. Math. **59**, No. 9 (2006), 1286–1329.
32. C. L. Fefferman, *The uncertainty principle.* — Bull. Amer. Math. Soc. **9** (1983), 129-206
33. F. Chiarenza, M. Frasca, *A remark on a paper by C. Fefferman.* — Proc. Amer. Math. Soc. **108**, No. 2 (1990), 407–409.
34. M. Schechter, *Hamiltonians for singular potentials.* — Indiana Univ. Math. J. **22** (1972), 483–503.
35. M. Schechter, *The spectrum of the Schrödinger operator.* — Trans. Amer. Math. Soc. **312**, No. 1 (1989), 115–128.
36. B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 251–275.
37. M. Aizenman, B. Simon, *Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators.* Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 209–273.
38. B. Simon, *Schrödinger semigroups.* — Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 447–526.
39. F. Chiarenza, E. Fabes, N. Garofalo, *Harnack's inequality for Schrödinger operators and the continuity of solutions.* — Proc. Amer. Math. Soc. **98**, No. 3 (1986), 415–425.
40. P. Zamboni, *Some function spaces and elliptic partial differential equations.* — Le Matematiche (Catania) **42**, No. 1–2 (1987), 171–178.
41. C. G. Simader, *An elementary proof of Harnack's inequality for Schrödinger operators and related topics.* — Math. Z. **203**, No. 1 (1990), 129–152.

42. M. Bramanti, *Potential theory for stationary Schrödinger operators: a survey of results obtained with nonprobabilistic methods.* — Le Matematiche (Catania) **47**, No. 1 (1992), 25–61.
43. Y. Pinchover, *On the equivalence of Green functions of second order elliptic equation in* $\mathbb{R}^n$. — Differential and Integral Equations **5**, No. 3 (1992), 481–493.
44. K. Kurata, *Continuity and Harnack's inequality for solutions of elliptic partial differential equations of second order.* — Indiana University Math. J. **43**, No. 2 (1994), 411–440.
45. Qi Zhang, *A Harnack inequality for the equation* $\nabla(a\nabla u) + b\nabla u = 0$*, when* $|b| \in K_{n+1}$. — Manuscripta Math. **89** (1995), 61–77.
46. P. Zamboni, *The Harnack inequality for quasilinear elliptic equations under minimal assumptions.* — Manuscripta Math. **102** (2000), 311–323.
47. Ю. А. Алхутов, М. Д. Сурначёв, *Оценки фундаментального решения для дивергентного эллиптического уравнения со сносом.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **489** (2020), 7–35.
48. V. Kozlov, A. I. Nazarov, *A comparison theorem for nonsmooth linear operators.* — Potential Analysis **54**, 471–481 (2021).
49. E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.
50. W. Littman, G. Stampacchia and H. F. Weinberger, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients.* — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **17** (1963), 45–79.
51. Yu. Alkhutov, M. Surnachev, *Global Green's function estimates for the convection–diffusion equation.* — Complex Variables and Elliptic Equations **67**, No. 5 (2022), 1046–1075.

Surnachev M. D. Estimates of solutions to the noncoercive Dirichlet problem for a second order elliptic equation in divergence form with drift from a Kato class.

For a second order linear elliptic equation with uniformly elliptic principal part in divergence form and drift from a Kato–Stummel type class we establish the unique solvability and estimates of solutions of the corresponding noncoercive Dirichlet problem.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН
Миусская пл., 4
125047 Москва, Россия
E-mail: peitsche@yandex.ru

Поступило 1 декабря 2022 г.