

С. А. Назаров

**АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЗАДАЧИ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ  
УСЛОВИЯМИ ВИНКЛЕРА–СТЕКЛОВА  
НА МАЛЫХ УЧАСТКАХ ГРАНИЦЫ**

**1. Постановка задачи.** Пусть  $\Omega$  – связное трёхмерное тело, ограниченное гладкой (класса  $C^\infty$  для простоты; ср. разд. 7 (i)) поверхностью  $\partial\Omega$ , на которой зафиксируем попарно различные точки  $P^0, \dots, P^{J-1}$ . Масштабированием сведем характерный размер тела к единице. Начало общей декартовой системы координат  $x = (x_1, x_2, x_3) =: x^0$  поместим в точку  $P^0 = \mathcal{O}$  и в окрестностях  $\mathcal{V}^j$  остальных точек введем локальные системы декартовых координат  $x^j = (x_1^j, x_2^j, x_3^j)$ , причём ось  $x_3^j$  направим вдоль внешней нормали  $\nu(P^j)$  – оси  $x_1^j$  и  $x_2^j$  располагаются в касательной плоскости  $\Pi^j \ni P^j$ . Введем ещё систему криволинейных координат  $(s_1^j, s_2^j, n^j)$ , где  $n^j$  – ориентированное расстояние до  $\partial\Omega$ ,  $n^j < 0$  в  $\Omega \cap \mathcal{V}^j$ , а  $s_i^j$  – ориентированное расстояние до точки  $P^j$ , измеренное вдоль проекции оси  $x_i^j$  на поверхность  $\Gamma^j = \mathcal{V}^j \cap \partial\Omega$ ,  $i = 1, 2$ . Наконец, определим множества

$$\omega_j^\varepsilon = \{x \in \Gamma^j : \xi_\#^j = \varepsilon^{-1} x_\#^j \in \varpi_j\} \subset \Gamma^j, \quad j = 0, \dots, J-1,$$

называемые далее контактными пятнами. Здесь  $\varepsilon > 0$  – малый параметр, а  $\varpi_j \subset \Pi^j$  – область, ограниченная простым гладким замкнутым контуром  $\partial\varpi_j$ . Выбор “центра”  $P^j$  пятна  $\omega_j^\varepsilon$  – математическая условность, так как в реальных задачах  $\varepsilon$  – малый, но фиксированный размер. Поэтому можно считать, что центр тяжести фигуры  $\omega_j$  совмещен с началом координат на плоскости.

Рассмотрим спектральную краевую задачу теории упругости для тела  $\Omega$

$$L(\nabla_x)u^\varepsilon(x) := D(-\nabla_x)^\top AD(\nabla_x)u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

---

*Ключевые слова:* система уравнений теории упругости, сингулярные возмущения, спектральные условия Винклера–Стеклова, асимптотика собственных чисел, дальное действие.

$$N(x, \nabla_x)u^\varepsilon(x) := D(\nu(x))^\top AD(\nabla_x)u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \overline{\omega^\varepsilon}, \quad (1.2)$$

$$N(x, \nabla_x)u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon Q(x)u^\varepsilon(x), \quad x \in \omega^\varepsilon := \omega_0^\varepsilon \cup \dots \cup \omega_{j-1}^\varepsilon. \quad (1.3)$$

Здесь  $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)^\top$  – вектор смещений, интерпретируемый как столбец, т.е.  $\top$  – знак транспонирования,  $\nu$  – единичный вектор (столбец) внешней нормали,

$$D(\nabla_x)^\top = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}\partial_3 & 2^{-1/2}\partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & 2^{-1/2}\partial_3 & 0 & 2^{-1/2}\partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 2^{-1/2}\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$$\nabla_x = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

и  $A$  – симметричная и положительно определённая  $(6 \times 6)$ -матрица упругих постоянных однородного тела  $\Omega$  (конкретный вид матриц жесткости  $A$  при изотропии, ортотропии и других частных случаях анизотропии можно найти, например, в книгах [1–3]). Кроме того,  $N(x, \nabla_x)u(x)$  – вектор нормальных напряжений, найденный по столбцу напряжений

$$AD(\nabla_x)u = (\sigma_{11}(u), \sigma_{22}(u), \sigma_{33}(u), \sqrt{2}\sigma_{23}(u), \sqrt{2}\sigma_{31}(u), \sqrt{2}\sigma_{12}(u))^\top, \quad (1.5)$$

где  $\sigma_{pq}(u)$  – декартовы компоненты тензора напряжений, вызванного смещениями  $u$ . Множители  $2^{\pm 1/2}$  введены в определения (1.4) и (1.5) для того, чтобы уравнивать естественные нормы тензора второго ранга и изображающего его столбца высотой шесть. Таким образом, принята матричная форма записи определяющих соотношений в линейной теории упругости, называемые the Voigt–Mendel notation в англоязычной литературе, но связанные с именем С. Г. Лехницкого в русскоязычной (см. [4] и [1, 3] соответственно). Наконец,  $\lambda^\varepsilon$  – спектральный параметр, а  $Q$  – ортогональный проектор в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , гладко зависящий от  $x \in \partial\Omega$ . Механически осмыслены две ситуации. В первой проектор – единичная матрица,

$$Q(x) = \mathbb{I}_3, \quad (1.6)$$

и во второй он задан формулой

$$Q(x) = \nu(x)\nu(x)^\top. \quad (1.7)$$

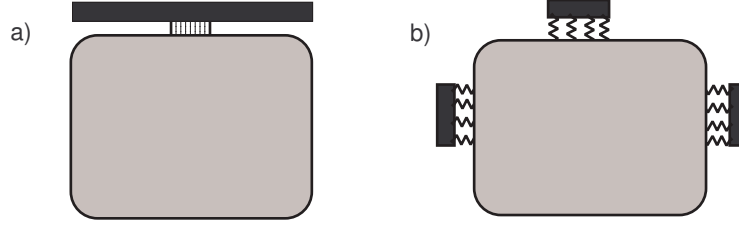


Рис. 1. Два способа фиксации тела – эластичное (а) и пружинное (б). Они моделируются спектральными условиями с проекторами (1.6) и (1.7) соответственно.

В первом случае крепление осуществляется посредством эластичных клеевых пятнышек (рис. 1, а), каждое из которых способно препятствовать движению тела во всех направлениях, а во втором – при помощи густых семейств мелких пружинок (рис. 1, б), реагирующих только на смещения тела в нормальном направлении (ср. [2]). Далее называем эти способы крепежа эластичным и пружинным. Поскольку интенсивность реакции – постоянная  $\gamma > 0$ , имеем  $\lambda^\varepsilon = \gamma \varsigma_\varepsilon^2$ , где  $\varsigma_\varepsilon > 0$  – частота колебаний. Тело  $\Omega$  считается невесомым, но в разд. 7 (iii) обсуждается спектральная задача, состоящая из краевых условий (1.2), (1.3) и системы дифференциальных уравнений

$$L(\nabla_x)u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon \gamma_\Omega u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.8)$$

При этом  $\gamma_\Omega > 0$  – постоянная плотность тела  $\Omega$ .

Вариационная постановка задачи (1.1)–(1.3) апеллирует к интегральному тождеству [5, 6]

$$E(u^\varepsilon, \psi; \Omega) = \lambda^\varepsilon (Qu^\varepsilon, \psi)_{\omega^\varepsilon} \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \quad (1.9)$$

где  $(\cdot, \cdot)_\Xi$  – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега  $L^2(\Xi)$  и  $H^1(\Omega)$  – пространство Соболева (скалярный и векторный случаи не различаем в обозначениях),

$$E(u, \psi; \Omega) = (AD(\nabla_x)u, D(\nabla_x)\psi)_\Omega, \quad (1.10)$$

а  $E(u^\varepsilon, u^\varepsilon; \Omega)$  – удвоенная упругая энергия, запасённая телом  $\Omega$ .

Форма (1.10) обладает полиномиальным свойством (см. [7] и [8, пример 1.12]), а именно, для любой ограниченной липшицевой области

$\Xi \subset \mathbb{R}^3$  имеет место равносильность

$$u \in H^1(\Xi), E(u, u; \Xi) = 0 \Leftrightarrow u \in \mathcal{R}. \quad (1.11)$$

При этом  $\mathcal{R} = \{u(x) = d(x)a \mid a \in \mathbb{R}\}$  – линейал жестких смещений с  $(3 \times 6)$ -матрицей

$$d(x) = (d^t(x), d^r(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}x_3 & -2^{-1/2}x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -2^{-1/2}x_3 & 0 & 2^{-1/2}x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2^{-1/2}x_2 & -2^{-1/2}x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

причём  $d^t = \mathbb{I}_3$  – единичный и  $d^r(x)$  – кососимметричный  $(3 \times 3)$ -блоки, описывающие поступательные и вращательные смещения. Благодаря присутствию множителей  $2^{-1/2}$  матрицы (1.4) и (1.12) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} D(\nabla_x)D(x)^\top &= \mathbb{I}_6, \quad D(\nabla_x)d(x)^\top = \mathbb{O}_6, \\ d(\nabla_x)^\top d(x)|_{x=0} &= \mathbb{I}_6, \quad d(\nabla_x)D(x)^\top|_{x=0} = \mathbb{O}_6, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $\mathbb{O}_m$  и  $\mathbb{I}_m$  – нулевая и единичная матрицы размером  $m \times m$ .

Для поля  $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ , подчиненного полным или частичным условиям Дирихле

$$Q(x)u(x) = 0, \quad x \in \omega^\varepsilon = \omega_0^\varepsilon \cup \dots \cup \omega_{J-1}^\varepsilon \quad (1.14)$$

(см. формулы (1.6) и (1.7) соответственно) справедливо неравенство

$$\|u; H^1(\Omega)\|^2 \leq c\varepsilon^{-\alpha} E(u, u; \Omega), \quad (1.15)$$

причём, как установлено в [9, § 2], для достижения минимально возможного показателя  $\alpha = 1$  в неравенстве в случае (1.6) необходимо и достаточно, чтобы среди точек  $P^0, \dots, P^{J-1}$  нашлись три, являющиеся вершинами невырожденного треугольника, а значит,  $J \geq 3$  и

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_1^0 & \dots & P_1^{J-1} \\ P_2^0 & \dots & P_2^{J-1} \\ P_3^0 & \dots & P_3^{J-1} \end{pmatrix} = 3, \quad (1.16)$$

а в случае (1.7) возникает более ограничительный критерий:  $J \geq 6$  и

$$\dim \mathcal{L}^0 = 6. \quad (1.17)$$

Иными словами, пространство  $\mathbb{R}^6$  совпадает с линейной оболочкой  $\mathcal{L}^0$  столбцов высотой шесть

$$d(P^0)^\top \nu(P^0), \dots, d(P^{J-1})^\top \nu(P^{J-1}). \quad (1.18)$$

**Пример 1.1.** 1) Для единичного куба  $\mathbb{Q} = \{x : |x_k| < 1/2\}$  следующие точки обеспечивают требование (1.17):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \\ & \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

2) Для кругового цилиндра  $\{x : x_1^2 + x_2^2 < 1, |x_3| < 1/2\}$  при любом расположении контактных пятен поворот вокруг оси аппликата, т.е. последний столбец матрицы (1.12), удовлетворяет условию (1.14) с проектором (1.7). Если же пятна размещены на основаниях цилиндра (на его боковой поверхности), то к повороту добавляются поступательные смещения вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$  (вдоль оси  $x_3$ ), т.е. первый и второй (третий) столбцы матрицы (1.12).

Неравенство Корна (см. [9, 10] и разд. 2) показывает, что для проектора (1.6) в качестве скалярного произведения в пространстве Соболева  $H^1(\Omega)$  можно взять билинейную форму

$$\langle u, \psi \rangle_\varepsilon = E(u, \psi; \Omega) + \varepsilon^{-1}(Qu, \psi)_{\omega^\varepsilon}. \quad (1.19)$$

Согласно примеру 1.1 (2) в случае проектора (1.7) требуются дополнительные геометрические ограничения, например, указанные формулами (1.17) и (1.18), – иначе форма (1.19) вырождается на нетривиальном подпространстве в  $\mathcal{R}$  (ср. пример 1.1 (2)).

В пространстве Соболева  $\mathcal{H}^\varepsilon = H^1(\Omega)$ , снабжённом скалярным произведением (1.19), определим положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряжённый оператор  $\mathcal{K}^\varepsilon$  при помощи тождества

$$\langle \mathcal{K}^\varepsilon u, \psi \rangle_\varepsilon = (Qu, \psi)_{\omega^\varepsilon} \quad \forall u, \psi \in \mathcal{H}^\varepsilon. \quad (1.20)$$

Оператор  $\mathcal{K}^\varepsilon$  компактный, и в силу теорем 10.1.5 и 10.2.2 [11] его существенный спектр состоит из одной точки  $\kappa = 0$ , а дискретный спектр образует бесконечно малую последовательность

$$\kappa_1^\varepsilon \geq \kappa_2^\varepsilon \geq \dots \geq \kappa_m^\varepsilon \geq \dots \rightarrow +0. \quad (1.21)$$

Соответствующие собственные векторы можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$\langle u_{(m)}^\varepsilon, u_{(n)}^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (1.22)$$

где  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  – натуральный ряд и  $\delta_{m,n}$  – символ Кронекера.

В силу формул (1.19) и (1.20) вариационная задача (1.9) эквивалентна абстрактному уравнению

$$\mathcal{K}^\varepsilon u^\varepsilon = \kappa^\varepsilon u^\varepsilon \text{ в } \mathcal{K}^\varepsilon, \quad (1.23)$$

причём сопутствующая связь спектральных параметров

$$\kappa^\varepsilon = \varepsilon(1 + \varepsilon\lambda^\varepsilon)^{-1} \quad (1.24)$$

переделывает последовательность (1.21) в монотонную неограниченную последовательность

$$0 = \lambda_1^\varepsilon = \dots = \lambda_6^\varepsilon < \lambda_7^\varepsilon \leq \lambda_8^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_m^\varepsilon \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (1.25)$$

собственных чисел задачи (1.9) (или (1.1)–(1.3) в дифференциальной постановке).

Рассмотрим ситуацию (1.7) и предположим на время, что множества  $\Gamma^0, \dots, \Gamma^{J-1} \subset \partial\Omega$  лежат в плоскости  $\{x : x_3 = 0\}$ , т.е.  $\nu(P^j) = (0, 0, 1)^\top = e_{(3)}$  и  $Q(x) = \text{diag}\{0, 0, 1\}$ . Теперь продольный вектор смещений из трёхмерного линейного множества  $\mathcal{R}_\perp = \{(c_1 - c_0x_2, c_2 + c_0x_1, 0)^\top \mid c_q \in \mathbb{R}\}$  удовлетворяет задаче (1.1)–(1.3) с любым параметром  $\lambda^\varepsilon$ , т.е. при её естественной формулировке спектр занимает всю комплексную плоскость  $\mathbb{C}$ . Такие же аномалии обнаружены в примере 1.1 (2) и далее в примере 5.2 (1). Разумеется, можно сузить вариационную задачу (1.9) на подпространство  $\mathcal{H}_\perp^\varepsilon = \{u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon : (u^\varepsilon, p)_{\omega^\varepsilon} = 0 \forall p \in \mathcal{R}_\perp\}$ , получив дискретный спектр, однако механическая интерпретация указанных ограничений проблематична, а инженерная реализация такого крепежа неосуществима из-за неконтролируемого продольного сдвига с сопутствующим разрушением.

Кратко опишем строение статьи. В разд. 2 при помощи подхода из [9, § 2] выводится асимптотически точное неравенство Корна для случая проектора (1.6) при  $J = 1$ , которое используется при обосновании асимптотики в разд. 6. В разд. 3 подробно изложено построение главных членов асимптотики собственных пар задачи (1.9) в случае полного контакта на единственном пятне  $\omega_0^\varepsilon$ , расположенном на плоском участке  $\Gamma^0 \subset \partial\Omega$ . Найдена предельная задача (3.3), (3.4), (3.24) (или (3.25) в вариационной постановке), включающая интегральные операторы (3.23), и проверена дискретность её спектра (теорема 3.1). В разд. 7 (ii) обсуждаются бесконечные асимптотические ряды.

В разд. 4 без особых комментариев рассматривается задача (1.1)–(1.3) с проекторами (1.6) или (1.7) при выполнении ограничений (1.16) или (1.17) соответственно. Благодаря таким ограничениям построение

асимптотики мало отличается от проведённого в [12] для аналогичной, но скалярной задачи Стеклова. Предельная задача – совокупность ( $j = 0, \dots, J-1$ ) краевых задач (4.3), (4.4), (4.9) в полупространстве  $\mathbb{R}_+^3$ , связанных интегральными операторами и симметричной положительно определённой матрицей (4.9), – описывает дальное действие сингулярных спектральных возмущений краевых условий Неймана на мелких множествах  $\omega_0^\varepsilon, \dots, \omega_{J-1}^\varepsilon$ . Впервые подобное взаимодействие было обнаружено в статье [13] для иной (скалярной) задачи о концентрированных массах, однако для векторной задачи теории подобный результат получен, по-видимому, впервые.

Основные новшества формального асимптотического анализа представлены в разд. 5, где рассмотрена задача с проектором (1.7), но без предположения (1.17). Если в разд. 4 основную роль в асимптотическом анзаце (4.1) играют поступательные смещения около точек  $P^0, \dots, P^{J-1}$ , то теперь приходится принимать во внимание и повороты. В результате возникают новые ограничения (см. формулы (5.1) и (5.4)) и интегральные характеристики (5.18) областей  $\omega_0^\varepsilon, \dots, \omega_{J-1}^\varepsilon$ . Предельная задача (5.19) несколько отличается от (4.10) и для нее сформулирована теорема 5.3 о дискретности спектра и оценке погрешностей. Кроме того, в разд. 5 проверяется, что ограничение на столбцы (5.4) обеспечивает приемлемое неравенство Корна.

В разд. 6 проводится обоснование асимптотик собственных пар, полученных в предыдущих разделах. Среди трёх асимптотических формул выбираем ту, которая требует не самых громоздких вычислений, но и не является простейшей, а именно, случай  $J = 1$ , разобранный в разд. 2 и разд. 3. Схема оправдания асимптотик одинакова для всех рассмотренных задач и, более того, мало отличается от таковой для скалярной задачи Стеклова [12], а именно, доказывается предложение 6.3 о сходимости, оцениваются невязки, оставленные в уравнении (1.23) построенным приближённым решением, применяется лемма 6.1 о “почти собственных” числах и векторах и в конце концов проверяются теоремы 3.2 и 6.4, устанавливающие порядки погрешностей.

В последнем разделе перечисляются доступные обобщения и формулируются открытые вопросы.

В большинстве работ по асимптотическому анализу сингулярно возмущённых краевых задач, нуждающемуся в построении нескольких

членов пограничных слоев около участков поверхности, предполагается, что в окрестности мелких сингулярных возмущений граница уплощена. С одной стороны это делается для упрощения выкладок (ср. разд. 7 (i) и (ii)), но с другой стороны в часто изучаемой задаче Стеклова, тесно связанной с линейной теорией волн на поверхности вязкой жидкости (см., например, [14,15]), водяную гладь разумно считать плоской. Поверхности рассматриваемых в данной работе упругих тел зачастую бывают искривленными, но все-таки далее участки  $\Gamma^j \subset \partial\Omega$  считаются уплощенными именно для упрощения сопутствующих вычислений, однако в замечаниях 3.1 и 6.3 (см. также конец разд. 7 (i)) поясняется, что такое допущение не является обременительным в рассматриваемых случаях ввиду принятых предположений о распределении подмножеств  $\omega_0^\varepsilon, \dots, \omega_{J-1}^\varepsilon$  на поверхности  $\partial\Omega$  (см. разд. 3 и разд. 4) или, наоборот, выводит асимптотический анализ за рамки данной работы<sup>1</sup> (см. разд. 5).

**2. Уточнённое неравенство Корна в частном случае.** Покажем, как проверяется неравенство (1.15) в частном случае  $J = 1$  и  $Q = \mathbb{I}_3$  (см. [9, § 2]) по поводу общего случая). Представим вектор-функцию  $u \in H^1(\Omega)$  в виде

$$u(x) = d(x)\mathbf{u} + u^\perp(x), \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{u}^r \end{pmatrix} = \left( \int_{\Omega} d(x)^\top d(x) dx \right)^{-1} \int_{\Omega} d(x)^\top u(x) dx, \quad (2.2)$$

$$\int_{\Omega} d(x)^\top u^\perp(x) dx = 0 \in \mathbb{R}^6.$$

Последнее условие ортогональности обеспечивает такое неравенство Корна [10]:

$$\|u^\perp; H^1(\Omega)\|^2 \leq C_\Omega E(u^\perp, u^\perp; \Omega) = C_\Omega E(u, u; \Omega). \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>Автор готовит статью с разнообразными примерами, в которых искривлённость границы вблизи участков возмущения играет главенствующую роль при асимптотическом анализе.



Одномерное неравенство Харди

$$\int_0^{\infty} |U(r_0)|^2 dr_0 \leq 4 \int_0^{\infty} \left| \frac{dU}{dr_0}(r_0) \right|^2 r_0^2 dr_0 \quad \forall U \in C_c^1[0, +\infty), \quad (2.4)$$

проинтегрированное по угловым переменным  $\varphi^0$  на полусфере, показывает при учёте формулы  $dx = r_0^2 dr_0 ds_{\varphi^0}$ , что

$$\|(\varepsilon + r_0)^{-1} u^\perp; L^2(\Omega)\|^2 \leq \|r_0^{-1} u^\perp; L^2(\Omega)\|^2 \leq c_\Omega \|u^\perp; H^1(\Omega)\|^2. \quad (2.5)$$

Здесь  $r_j = |x - P^j|$  при  $j = 0$ , и далее в формулах, пригодных при любом индексе  $j$ , это уточнение не приводим. Из соотношения (2.5), в частности, вытекает, что

$$\|u^\perp; L^2(\{x : r_0 < \varrho\varepsilon\})\|^2 \leq c^2 \varepsilon^2 \|u^\perp; H^1(\Omega)\|^2, \quad \text{где } \varrho \geq \text{diam}\omega_0,$$

а значит, посредством растяжения координат выводим следовое неравенство

$$\|u^\perp; L^2(\omega_j^\varepsilon)\|^2 \leq c_\Omega^j \varepsilon \|u^\perp; H^1(\Omega)\|^2. \quad (2.6)$$

Столбец (2.2) удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{d}(\omega_0^\varepsilon)\mathbf{u} = \int_{\omega_0^\varepsilon} d(x)^\top (u(x) - u^\perp(x)) ds_x, \quad \mathbf{d}(\omega_0^\varepsilon) = \int_{\omega_0^\varepsilon} d(x)^\top d(x) ds_x,$$

в которых  $\mathbf{d}(\omega_0^\varepsilon)$  – матрица Грама размером  $6 \times 6$ , симметричная и положительно определённая. При этом матрица  $Y^\varepsilon \mathbf{d}(\omega_0^\varepsilon) Y^\varepsilon$ , где  $Y^\varepsilon = \text{diag}\{\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-2}\}$ , и обратная для неё имеют нормы, равномерно относительно  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  отделённые от нуля. Таким образом,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}^t|^2 + \varepsilon^2 |\mathbf{u}^r|^2 &\leq c\varepsilon^{-2} (\|u; L^2(\omega_0^\varepsilon)\|^2 + \|u^\perp; L^2(\omega_0^\varepsilon)\|^2) \\ &\leq c\varepsilon^{-1} (\varepsilon^{-1} \|u; L^2(\omega_0^\varepsilon)\|^2 + E(u^\perp, u^\perp; \Omega)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В силу формул (2.3), (2.7) и (2.1) справедлива оценка

$$\|u; H^1(\Omega)\|^2 \leq \varepsilon^{-3} (E(u, u; \Omega) + \varepsilon^{-1} \|u; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2), \quad (2.8)$$

из которой вытекает неравенство (1.15) при  $\alpha = 3$ . Отметим, что  $\omega^\varepsilon = \omega_0^\varepsilon$  в этом разделе.

**3. Одно эластичное контактное пятно.** Как и в разд. 2, считаем, что  $J = 1$  и  $Q = \mathbb{I}_3$ , но дополнительно  $\Gamma^0$  – участок плоскости  $\{x : x_3 = 0\}$  и  $\Omega \subset \mathbb{R}_-^3 = \{x : x_3 < 0\}$ . Асимптотическое представление положительного собственного числа задачи (1.9) ищем в виде

$$\lambda_{m+6}^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\mu_m + \dots, \quad (3.1)$$

а соответствующей собственной вектор-функции – в виде

$$u_{(m+6)}^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}d^r(x)a^r + d^t a^t + w_{(m)}(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 v_{(m)}(x) + \dots \quad (3.2)$$

Здесь многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого формального анализа (ср. разд. 7 (ii)), а  $\mu_m \in \mathbb{R}_+$ ,  $a^t, a^r \in \mathbb{R}^3$  и  $w_{(m)}, v_{(m)}$  – число, столбцы и вектор-функции, подлежащие определению. Подставим анзацы (3.1) и (3.2) в задачу (1.1)–(1.3), перейдем к растянутым координатам  $\xi = \varepsilon^{-1}x$  и соберем члены порядка  $\varepsilon^{-2}$  в системе дифференциальных уравнений и порядка  $\varepsilon^{-1}$  в краевых условиях. В результате придем к спектральной краевой задаче в полупространстве  $\mathbb{R}_-^3 = \{\xi : \xi_3 < 0\}$ :

$$L(\nabla_\xi)w(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_-^3, \quad (3.3)$$

$$N_\dagger(\nabla_\xi)w(\xi_\#, 0) = 0, \quad \xi_\# = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad (3.4)$$

$$N_\dagger(\nabla_\xi)w(\xi_\#, 0) = \mu(w(\xi_\#, 0) + d(\xi_\#, 0)a), \quad \xi_\# \in \varpi. \quad (3.5)$$

При этом  $d$  – матрица (1.12) и  $a = ((a^t)^\top, (a^r)^\top)^\top$  – столбец из  $\mathbb{R}^6$ , а  $N_\dagger(\nabla_\xi)$  – дифференциальный оператор краевых условий (1.2) при  $\nu(P^0) = e_{(3)}$ .

**Замечание 3.1.** Большой множитель  $\varepsilon^{-1}$  в анзаце (3.2) продиктован соотношением  $d^r(x) = \varepsilon d^r(\xi)$ , а значит, сумма  $S^\varepsilon(x)$  первых трёх слагаемых в анзаце для собственной вектор-функции, переписанных в растянутых координатах и фигурирующих в краевом условии (3.5), приобретают порядок  $1 = \varepsilon^0$  на  $\omega_0^\varepsilon$ . Если участок  $\Gamma^0$  границы  $\partial\Omega$  искривлен, то  $\nu(x_\#) = e_{(3)} + O(\varepsilon)$ ,  $x_3 = O(\varepsilon^2)$  и  $ds^j = (1 + O(\varepsilon))dx_\#^j$  на контактном пятне  $\omega_0^\varepsilon$ . Таким образом, при спрямлении границы возникает погрешности  $O(\varepsilon)$ , которые не нужно учитывать при формировании предельной задачи и главных асимптотических членов.  $\square$

Заменим на время спектральное условие (3.5) краевым условием

$$N_\dagger(\nabla_\xi)w(\xi_\#, 0) = g(\xi_\#), \quad \xi_\# \in \varpi_0, \quad (3.6)$$

с известной правой частью  $g$  и рассмотрим обобщённую постановку полученной краевой задачи: найти вектор-функцию  $w \in V_\beta^1(\mathbb{R}_-^3)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$E(w, \psi; \mathbb{R}_-^3) = (g, \psi)_{\omega_0} \quad \forall \psi \in V_{-\beta}^1(\mathbb{R}_-^3). \quad (3.7)$$

Здесь, как обычно, пространство Кондратьева  $V_\beta^1(\mathbb{R}_-^3)$  получено пополнением линейного множества  $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_-^3})$  по весовой норме

$$\|w; V_\beta^1(\mathbb{R}_-^3)\| = (\|(1+\rho)^\beta \nabla_\xi w; L^2(\mathbb{R}_-^3)\|^2 + \|(1+\rho)^{\beta-1} w; L^2(\mathbb{R}_-^3)\|^2)^{1/2}; \quad (3.8)$$

при этом  $\rho = |\xi|$  и  $\beta \in \mathbb{R}$  – весовой показатель. Это пространство состоит из функций  $w \in H^1(\overline{\mathbb{R}_-^3})$ , для которых конечна норма (3.8).

Как показано в [8, п. 1 §2 и п. 3 §5], полиномиальное свойство (1.11) облегчает применение теории Кондратьева [16] (см. также [17, гл. 3 и 6]) и при помощи простых алгебраических утверждений приводит к следующему утверждению.

**Предложение 3.1.** *При  $\beta \in (-1/2, 1/2)$  и  $g \in L^2(\varpi)$  задача (3.7) имеет единственное решение  $w \in V_\beta^1(\mathbb{R}_-^3)$ , и верна оценка  $\|w; V_\beta^1(\mathbb{R}_-^3)\| \leq c \|g; L^2(\varpi)\|$ .*

Подчёркнём, что ограничение  $\beta > -1/2$  исключает из пространства  $V_\beta^1(\mathbb{R}_-^3)$  постоянные векторы, а ограничение  $\beta < 1/2$  оставляет в нём произведение  $\chi_\infty \Phi^t$ , где  $\chi_\infty$  – гладкая срезающая функция,

$$\chi_\infty(\xi) = 1 \text{ при } \rho > 2R_\varpi, \quad \chi_\infty(\xi) = 0 \text{ при } \rho < R_\varpi, \quad (3.9)$$

радиус  $R_\varpi$  зафиксирован так, что  $\overline{\varpi} \subset \{\xi_\# \in \mathbb{R}^2 : \rho < R_\varpi\}$ , а  $\Phi^t$  – матрица Грина задачи теории упругости в полупространстве,

$$\Phi^t(\xi) = \rho^{-1} \Phi^t(\rho^{-1} \xi). \quad (3.10)$$

Далее понадобятся ещё две матрицы-функции с показателем  $-2$  положительной однородности

$$\Phi^\varsigma(\xi) = \rho^{-2} \Phi^\varsigma(\rho^{-1} \xi), \quad \varsigma = r, \sigma. \quad (3.11)$$

Из этих трёх матриц будет сформирована асимптотика решения  $w \in V_\beta^1(\mathbb{R}_-^3)$  на бесконечности. Механическая интерпретация столбцов матриц (3.10) или (3.11) – поля смещений, порождённые тремя сосредоточенными силами или моментами и диполями в плоскости  $\{\chi : \xi_3 = 0\}$  (ср. [2, 18] и см. далее соотношения (3.15)).

Для того чтобы описать используемые далее примитивные свойства матриц (3.10) и (3.11), явный вид которых не нужен, заметим, что обобщённое решение  $v \in H^1(\Omega)$  задачи

$$L(\nabla_x)v(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.12)$$

$$N(x, \nabla_x)v(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

существует при выполнении шести условий ортогональности

$$\int_{\Omega} d(x)^\top f(x) dx + \int_{\partial\Omega} d(x)^\top g(x) ds_x = 0 \in \mathbb{R}^6. \quad (3.13)$$

Более того, если  $f(x) = 0$  при  $x \in \Omega \cap \bar{\mathcal{V}}$  и  $g(x) = 0$  при  $x \in \Gamma$ , то для этого решения справедливы включение  $v \in C^\infty(\bar{\Omega} \cap \mathcal{V})$  и формула Тейлора

$$v(x) = a^t + d^r(x)a^r + d^\sigma(x)a^\sigma + O(r^3), \quad r = |x| \rightarrow +0, \quad (3.14)$$

где  $a^t = v(\mathcal{O})$  и  $a^r = d(\nabla_x)^\top v(\mathcal{O})$  – поступательное и вращательное смещения точки  $\mathcal{O}$ . Кроме того, третье слагаемое – вектор касательных напряжений, т.е.  $a^\sigma = (\sigma_{11}(v; \mathcal{O}), \sqrt{2}\sigma_{12}(v; \mathcal{O}), \sigma_{22}(v; \mathcal{O}))^\top$ , и  $d^\sigma$  – матрица-функция размером  $3 \times 3$ , линейно зависящая от переменных  $x$  и удовлетворяющая условию  $N_\dagger(\nabla_x)d^\sigma(x_\#; 0) = 0$  при  $x_\# \in \mathbb{R}^2$ , причём её столбцы и столбцы матрицы  $d^r$ , разумеется, линейно независимы в пространстве  $L^2(\Omega)$ .

Согласно общим результатам статьи [19] (см. также [17, гл. 4, § 3] и комментарии в [8, § 2]) матрицы (3.10) и (3.11) можно подобрать так, чтобы выполнялись соотношения

$$\int_{\mathbb{S}_R^-} (d^\varsigma(\xi)^\top N_\cup(\xi, \nabla_\xi)\Phi^\tau(\xi) - \Phi^\tau(\xi)^\top N_\cup(\xi, \nabla_\xi)d^\varsigma(\xi)) ds_\xi = \delta_{\varsigma, \tau}, \quad (3.15)$$

$$\varsigma, \tau = t, r, \sigma,$$

где  $N_\cup(\xi, \nabla_\xi) = D(\rho^{-1}\xi)^\top AD(\nabla_\xi)$  – оператор из (1.2) на полусфере  $\mathbb{S}_R^- = \{\xi : \rho = R, \xi_3 < 0\}$ .

Очередное утверждение выводится при помощи теоремы Кондратьева об асимптотике и весовых гёльдеровских оценок решений эллиптических краевых задач в конических областях (см. соответственно [16] и [20], а также, например, [17, гл. 3, §5 и §6]).

**Предложение 3.2.** Для указанного предложением 3.1 решения задачи (3.7) верно представление

$$w(\xi) = \chi_\infty(\xi)(\Phi^t(\xi)b^t + \Phi^r(\xi)b^r + \Phi^\sigma(\xi)b^\sigma) + \tilde{w}(\xi), \quad (3.16)$$

в котором  $\Phi^\varsigma$  – матрицы (3.10) и (3.11),  $b^\varsigma \in \mathbb{R}^3$ , а для  $\tilde{w} \in V_{\beta+2}^1(\mathbb{R}_-^3)$  выполнены оценки

$$|\nabla_\xi^k \tilde{w}(\xi)| \leq c_k \rho^{-3-k} \text{ при } \rho > 2\rho_\varpi \text{ и } k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (3.17)$$

причём радиус  $\rho_\varpi > 0$  зафиксирован после определения (3.9) срезки  $\chi_\infty$ .

Согласно методу [19] (см. также [17, гл. 3, § 2 и гл. 4, § 3]) соотношения (3.15) и формула Грина в полушаре  $\{\xi : \rho < R, \xi_3 < 0\}$  большого ( $R \rightarrow +\infty$ ) радиуса приводят к интегральным представлениям коэффициентов

$$b^\varsigma = - \int_{\varpi} d^\varsigma(\xi_\#, 0)^\top g(\xi_\#) d\xi_\#, \quad \varsigma = t, r, \sigma. \quad (3.18)$$

Формулы (3.18) поясняют упомянутую ранее механическую интерпретацию полей (3.10) и (3.11).

Перейдем к построению членов асимптотических анзацев (3.1) и (3.2). Зафиксируем на мгновение правую часть спектрального краевого условия (3.5). Решение полученной таким способом задачи (3.3), (3.4), (3.6) допускает представление (3.16), в котором

$$b = \begin{pmatrix} b^t \\ b^r \end{pmatrix} = \mu \int_{\varpi} d(\xi_\#, 0)^\top (w(\xi_\#, 0) + d(\xi_\#, 0)a) d\xi_\# \in \mathbb{R}^6. \quad (3.19)$$

На столбец  $b^\sigma \in \mathbb{R}^3$  накладывать какое-либо ограничение не надо, но столбец (3.19) необходимо аннулировать. В самом деле, для компенсации невязок порядков  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$  в краевом условии (1.2) требуется решить задачу (3.12) с правыми частями  $f^1 = f^2 = 0$  и

$$g^1(x) = -N(x, \nabla_x) \Phi^t(x) b^t, \quad g^2(x) = -N(x, \nabla_x) (\Phi^r(x) b^r + \Phi^\sigma(x) b^\sigma),$$

которые получены при учёте формул (3.10) и (3.11). В силу соотношений (3.15) условия (3.13) разрешимости таких задач приводят к равенствам

$$b^t = b^r = 0 \in \mathbb{R}^3, \quad (3.20)$$

но допускают любой столбец  $b^\sigma$ , т.е. при ограничении (3.20) задача

$$E(v, \psi; \Omega) = (g^2, \psi)_{\partial\Omega} \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \quad (3.21)$$

всегда имеет решение, определённое с точностью до слагаемого из линейного множества  $\mathcal{R}$ .

Итак, представление (3.19) придаёт формуле (3.20) вид

$$a = -\mathbf{d}(\varpi)^{-1}\bar{w} \in \mathbb{R}^6, \quad (3.22)$$

где

$$\bar{w} = \int_{\varpi} d(\xi_{\#}, 0)^{\top} w(\xi_{\#}, 0) d\xi_{\#}, \quad \mathbf{d}(\varpi) = \int_{\varpi} d(\xi_{\#}, 0)^{\top} d(\xi_{\#}, 0) d\xi_{\#}. \quad (3.23)$$

Матрица Грама  $\mathbf{d}(\varpi)$  размером  $6 \times 6$  симметрична и положительно определена потому, что столбцы матрицы  $d(\cdot, 0)$  линейно независимы в пространстве  $L^2(\varpi)$ .

В итоге краевые условия (3.5) принимает вид

$$N_{\dagger}(\nabla_{\xi})w(\xi_{\#}, 0) = \mu(w(\xi_{\#}, 0) - \mathbf{d}(\varpi)^{-1}\bar{w}), \quad \xi_{\#} \in \varpi, \quad (3.24)$$

а вариационная формулировка задачи (3.3), (3.4), (3.24) выглядит следующим образом:

$$E(w, \psi; \mathbb{R}_-^3) = \mu((w, \psi)_{\varpi} - \bar{\psi}^{\top} \mathbf{d}(\varpi)^{-1}\bar{w}) \quad \forall \psi \in V_0^1(\mathbb{R}_-^3). \quad (3.25)$$

Подчеркнём, что последнее слагаемое в правой части интегрального тождества получено интегрированием следа пробной вектор-функции  $\psi$  на  $\varpi \subset \partial\mathbb{R}_-^3$  при учёте определения (3.23), а весовой индекс  $\beta = 0$  зафиксирован так, что решение  $w$  принадлежит тому же гильбертовому пространству, что и пробная вектор-функция  $\psi$  (ср. тождество (3.7)).

**Теорема 3.1.** *Спектр задачи (3.7) является дискретным и образует положительную неограниченную последовательность*

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m \leq \dots \rightarrow +\infty. \quad (3.26)$$

*Соответствующие собственные вектор-функции*

$$w_{(1)}, w_{(2)}, \dots, w_{(m)}, \dots \in V_0^1(\mathbb{R}_-^3)$$

*можно подчинить условиям ортогональности и нормировки*

$$(w_{(m)}, w_{(n)})_{\varpi} - (\bar{w}_{(n)})^{\top} \mathbf{d}(\varpi)^{-1}\bar{w}_{(m)} = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (3.27)$$

**Доказательство.** В силу неравенства Харди (2.4) справедливо соотношение (ср. формулу (2.5))

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-^3} (1 + \rho)^{-2} |w(\xi)|^2 d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}_-^3} \rho^{-2} |w(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}_-^3} |\nabla_\xi w(\xi)|^2 d\xi \quad \forall w \in V_0^1(\mathbb{R}_-^3), \end{aligned} \quad (3.28)$$

которое вместе с неравенством Корна [10] устанавливает, что левую часть тождества (3.25) можно назначить скалярным произведением в гильбертовом пространстве  $V_0^1(\mathbb{R}_-^3)$ . Компактность вложения  $V_0^1(\mathbb{R}_-^3) \subset L^2(\varpi)$  и неравенство Коши–Буняковского

$$(\bar{w})^\top \mathbf{d}(\varpi)^{-1} \bar{w} \leq \|w; L^2(\varpi)\|^2 \quad (3.29)$$

доказывают дискретность спектра задачи (3.25), а положительность первого собственного числа  $\mu_1$  в последовательности (3.26) и возможность соблюсти соотношения (3.27) гарантированы таким наблюдением: из (3.25) при  $\mu = 0$  вытекает равенство  $E(w, w; \mathbb{R}_-^3) = 0$ , а полиномиальное свойство (1.11) приводит к включению  $w \in \mathcal{R}$ , но ни одно нетривиальное жесткое смещение не попадает в  $V_0^1(\mathbb{R}_-^3)$ .  $\square$

Далее в разд. 6 будет проверено следующее утверждение, оправдывающее построенные главные члены асимптотики и предельную задачу.

**Теорема 3.2.** *Последовательности (1.25) и (3.26) собственных чисел задач (1.9) и (3.25) соответственно находятся в отношении*

$$|\lambda_{6+m}^\varepsilon - \varepsilon^{-1} \mu_m| \leq c_m \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_m], \quad (3.30)$$

где  $m \in \mathbb{N}$ , а  $\varepsilon_m$  и  $c_m$  – некоторые положительные числа. Первые шесть собственных чисел задачи в области  $\Omega$  равны нулю.

**Замечание 3.2.** Для доказательства теоремы 3.1 проверять неравенство (3.29), вообще говоря, не нужно. Положительность билинейной формы  $t(w, \psi)$ , служащей множителем при  $\mu$  в тождестве (3.25), получается в результате рассуждений, не требующих каких-либо вычислений. Приведем их. В силу неравенства Корна (см., например, [10])

$$\|\nabla_\xi w; L^2(\mathbb{R}_-^3)\|^2 \leq cE(w, w; \mathbb{R}_-^3) \quad \forall w \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_-^3})$$

и неравенства Харди (3.28) в качестве скалярного произведения  $\langle w, \psi \rangle$  в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H} = V_0^1(\mathbb{R}_-^3)$  можно взять “энергетическую” форму  $E(w, \psi; \mathbb{R}_-^3)$ . Оператор  $\mathcal{T}$ , заданный тождеством

$$\langle \mathcal{T}w, \psi \rangle = t(w, \psi) \quad \forall w, \psi \in \mathcal{H},$$

оказывается самосопряжённым, компактным и полуограниченным снизу. Его существенный спектр – одиночная точка  $\tau = 0$ , а дискретный спектр  $\{\tau_k\}$  образует бесконечно малую (неупорядоченную) последовательность нормальных собственных чисел, которая инверсией переводится в спектр  $\{\mu_k = 1/\tau_k\}$  задачи (3.25). Если форма  $t$  и оператор  $\mathcal{T}$  не являются положительными, то среди собственных чисел найдется отрицательное  $\tau_{\#} < 0$ , а значит, и у задачи (3.25) есть отрицательное собственное число  $\mu_{\#} = 1/\tau_{\#} < 0$ . Вместе с тем теорема 3.2 показывает, что при малом  $\varepsilon > 0$  спектр задачи (1.9) также приобретает отрицательную точку  $\varepsilon^{-1}\mu_{\#} + O(1)$ , что невозможно. Осталось вспомнить конец доказательства теоремы 3.1: точка  $\mu = 0$  не является собственным числом.

**4. “Правильное” распределение контактных пятен.** Кратко обсудим задачу (1.9) при условии (1.16) в случае (1.6) и при условии (1.17) в случае (1.7). По-прежнему ищем асимптотику собственных чисел в виде (3.1), но укоротим представление для собственной вектор-функции:

$$u_{m+\varepsilon}^{\varepsilon}(x) = d(x)a + \sum_{j=0}^{J-1} \chi_j(x)w_{(m)}^j(\xi^j) + \varepsilon v(x) + \dots \quad (4.1)$$

Здесь фигурируют растянутые локальные координаты

$$\xi^j = \varepsilon^{-1}x^j = \varepsilon^{-1}\theta^j(x - P^j), \quad (4.2)$$

а ортогональная  $(3 \times 3)$ -матрица  $\theta^j$  нужна для того, чтобы направить ось  $x_3^j$  вдоль нормали  $\nu(P^j)$  (ср. разд. 1). Кроме того,  $\chi_j$  – гладкая срезающая функция с малым носителем, равная единице в окрестности точки  $P^j$ , причем  $\text{supp}\chi_j \cap \partial\Omega \subset \Gamma^j$  и  $\text{supp}\chi_j \cap \text{supp}\chi_k = \emptyset$  при  $j \neq k$ .

Подставим асимптотические анзацы (3.1) и (3.30) в задачу (1.1)–(1.3) и по схеме из разд. 3 образуем предельные задачи, восстановив индекс  $j = 0, \dots, J - 1$ ,

$$L^j(\nabla_{\xi^j})w^j(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \mathbb{R}_-^3, \quad (4.3)$$



$$N_{\dagger}^j(\nabla_{\xi^j})w^j(\xi_{\#}^j, 0) = 0, \quad \xi_{\#}^j \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\varpi_j}, \quad (4.4)$$

$$N_{\dagger}^j(\nabla_{\xi^j})w^j(\xi_{\#}^j, 0) = \mu Q(P^j)(w^j(\xi_{\#}^j, 0) + d(P^j)a), \quad \xi_{\#}^j \in \varpi_j. \quad (4.5)$$

При переходе к локальным координатам векторы смещений не преобразуем, но дифференциальные операторы из задачи (4.3)–(4.5) принимают вид

$$\begin{aligned} L^j(\nabla_{\xi^j}) &= D^j(-\nabla_{\xi^j})^{\top} AD^j(\nabla_{\xi^j}), \quad N_{\dagger}^j(\nabla_{\xi^j}) = D^j(0, 0, 1)^{\top} AD^j(\nabla_{\xi^j}), \\ D^j(\nabla_{\xi^j}) &= D((\theta^j)^{-1}\nabla_{\xi^j}). \end{aligned}$$

Для решения задачи (4.3)–(4.5) выполнено разложение (3.16), в котором столбец коэффициентов  $b^{tj} \in \mathbb{R}^3$  (только он нужен) находится по формуле

$$b^{tj} = - \int_{\varpi_j} Q(P^j)(w^j(\xi_{\#}^j, 0) + d(P^j)a) d\xi_{\#}^j$$

(ср. равенства (3.18) и (3.19)). В итоге задача (3.12) для поправки  $v$  приобретает правые части

$$\begin{aligned} f(x) &= - \sum_{j=0}^{J-1} [L(\nabla_x), \chi_j(x)] \Phi^{tj}(x^j) b^{tj}, \\ g(x) &= - \sum_{j=0}^{J-1} [N(x, \nabla_x), \chi_j(x)] \Phi^{tj}(x^j) b^{tj}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

а условия её разрешимости (3.13) при помощи простых преобразований, опирающихся на формулу (3.15) при  $\varsigma, \tau = t$ , преобразуем к виду

$$0 = - \sum_{j=0}^{J-1} d(P^j)^{\top} b^{tj} = -\mathbf{D}a - \sum_{j=0}^{J-1} d(P^j)^{\top} Q(P^j) \int_{\varpi_j} w^j(\xi_{\#}^j, 0) d\xi_{\#}^j, \quad (4.7)$$

где фигурирует симметричная матрица размером  $6 \times 6$

$$\mathbf{D} = \sum_{j=0}^{J-1} |\varpi_j| d(P^j)^{\top} Q(P^j) d(P^j) \quad (4.8)$$

и площади  $|\varpi_j|$  фигур  $\varpi_j$ . Поскольку каждая из матриц

$$d(P^j)^{\top} Q(P^j) d(P^j)$$

положительна, матрица (4.8) положительно определённая в силу ограничений (1.16) или (1.17), так как равенства  $Q(P^j)d(P^j)a = 0$  при  $j = 0, \dots, J-1$  влекут за собой обращение в нуль столбца  $a \in \mathbb{R}^6$ .

Найдем столбец  $a$  из системы (4.7) и придадим краевому условию (4.5) следующий вид:

$$\begin{aligned} & N_{\dagger}^j(\nabla_{\xi^j})w(\xi_{\#}^j, 0) \\ &= \mu Q(P^j) \left( w(\xi_{\#}^j, 0) - d(P^j) \mathbf{D}^{-1} \sum_{k=0}^{J-1} d(P^k)^{\top} Q(P^k) \int_{\varpi_k} w^k(\xi_{\#}^k, 0) d\xi_{\#}^k \right), \\ & \xi_{\#}^j \in \varpi_j. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Последнее вычитаемое в правой части соотношения (4.9) включает средние всех членов  $w^0, \dots, w^{J-1}$  типа пограничного слоя и тем самым демонстрирует взаимодействие малых спектральных возмущений (1.3) краевых условий (1.2). В результате вариационная постановка совокупности ( $j = 0, \dots, J-1$ ) задач (4.3), (4.4), (4.9) выглядит так:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{J-1} E^j(w^j, \psi^j; \mathbb{R}_-^3) = \mu \sum_{j=0}^{J-1} \left( (w^j, \psi^j)_{\varpi_j} - \right. \\ & \left. - \left( d(P^j)^{\top} Q(P^j) \int_{\varpi_j} \psi^j(\xi_{\#}^j) d\xi_{\#}^j \right)^{\top} \mathbf{D}^{-1} \sum_{k=0}^{J-1} d(P^k)^{\top} Q(P^k) \int_{\varpi_k} w^k(\xi_{\#}^k) d\xi_{\#}^k \right) \\ & \forall \psi^0, \dots, \psi^{J-1} \in V_0^1(\mathbb{R}_-^3). \quad (4.10) \end{aligned}$$

Построение предельной задачи, конкретизирующей члены анзацев (4.1) и (3.30), закончено. Для неё и исходных задач справедливы утверждения, аналогичные теоремам 3.1 и 3.2, проверяемым по прежним схемам, – ввиду понятности и для краткости формулировать их не будем.

**5. Ещё один способ распределения пружинных контактных пятен.** Допустим, что условие (1.17) нарушено, а ядро  $\mathbb{L}'$  отображения

$$\mathbb{R}^6 \ni a \mapsto (\nu(P^0)^{\top} d(P^0)a, \dots, \nu(P^{J-1})^{\top} d(P^{J-1})a)^{\top} \in \mathbb{R}^J \quad (5.1)$$

имеет размерность  $\mathbf{l}_0 \in \{1, 2, 3\}$  и содержится в подпространстве  $\{0\}^3 \times \mathbb{R}^3$ , т.е.  $\mathbb{L}' = \{0\}^3 \times \mathbb{L}'_0$ . Обозначим  $\mathbb{L}^0$  ортогональное дополнение упомянутого ядра до  $\mathbb{R}^6$ ,  $\dim \mathbb{L}^0 = 6 - \mathbf{l}_0 \in \{4, 5, 6\}$ . Пусть ещё  $\mathbb{P}'$  и  $\mathbb{P}^0$  –

ортогональные проекторы в  $\mathbb{R}^6$  на соответствующие подпространства, причем  $\mathbb{P}' = (0, 0, 0, \mathbb{P}'_0)$ .

Сделаем несколько упрощающих геометрических предположений. Первое, используемое в последующих вычислениях, состоит в том, что участки  $\Gamma^j \subset \partial\Omega$  лежат на плоскостях  $\Pi^j$ , и следовательно,

$$\begin{aligned} \nu(x)^\top d(x)a &= \nu(P^j)^\top d(x)a = 0 + O(\varepsilon) \\ \text{при } x \in \omega_j^\varepsilon, \quad j &= 0, \dots, J-1, \quad \forall a \in \mathbb{L}'. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Считаем, что  $P^j$  – центр тяжести фигуры  $\omega_j^\varepsilon = \varpi_j^\varepsilon$  (см. пояснения в разд. 1), а оси  $x_1^j$  и  $x_2^j$  направим вдоль главных осей её тензора инерции. Иными словами,

$$\int_{\varpi_j} \xi_i^j d\xi_\#^j = 0, \quad \int_{\varpi_j} \xi_1^j \xi_2^j d\xi_\#^j = 0, \quad T_i^j := \int_{\varpi_j} (\xi_i^j)^2 d\xi_\#^j > 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.3)$$

Наконец, обозначив  $e_{(i)}^j$  орт оси  $x_i^j$ , сформулируем основное требование, гарантирующее дискретность спектра задачи (1.9): подпространство  $\mathbb{L}'_0$  включено в линейную оболочку  $\mathcal{L}'_0 \subset \mathbb{R}^3$  столбцов

$$d^\top(e_{(i)}^j)^\top \nu(P^j), \quad i = 1, 2, \quad j = 0, \dots, J-1. \quad (5.4)$$

**Пример 5.2.** 1) Пусть  $\Omega = \{x : |x| < R\}$  – шар, а множество точек  $P^0, \dots, P^{J-1}$  включает один из полюсов и две разные точки на экваторе. Тогда  $\mathbf{l}_0 = 3$  и  $\mathbb{L}'_0 = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{L}^0 = \mathbb{R}^3 \times \{0\}^3$ .

2) Пусть  $\Omega = \{x : x_1^2 + x_2^2 < R^2, -3R < x_3 < Hx_1\}$  – круговой цилиндр с прямым и скошенным торцами, причём  $P^0 = (0, 0, 0)^\top$ ,  $P^5 = (0, 0, -3R)^\top$ ,  $P^{2\pm 1} = (0, \pm R, -R)^\top$ ,  $P^{3\pm 1} = (\pm R, 0, -2R)^\top$ . Тогда  $\mathbf{l}_0 = 5$  и  $\mathbb{L}'_0 = \{0\}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{L}^0 = \mathbb{R}^5 \times \{0\}$ .

В первом примере ограничение на столбцы (5.4) нарушено, но во втором это требование выполнено, если только  $H \neq 0$ . Для уплощения участков  $\Gamma^j$  шар и круговое сечение можно заменить правильными многогранником и многоугольником.

Проверим справедливость неравенства Корна (2.8) при введённых ограничениях. Умножим представление (2.1) слева на  $d(x)^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top$  и проинтегрируем по кругу  $\mathbb{B}_{\varepsilon r_\varpi}^j \subset \omega_j^\varepsilon \subset \Gamma^j$  с центром  $P^j$  и радиусом

$\varepsilon r_\varpi > 0$ . После суммирования по  $j = 0, \dots, J-1$  приходим к равенству

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J-1} \int_{\mathbb{B}_{\varepsilon r_\varpi}^j} d(x)^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top d(x) dx_\#^j a^\varepsilon \\ = \sum_{j=0}^{J-1} \int_{\mathbb{B}_{\varepsilon r_\varpi}^j} d(x)^\top \nu(P^j) (u^\varepsilon(x) - u_\perp^\varepsilon(x)) dx_\#^j. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Благодаря симметрии области интегрирования при  $j = 0$  верна элементарная формула

$$\int_{\mathbb{B}_{\varepsilon r_\varpi}^0} d(x)^\top e_{(3)} e_{(3)}^\top d(x) dx_\# = \pi \varepsilon^2 r_\varpi^2 \operatorname{diag} \left\{ 0, 0, 1, \varepsilon^2 \frac{r_\varpi^2}{6}, \varepsilon^2 \frac{r_\varpi^2}{6}, 0 \right\}.$$

Аналогичные интегралы при  $j = 1, \dots, J-1$  находятся согласно правилу преобразований при повороте системы координат: вектор  $d(x)a = d(P^j)a + d^r(x - P^j)a^r$  в локальных координатах  $x^j = \theta^j(x - P^j)$  (см. замену (4.2)) принимает вид  $\theta^j d(P^j)a + \theta^j d^r(x^j)\theta^j a^r$ . Кроме того,  $\theta^j \nu(P^j) = e_{(3)}$ . Таким образом, определив матрицы  $\mathbb{E}_3 = \operatorname{diag} \{1, 1, 0\}$  и  $\mathbb{O}_3 = \operatorname{diag} \{0, 0, 0\}$  (ср. формулы (1.13)), получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_{\varepsilon r_\varpi}^j} d(x)^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top d(x) dx_\#^j \\ = \pi \varepsilon^2 r_\varpi^2 d(P^j)^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top d(P^j) + \pi \varepsilon^4 \frac{r_\varpi^4}{6} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & (\theta^j)^\top \mathbb{E}_3 \theta^j \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Как и в разд. 2, квадрат модуля правой части системы (5.5) не превосходит величины

$$c \varepsilon^2 (\|u^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon E(u^\varepsilon, u^\varepsilon \Omega)).$$

Компоненты  $a^{\varepsilon 0} = \mathbb{P}^0 a^\varepsilon \in \mathbb{L}^0$  и  $a^{\varepsilon l} = \mathbb{P}'_0 a^\varepsilon \in \mathbb{L}'_0$  столбца  $a^\varepsilon$  обрабатываем по-разному. Сначала заметим, что согласно формуле (5.6) и определению проектора  $\mathbb{P}^0$  в выражении  $M^{\varepsilon 0} a^{\varepsilon 0} = \varepsilon^2 (M^{00} + O(\varepsilon^2)) a^{\varepsilon 0}$  из левой части (5.5) фигурирует матрица  $M^{00}$ , обратимая на подпространстве  $\mathbb{L}^0$ , – это наблюдение и следовое неравенство (2.6) показывают, что

$$\|a^{\varepsilon 0}; \mathbb{R}^6\|^2 \leq c (\varepsilon^{-1} E(u^\varepsilon, u^\varepsilon; \Omega) + \varepsilon^{-2} \|u^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^4 \|a^{\varepsilon l}; \mathbb{R}^3\|^2). \quad (5.7)$$

Осталось применить к системе (5.5) проектор  $\mathbb{P}'$ , уничтожающий слагаемое  $\varepsilon^2 M^{00} a^{\varepsilon 0}$ , и извлечь выражение  $M^{\varepsilon'} a^{\varepsilon'}$ , в котором  $M^{\varepsilon'} = \varepsilon^4 M^{0'}$  и  $M^{0'}$  –  $(3 \times 3)$ -матрица, обратимая на подпространстве  $\mathbb{L}'_0$  в силу предположения о столбцах (5.4). В результате приходим к формуле

$$\|a^{\varepsilon'}; \mathbb{R}^3\|^2 \leq c(\varepsilon^{-3} E(u^\varepsilon, u^\varepsilon; \Omega) + \varepsilon^{-4} \|u^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 + \|a^{\varepsilon 0}; \mathbb{R}^6\|^2),$$

которая вместе с формулами (5.7) и (2.3) сначала даёт соотношение

$$\|a^{\varepsilon 0}; \mathbb{R}^6\|^2 + \varepsilon^2 \|a^{\varepsilon'}; \mathbb{R}^3\|^2 \leq c\varepsilon^{-1} (E(u^\varepsilon, u^\varepsilon; \Omega) + \varepsilon^{-1} \|u^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2), \quad (5.8)$$

а затем и неравенство Корна (2.8). Как и в разд. 2, асимптотически более точными оказываются отдельные оценки (2.3) и (5.8) ингредиентов  $u^{\varepsilon \perp}$  и  $a^{\varepsilon 0}$ ,  $a^{\varepsilon'}$  разложения (2.1).

Приступим к построению асимптотики. Сохраним анзац (3.1) для собственного числа, а собственную вектор-функцию будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_{m+6}^\varepsilon(x) = & \varepsilon^{-1} d^r(x) a' + d(x) (a^0 + \varepsilon a^{01}) \\ & + \sum_{j=0}^{J-1} \chi_j(x) (w_{(m)}^j(\varepsilon^{-1} x^j) + \varepsilon w_{(m)}^{j1}(\varepsilon^{-1} x^j)) \\ & + \varepsilon v^1(x) + \varepsilon^2 v^2(x) + \dots, \quad (5.9) \end{aligned}$$

где  $a' \in \mathbb{L}'_0 \subset \mathbb{R}^3$  и  $a^0, a^{01} \in \mathbb{L}^0 \subset \mathbb{R}^6$ , а остальные обозначения такие же, как и в формуле (4.1).

В силу соотношений (5.2) прежние соображения дают совокупность ( $j = 0, \dots, J-1$ ) краевых задач в полупространстве, состоящих из систем (4.3), а также краевых условий (4.4) и

$$\begin{aligned} \theta^j N_{\dagger}^j (\nabla_{\xi^j}) \theta^j w(\xi^j) = & \mu e_{(3)} e_{(3)}^\top (\theta^j w(\xi^j) + \theta^j d^r(\xi^j) \theta^j a' + \theta^j d(P^j) a^0), \\ & \xi_{\#}^j \in \varpi_j, \quad \xi_3^j = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Для решения  $w^j \in V_0^1(\mathbb{R}_-^3)$  задачи (4.3), (4.4), (5.10) выполнено представление (3.16), где

$$\theta^j b^{jt} = \mu e_{(3)} e_{(3)}^\top \int_{\varpi_j} (\theta^j w^j(\xi^j) + \theta^j d^r(\xi^j) \theta^j a' + \theta^j d(P^j) a^0) \Big|_{\xi_3^j=0} d\xi_{\#}^j,$$

$$\theta^j b^{jr} = \mu \int_{\varpi_j} d^r(\xi^j)^\top (\theta^j)^\top e_{(3)} e_{(3)}^\top (\theta^j w^j(\xi^j) + \theta^j d^r(\xi^j) \theta^j a' + \theta^j d(P^j) a^0) \Big|_{\xi_3^j=0} d\xi_\#^j.$$

Согласно (5.3) слагаемые  $\theta^j d^r(\xi^j) \theta^j a'$  и  $\theta^j d(P^j) a^0$  дают нулевой вклад в интегралы. Итак,

$$\begin{aligned} b^{jt} &= \mu \nu(P^j) \nu(P^j)^\top \left( \int_{\varpi_j} w^j(\xi_\#^j, 0) d\xi_\#^j + |\varpi_j| d(P^j) a^0 \right), \\ b^{jr} &= \mu \int_{\varpi_j} \left( (d^r(\xi_\#^j, 0) \theta^j)^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top (w^j(\xi_\#^j, 0) + d^r(\xi_\#^j, 0) \theta^j a') \right) d\xi_\#^j. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Следовательно, задача (3.12) для первой поправки гладкого типа  $v^1$  приобретает правые части (4.6), а условия её разрешимости (3.13) преобразуются в систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{D} a^0 = \mathbf{F}^0 := - \sum_{j=0}^{J-1} d(P^j)^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top \int_{\varpi_j} w^j(\xi_\#^j, 0) d\xi_\#^j \quad (5.12)$$

с матрицей

$$\mathbf{D} = \sum_{j=0}^{J-1} |\varpi_j| d(P^j)^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top d(P^j), \quad (5.13)$$

(ср. формулы (4.7) и (4.8) с проектором (1.7)). Правая часть  $\mathbf{F}^0$  – линейная комбинация столбцов (1.18), т.е. она попадает в подпространство  $\mathbb{L}^0$ , на котором по построению симметричная матрица (5.13) обратима (см. комментарии к формуле (4.8)), а значит,

$$a^0 = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}^0. \quad (5.14)$$

Теперь составим задачу для второй поправки  $v^2$  гладкого типа в анзаце (5.9). В её правых частях

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f^2(x) \\ g^2(x) \end{pmatrix} &= - \sum_{j=0}^{J-1} \begin{pmatrix} [L(\nabla_x), \chi_j(x)] \\ [N(x, \nabla_x), \chi_j(x)] \end{pmatrix} \\ &\quad \times (\Phi^{jr}(x^j) b^{jr} + \Phi^{j\sigma}(x^j) b^{j\sigma} + \Phi^{jt}(x^j) b^{jt1}) \end{aligned}$$

помимо младших слагаемых из разложения (3.16) члена  $w^j$  появляется старшее слагаемое из такого же разложения второго члена  $w^{j1}$

типа пограничного слоя. Сами столбцы  $b^{0t1}, \dots, b^{J-1t1}$  при образовании предельной задачи не понадобятся и важно лишь то, что в силу проведённых вычислений за счет подбора столбца  $a^{01} \in \mathbb{L}^0$  в анзаце (5.9) можно соблюсти часть условий разрешимости

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^6 \ni 0 &= \int_{\Omega} f^2(x) dx + \int_{\partial\Omega} g^2(x) ds_x \\ &= - \sum_{j=0}^{J-1} \left( d(P^j)^\top b^{jt1} + \begin{pmatrix} (0, 0, 0)^\top \\ b^{jr} \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

задачи (3.12) для  $v^2$ , а именно те, которые возникают после применения проектора  $\mathbb{P}^0$ . Иными словами, систему (5.15) можно спроецировать на  $\mathbb{L}'$  и при учёте соотношения (5.11) вывести соотношение

$$a' = -\mathbf{T}^{-1} \sum_{j=0}^{J-1} \int_{\varpi_j} (d^r(\xi_{\sharp}^j, 0)\theta^j)^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top w^j(\xi_{\sharp}^j, 0) d\xi_{\sharp}^j \in \mathbb{L}'_0, \quad (5.16)$$

в котором фигурирует матрица

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbb{P}'_0 \sum_{j=0}^{J-1} (\theta^j)^\top \mathbf{T}^j \theta^j \mathbb{P}'_0 \\ &:= \mathbb{P}'_0 \sum_{j=0}^{J-1} (\theta^j)^\top \int_{\varpi_j} d^r(\xi_{\sharp}^j, 0)^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top d^r(\xi_{\sharp}^j, 0) d\xi_{\sharp}^j \theta^j \mathbb{P}'_0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

симметричная и обратимая на подпространстве  $\mathbb{L}'$  в силу сделанного предположения о столбцах (5.4). Действительно, указанное свойство вытекает из равенства

$$\mathbf{T}^j = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} T_i^j \int_{\varpi_j} d^r(e_{(i)})^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top d^r(e_{(i)}) d\xi_{\sharp}^j, \quad (5.18)$$

где  $T_1^j$  и  $T_2^j$  – главные моменты инерции фигуры  $\varpi_j$  (см. формулы (5.3) и ср. проверку свойств матрицы (4.8)).

Теперь подстановка формул (5.12)–(5.14) и (5.16) для  $a^0$  и  $a'$  в краевые условия (5.10) на множествах  $\varpi_j \subset \partial\mathbb{R}^3$  замыкает задачи для  $\mu$  и  $\vec{w} = (w^0, \dots, w^{J-1})$ . Вариационная формулировка совокупности

( $j = 0, \dots, J-1$ ) этих спектральных векторных задач выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{J-1} E^j(w^j, \psi^j; \mathbb{R}_-^3) \\
&= \mu \sum_{j=0}^{J-1} \left( (w^j, \psi^j)_{\varpi_j} - \left( d(P^j)^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top \int_{\varpi_j} \psi^j(\xi_\#^j) d\xi_\#^j \right)^\top \right. \\
&\quad \times \mathbf{D}^{-1} \sum_{k=0}^{J-1} d(P^k)^\top \nu(P^k) \nu(P^k)^\top \int_{\varpi_k} w^k(\xi_\#^k) d\xi_\#^k \\
&\quad \left. - \left( \int_{\varpi_j} (d^r(\xi_\#^j, 0)\theta^j)^\top \nu(P^j) \nu(P^j)^\top \psi^j(\xi_\#^j, 0) d\xi_\#^j \right)^\top \right. \\
&\quad \left. \times \mathbf{T}^{-1} \mathbb{P}'_0 \sum_{k=0}^{J-1} \int_{\varpi_k} (d^r(\xi_\#^k, 0)\theta^k)^\top \nu(P^k) \nu(P^k)^\top w^k(\xi_\#^k, 0) d\xi_\#^k \right) \\
&\quad \forall \vec{\psi} = (\psi^0, \dots, \psi^{J-1}) \in V_0^1(\mathbb{R}_-^3)^{3 \times J}. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{T}$  – матрицы (5.13) и (5.17).

Интегральное тождество (5.19) выглядит значительно более громоздким, чем (4.10), однако его исследование и оценивание погрешностей асимптотического анализа мало отличаются от представленных в разд. 4 и разд. 6. Подчеркнём, что положительная определённая билинейная формы  $t(\vec{\psi}, \vec{\psi})$ , служащей множителем при  $\mu$  в правой части (5.19), проверяется комбинированием интегральных и алгебраических неравенств Коши–Буняковского, но проще вывести ее при помощи троика из замечания 3.2. Сформулируем утверждения, вполне аналогичные теоремам 3.1 и 3.2.

**Теорема 5.3.** *Пусть выполнены требования, сформулированные в начале раздела.*

1) *Спектр задачи (5.19) является дискретным и образует положительную неограниченную последовательность (3.26).*

2) *Члены последовательностей (1.25) и (3.26) собственных чисел задач (1.9) и (5.19) связаны неравенствами (3.30), где  $t \in \mathbb{N}$ , а  $\varepsilon_m > 0$  и  $c_m > 0$  – некоторые числа.*



**6. Обоснование асимптотики.** Начнём обоснование построенной в разд. 3 асимптотики (3.1) и (3.2) с доказательства предложения о сходимости. Рассмотрим спектральную пару  $\{\lambda_{6+m}^\varepsilon, u_{(6+m)}^\varepsilon\}$  задачи (1.9), подчинённую соотношениям

$$\lambda_{6+m}^\varepsilon \leq c_m \varepsilon^{-1} \quad \text{и} \quad \|u_{(6+m)}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad (6.1)$$

первое из которых нуждается в подтверждении (см. комментарий к выкладке (6.21)). Найдётся положительная бесконечно малая последовательность  $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , вдоль которой имеют место сходимости

$$\begin{aligned} \varepsilon \lambda_{6+m}^\varepsilon &\rightarrow \mu_m^\bullet \in \mathbb{R}, \\ \varepsilon^{1/2} \mathbf{u}_{(6+m)}^{\varepsilon t} &\rightarrow \mathbf{u}_{(m)}^{\bullet t} \in \mathbb{R}^3, \quad \varepsilon^{3/2} \mathbf{u}_{(6+m)}^{\varepsilon r} \rightarrow \mathbf{u}_{(m)}^{\bullet r} \in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$u_{(m+6)}^{\varepsilon \perp} \rightarrow u_{(m)}^{\bullet \perp} \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^2(\Omega).$$

Здесь и далее индекс  $k$  у параметра  $\varepsilon_k$  не пишем. Положим

$$w_{(m)}^\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{1/2} \chi_0(x) u_{(m+6)}^{\varepsilon \perp}(x). \quad (6.3)$$

Заметим, что при сжатии координат  $\xi \mapsto x$  выполнено соотношение

$$\begin{aligned} &\|w_{(m)}^\varepsilon; V_0^1(\mathbb{R}_-^3)\|^2 \\ &= \varepsilon (\|\nabla_\xi(\chi_0 u_{(m+6)}^{\varepsilon \perp}); L^2(\mathbb{R}_-^3)\|^2 + \|(1 + \varepsilon^{-1}r)^{-1} \chi_0 u_{(m+6)}^{\varepsilon \perp}; L^2(\mathbb{R}_-^3)\|^2) \\ &= \|\nabla_x(\chi_0 u_{(m+6)}^{\varepsilon \perp}); L^2(\Omega)\|^2 + \|(\varepsilon + r)^{-1} \chi_0 u_{(m+6)}^{\varepsilon \perp}; L^2(\Omega)\|^2 \\ &\leq c_\Omega E(u_{(m+6)}^{\varepsilon \perp}, u_{(m+6)}^{\varepsilon \perp}; \Omega) = c_\Omega E(u_{(m+6)}^\varepsilon, u_{(m+6)}^\varepsilon; \Omega), \end{aligned}$$

причём неравенство обеспечено формулами (2.3) и (2.5). Следовательно,

$$w_{(m)}^\varepsilon \rightarrow w_{(m)}^\bullet \text{ слабо в } V_0^1(\mathbb{R}_-^3) \text{ и сильно в } L^2(\varpi_0). \quad (6.4)$$

При малом  $\varepsilon$  подставим в интегральное тождество (1.9) для пары  $\{\lambda_{6+m}^\varepsilon, u_{(6+m)}^\varepsilon\}$  пробную вектор-функцию  $\psi^\varepsilon(x) = \varepsilon^{1/2} \psi(\varepsilon^{-1}x)$ , где  $\psi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_-^3})$ , и после умножения на  $\varepsilon$  получим, что

$$\varepsilon^{3/2} E(u_{(m+6)}^{\varepsilon \perp}, \psi; \Omega) = \varepsilon \lambda_{m+6}^\varepsilon \varepsilon^{1/2} (u_{(m+6)}^{\varepsilon \perp} + d^t \mathbf{u}_{(m+6)}^{\varepsilon t} + d^r \mathbf{u}_{(m+6)}^{\varepsilon r}, \psi) \omega_0^\varepsilon.$$

Поскольку  $u_{(m+6)}^{\varepsilon \perp} = \varepsilon^{-1/2} w_{(m)}^\varepsilon$  на множестве  $\text{supp } \psi^\varepsilon$ , сделаем растяжение координат (4.2),  $j = 0$ , и перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$  согласно сходимостям (6.2) и (6.4). В итоге приходим к равенству

$$E(w_{(m)}^\bullet, \psi; \mathbb{R}_-^3) = \mu_m^\bullet(w_{(m)}^\bullet + d^t \mathbf{u}_{(m)}^{\bullet t} + d^r \mathbf{u}_{(m)}^{\bullet r}, \psi)_{\varpi_0}. \quad (6.5)$$

Кроме того, формулы (1.10) и (1.22) с  $u_n^\varepsilon = a^t + \varepsilon d^r a^r \in \mathcal{R}$  показывают, что

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{-1/2} \langle u_{(m)}^\varepsilon, a^t + \varepsilon d^r a^r \rangle_\varepsilon = \varepsilon^{-3/2} (u_{(m)}^\varepsilon, a^t + \varepsilon^{-1} d^r a^r)_{\omega_0^\varepsilon} \\ &= \varepsilon^{-3/2} (\varepsilon^{-1/2} w_{(m)}^\varepsilon + \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon t} + d^r \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon r}, a^t + \varepsilon^{-1} d^r a^r)_{\omega_0^\varepsilon} \\ &= (w_{(m)}^\varepsilon + \varepsilon^{1/2} \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon t} + \varepsilon^{3/2} d^r \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon r}, da)_{\varpi_0} \\ &\rightarrow (w_{(m)}^\bullet + d\mathbf{u}_{(m)}^\bullet, da)_{\varpi_0} = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Выразив столбец  $a \in \mathbb{R}^6$  из последнего соотношения, подставим результат в равенство (6.5) и после несложных преобразований, а также замыкания по норме (3.8) придём к интегральному тождеству (3.25) для пары  $\{\mu_m^\bullet, w_{(m)}^\bullet\}$ .

Осталось проверить, что предел  $w_{(m)}^\bullet$  не обращается в нуль тождественно на  $\varpi_0$ . Ещё раз воспользуемся условиями (1.22), а также предельными переходами (6.2) и (6.4). Имеем

$$\begin{aligned} 1 &= \langle u_{(m)}^\varepsilon, u_{(m)}^\varepsilon \rangle_\varepsilon = (\lambda_m^\varepsilon + \varepsilon^{-1}) (u_{(m)}^\varepsilon, u_{(m)}^\varepsilon)_{\omega_0^\varepsilon} \\ &= \varepsilon^{-1} (1 + \varepsilon \lambda_m^\varepsilon) (\varepsilon^{-1/2} w_{(m)}^\varepsilon + d^t \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon t} + d^r \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon r}, \varepsilon^{-1/2} w_{(m)}^\varepsilon \\ &\quad + d^t \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon t} + d^r \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon r})_{\omega_0^\varepsilon} \\ &= (1 + \varepsilon \lambda_m^\varepsilon) (w_{(m)}^\varepsilon + \varepsilon^{1/2} d^t \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon t} + \varepsilon^{3/2} d^r \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon r}, w_{(m)}^\varepsilon + \varepsilon^{1/2} d^t \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon t} \\ &\quad + \varepsilon^{3/2} d^r \mathbf{u}_{(m)}^{\varepsilon r})_{\varpi_0} \\ &\rightarrow (1 + \mu_m^\bullet) (w_{(m)}^\bullet + d\mathbf{u}_{(m)}^\bullet, w_{(m)}^\bullet + d\mathbf{u}_{(m)}^\bullet)_{\varpi_0} = 1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Итак, в силу последнего равенства из (6.6) выкладка (6.7) гарантирует, что для вектор-функции  $(1 + \mu_m^\bullet)^{-1/2} w_{(m)}^\bullet$  выполнено условие нормировки (3.27).

**Предложение 6.3.** *Предельные переходы (6.2) и (6.3), (6.4) определяют собственную пару  $\{\mu_m^\bullet, w_{(m)}^\bullet\} \in \mathbb{R}_+ \times V_0^1(\mathbb{R}_-^3)$  задачи (3.25).*

Для того чтобы оценить погрешности в вычислении собственных чисел применим следующее утверждение, известное как лемма о “почти собственных” числе и векторе (см. первоисточник [21]) и обеспеченное

спектральным разложением резольвенты (см., например, [11, гл. 6]). Используем обозначения из разд. 1.

**Лемма 6.1.** Пусть  $U^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$  и  $K^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  таковы, что

$$\|U^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathcal{K}^\varepsilon U^\varepsilon - K^\varepsilon U^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| =: \delta \in [0, K^\varepsilon]. \quad (6.8)$$

Тогда у оператора  $\mathcal{K}^\varepsilon$  есть собственное число  $\kappa_n^\varepsilon$ , подчинённое неравенству  $|K^\varepsilon - \kappa_n^\varepsilon| \leq \delta$ .

Более того, для любого  $\delta_* \in (\delta, K^\varepsilon)$  найдутся коэффициенты  $C_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, C_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ , при которых верны формулы

$$\left\| U^\varepsilon - \sum_{l=\mathbf{N}^\varepsilon}^{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1} C_l^\varepsilon u_p^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon \right\| \leq 2 \frac{\delta}{\delta_*}, \quad \sum_{l=\mathbf{N}^\varepsilon}^{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1} |C_l^\varepsilon|^2 = 1, \quad (6.9)$$

где  $\kappa_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \kappa_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$  – набор всех собственных чисел оператора  $\mathcal{K}^\varepsilon$  на сегменте  $[K^\varepsilon - \delta_*, K^\varepsilon + \delta_*]$ , а соответствующие собственные векторы  $u_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, u_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$  удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки (1.22).

Пусть  $\mu_m$  – собственное число задачи (3.25) с кратностью  $\varkappa_m$ , т.е.

$$\mu_{m-1} < \mu_m = \dots = \mu_{m+\varkappa_m-1} < \mu_{m+\varkappa_m}. \quad (6.10)$$

В качестве почти собственных чисел возьмем  $\varkappa_m$  экземпляров величины

$$K_m^\varepsilon = \varepsilon(1 + \mu_m)^{-1}, \quad (6.11)$$

а почти собственные векторы определим формулами

$$U_{(q)}^\varepsilon = \|W_{(q)}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} W_{(q)}^\varepsilon, \quad q = m, \dots, m + \varkappa_m - 1, \quad (6.12)$$

где  $W_{(q)}^\varepsilon$  – сумма четырёх отделённых членов анзаца (3.2) с ингредиентами  $a_{(q)}$  и  $w_{(q)}, v_{(q)}$ .

**Лемма 6.2.** Справедливо неравенство

$$\left| \langle W_{(q)}^\varepsilon, W_{(p)}^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \varepsilon(1 + \mu_m) \delta_{p,q} \right| \leq c_m \varepsilon^3, \quad p, q = m, \dots, m + \varkappa_m - 1. \quad (6.13)$$

**Доказательство.** Согласно определениям (1.19), (1.20) при учёте скорости затухания  $O(\rho^{-1})$  собственных вектор-функций  $w_{(q)}, w_{(p)}$  (см.

формулы (3.10), (3.16), (3.17)) и соотношений (3.27) имеем

$$\begin{aligned}
 \langle W_{(q)}^\varepsilon, W_{(p)}^\varepsilon \rangle_\varepsilon &= E(w_{(q)} + \varepsilon^2 v_{(q)}, w_{(p)} + \varepsilon^2 v_{(p)}) \\
 &+ \varepsilon^{-1} (\varepsilon^{-1} d^r a_{(q)}^r + d^t a_{(q)}^t + w_{(q)} + \varepsilon^2 v_{(q)}, \varepsilon^{-1} d^r a_{(p)}^r + d^t a_{(p)}^t + w_{(p)} + \varepsilon^2 v_{(p)})_{\omega_0^\varepsilon} \\
 &= \varepsilon E(w_{(q)}, w_{(p)}; \mathbb{R}_-^3) + O(\varepsilon^3) \\
 &+ \varepsilon (d^r a_{(q)}^r + d^t a_{(q)}^t + w_{(q)}, d^r a_{(p)}^r + d^t a_{(p)}^t + w_{(p)})_{\omega_0} + O(\varepsilon^3). \quad \square
 \end{aligned}$$

Обработаем величины  $\delta_q^\varepsilon$  из формулы (6.8), найденные по “почти собственным” парам (6.11), (6.12):

$$\begin{aligned}
 \delta_q^\varepsilon &= \sup |\langle \mathcal{K}^\varepsilon V_{(q)}^\varepsilon - K_m^\varepsilon V_{(q)}^\varepsilon, \psi \rangle_\varepsilon| \\
 &= K_m^\varepsilon \|W_{(q)}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup |\varepsilon^{-1} (1 + \mu_m)(W_{(q)}^\varepsilon, \psi)_{\omega^\varepsilon} - E(W_{(q)}^\varepsilon, \psi; \Omega) - \varepsilon^{-1} (W_{(q)}^\varepsilon, \psi)_{\omega^\varepsilon}| \\
 &= \varepsilon^2 (1 + \mu_m)^{-1} \|W_{(q)}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup |\varepsilon^{-1} E(W_{(q)}^\varepsilon, \psi; \Omega) - \varepsilon^{-2} \mu_m (W_{(q)}^\varepsilon, \psi)_{\omega^\varepsilon}|.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Здесь супремум вычисляется по единичному шару в пространстве  $\mathcal{H}^\varepsilon$ , т.е.  $\|\psi; \mathcal{H}^\varepsilon\| \leq 1$  и согласно выкладкам из разд. 2 для ингредиентов  $\psi^t, \psi^r \in \mathbb{R}^3$  и  $\psi^\perp$  представления (2.1) пробной вектор-функции  $\psi$  верна оценка

$$\|\psi^\perp; H^1(\Omega)\|^2 + \varepsilon^2 |\psi^t|^2 + \varepsilon^4 |\psi^r|^2 \leq C. \tag{6.15}$$

Преобразуем выражение  $J^\varepsilon(W_{(q)}^\varepsilon, \psi)$  между последними знаками модуля в (6.14):

$$\begin{aligned}
 J^\varepsilon(W_{(q)}^\varepsilon, \psi) &= E(w_{(q)}, \widehat{\psi}; \mathbb{R}_-^3) - \mu_m(w_{(q)} + da_{(q)}, \widehat{\psi})_{\omega} \\
 &- \varepsilon^{-1} E(w_{(q)}, \widehat{\psi}; \mathbb{R}_-^3 \setminus \Omega) + \varepsilon E(v_{(q)}, \psi; \Omega) - \mu_m(v_{(q)}, \psi)_{\omega^\varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Приведем пояснения. В первых двух слагаемых сделана замена координат  $x \mapsto \xi$ , а через  $\widehat{\psi} \in H^1(\mathbb{R}_-^3)$  обозначено продолжение вектор-функции  $\psi$ , имеющее компактный носитель и потому попадающее в пространство  $V_0^1(\mathbb{R}_-^3)$ . Следовательно, сумма названных слагаемых обращается в нуль по причине интегрального тождества (3.25). Третье слагаемое при помощи формулы Грина преобразуем к виду

$$\varepsilon(N\Phi^\sigma b^\sigma, \psi)_{\partial\Omega} + \varepsilon^{-1}(N\widetilde{w}_{(q)}, \psi)_{\partial\Omega} =: \varepsilon J_v^\varepsilon(\psi) + \widetilde{J}^\varepsilon(\psi),$$

и обнаружим, что в силу интегрального тождества (3.21), связи  $\rho = r/\varepsilon$  радиусов-векторов и быстрой скорости  $O(\varepsilon^{-1}\rho^{-4})$  (ср. оценки (3.17))

затухания выражения  $N(x, \nabla_x) \tilde{w}_{(q)}(\xi)$ , которое аннулируется в окрестности точки  $P^0 = \mathcal{O}$  (см. предложение 3.2 и предположение о плоском участке  $\Gamma^0$ ), верны соотношения

$$E(v_{(q)}, \psi; \Omega) = J_v^\varepsilon(\psi) \quad \text{и} \quad |\tilde{J}^\varepsilon(\psi)| \leq c\varepsilon^2.$$

Наконец, гладкость вектор-функции  $v_{(q)}$  около точки  $\mathcal{O}$ , порядок  $\varepsilon^2$  площади фигуры  $\omega^\varepsilon \subset \Gamma^0$ , следовое неравенство (2.6) и оценка (6.15) для пробной вектор-функции  $\psi$  показывают, что

$$\mu_m |(v_{(q)}, \psi)_{\omega^\varepsilon}| \leq c\varepsilon \|\psi; L^2(\omega^\varepsilon)\| \leq c_m \varepsilon^{3/2}. \quad (6.17)$$

Все слагаемые из правой части равенства (6.16) оценены, причём наихудшая мажоранта возникла в соотношении (6.17), а значит, согласно формуле (6.13) получаем, что

$$\delta_q^\varepsilon \leq c_m \varepsilon^2 \varepsilon^{-1/2} \varepsilon^{3/2} = c_m \varepsilon^3, \quad q = m, \dots, m + \varkappa_m - 1. \quad (6.18)$$

Итак, в силу леммы 6.1 в  $c_m \varepsilon^3$ -окрестности точки (6.13) найдутся собственные числа  $\kappa_{N_m}^\varepsilon, \dots, \kappa_{N_{m+\varkappa_m-1}}^\varepsilon$  оператора  $\mathcal{K}^\varepsilon$ . (На этом этапе можно воспользоваться замечанием 3.2.)

Ближайшая цель – убедиться в том, что эти числа можно считать различными. С этой целью применим вторую часть леммы 6.1, положив в ней  $\delta_* = t^{-1} c_m \varepsilon^3$ , где  $t > 1$  – число, которое зафиксируем далее. Обозначим через  $\mathbf{U}_{(q)}^\varepsilon$  суммы по  $\mathbf{N}^\varepsilon, \dots, \mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1$ , появившиеся в написанной для  $U_{(q)}^\varepsilon$  формуле (6.9), а через  $\mathbf{C}_{(q)}^\varepsilon$  – соответствующие столбцы коэффициентов. В силу условий ортогональности и нормировки (1.22) имеем

$$\begin{aligned} \left| (\mathbf{C}_{(q)}^\varepsilon)^\top \mathbf{C}_{(p)}^\varepsilon - \delta_{p,q} \right| &= \left| \langle \mathbf{U}_{(p)}^\varepsilon, \mathbf{U}_{(q)}^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{p,q} \right| \\ &\leq \left| \langle U_{(p)}^\varepsilon - \mathbf{U}_{(p)}^\varepsilon, \mathbf{U}_{(q)}^\varepsilon \rangle_\varepsilon \right| + \left| \langle U_{(p)}^\varepsilon, U_{(p)}^\varepsilon - \mathbf{U}_{(q)}^\varepsilon \rangle_\varepsilon \right| + \left| \langle U_{(p)}^\varepsilon, U_{(p)}^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{p,q} \right|. \end{aligned} \quad (6.19)$$

В силу формулы (6.9) каждое из первых двух слагаемых в правой части соотношения (6.19) не превосходит  $2t^{-1}$ . Благодаря определению (6.11) и лемме 6.2, предоставившей, в частности, оценку снизу для нормы  $\|W_{(k)}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|$ , последнее слагаемое мажорируется величиной  $2c_m(1 + \mu_m)^{-1/2} \varepsilon^{5/2}$ , а значит, при малом  $\varepsilon$  и большом  $t$  столбцы  $\mathbf{C}_m^\varepsilon, \dots, \mathbf{C}_{m+\varkappa_m-1}^\varepsilon$  “почти ортонормированы” в пространстве  $\mathbb{R}^{\mathbf{N}^\varepsilon}$ , что возможно лишь в случае  $\varkappa_m \leq \mathbf{N}^\varepsilon$ . Зафиксировав нужные  $t_0 > 0$  и

$\widehat{\varepsilon}_m > 0$ , заключаем, что при  $\varepsilon \in (0, \widehat{\varepsilon}_m]$  в  $C_m \varepsilon^3$ -окрестности точки  $K_m^\varepsilon$  располагаются не менее  $\varkappa_m$  собственных чисел

$$\kappa_{N_m^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \kappa_{N_m^\varepsilon + \varkappa_m - 1}^\varepsilon \quad (6.20)$$

оператора  $\mathcal{K}^\varepsilon$ . Здесь  $C_m = t_0 c_m$ ,  $N_m^\varepsilon \in \mathbb{N}$  – некоторое число, и ещё предстоит убедиться в том, что  $N_m^\varepsilon = m + 6$  в списке (6.20).

Сначала заметим, что в силу формул (6.18) и (1.24) верны импликации

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left| (1 + \varepsilon \lambda_{N_m^\varepsilon + q}^\varepsilon)^{-1} - (1 + \mu_m)^{-1} \right| \leq C_m \varepsilon^3 \\ \Rightarrow & \begin{cases} \left| \lambda_{Q_m^\varepsilon + q}^\varepsilon - \varepsilon^{-1} \mu_m \right| \leq C_m \varepsilon (1 + \varepsilon \lambda_{N_m^\varepsilon + q}^\varepsilon) (1 + \mu_m) \\ 1 + \varepsilon \lambda_{N_m^\varepsilon + q}^\varepsilon \leq (1 + \mu_m) (1 + C_m \varepsilon (1 + \varepsilon \lambda_{N_m^\varepsilon + q}^\varepsilon)) \end{cases} \quad (6.21) \\ \Rightarrow & \left| \lambda_{N_m^\varepsilon + q}^\varepsilon - \varepsilon^{-1} \mu_m \right| \leq 2C_m (1 + \mu_m)^2 \\ & \text{при } \varepsilon \leq \varepsilon_m := \min \{ \widehat{\varepsilon}_m, (2C_m (1 + \mu_m))^{-1} \}. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого собственного числа  $\mu_k$  задачи (3.25) с кратностью  $\varkappa_k$  найдены собственные числа  $\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \lambda_{N_k^\varepsilon + \varkappa_k - 1}^\varepsilon$  задачи (1.9) в  $C_k \varepsilon$ -окрестности точки  $\varepsilon^{-1} \mu_m$ . Следовательно, вспомнив о первых шести нулевых членах последовательности (1.25), видим, что при  $\varepsilon \leq \min \{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \}$  справедливо неравенство  $N_m^\varepsilon \geq m + 6$  и, в частности, проверена первая формула (6.1), поскольку  $\lambda_{m+6}^\varepsilon \leq \lambda_{N_m^\varepsilon}^\varepsilon \leq \varepsilon^{-1} \mu_m + C_m \varepsilon$ . Итак, можно воспользоваться предложением 6.3 и, допустив строгое неравенство  $N_m^\varepsilon > m + 6$ , обнаружить противоречие. Именно, для некоторой положительной бесконечно малой последовательности  $\{ \varepsilon_{mk} \}_{k \in \mathbb{N}}$  найдется собственное число  $\lambda_{p_{mk}^\varepsilon}^{\varepsilon_{mk}} \in (0, \varepsilon^{-1} (\mu_m + \mu_{m+\varkappa_m}) / 2)$ , для которого собственная вектор-функция удовлетворяет соотношениям

$$0 = \langle u_{p_{mk}^\varepsilon}^{\varepsilon_{mk}}, u_{6+n}^{\varepsilon_{mk}} \rangle_\varepsilon = (1 + \lambda_{p_{mk}^\varepsilon}^{\varepsilon_{mk}}) \varepsilon_{mk}^{-1} \langle u_{p_{mk}^\varepsilon}^{\varepsilon_{mk}}, u_{6+n}^{\varepsilon_{mk}} \rangle_{\omega_0^{\varepsilon_{mk}}},$$

где индекс  $n \in \mathbb{N}$  принимает не менее  $m + \varkappa_m - 1$  разных значений. Предельные переходы (6.2) и (6.4) доставляют собственное число  $\mu^\bullet \in (0, (\mu_m + \mu_{m+\varkappa_m}) / 2)$  и нормированную вектор-функцию  $w^\bullet \in V_0^1(\mathbb{R}^3)^3$ , удовлетворяющую условиям ортогональности (3.27) с теми же индексами  $n$  в количестве  $m + \varkappa_m - 1$  штук. Последнее противоречит способу образования последовательности (3.27). Теорема 3.2 доказана.

**Замечание 6.3.** Установленная оценка (3.30) асимптотически точная, так как невязка, порождённая слагаемым  $\varepsilon^2 v_{(m)}(x)$  из анзаца (3.2) в

спектральном условии (1.3), составляет  $O(\varepsilon)$  и компенсируется слагаемым  $\varepsilon\mu'_m$  в представлении (3.1), у которого  $\varepsilon^{-1}\mu_m$  – главный член. При учете замечания 3.1 можно убедиться в том, что в случае искривлённой поверхности мажоранта в неравенстве (3.30) превращается в постоянную  $c_m^\sim$  (без множителя  $\varepsilon$ ).  $\square$

Оценивание остатков в представлениях (3.2) собственных вектор-функций также проводится стандартным путём при помощи второй части леммы 6.1. Для краткости покажем как это делается для простого собственного числа, но теорему 6.4 об асимптотике собственных вектор-функций сформулируем в полном объеме.

Пусть  $\mu_m$  – простое собственное число, т.е.  $\varkappa_m = 1$  в (6.10). В формуле (6.9) возьмём  $\delta_* = \varepsilon t$ , а множитель  $t > 0$  при учете теоремы 3.2 и связи (1.24) спектральных параметров подберем так, чтобы сегмент  $[\varepsilon(1 + \mu_m)^{-1} - \varepsilon t, \varepsilon(1 + \mu_m)^{-1} + \varepsilon t]$  содержал только одно собственное число  $\kappa_{m+6}^\varepsilon$  оператора  $\mathcal{K}^\varepsilon$ . Следовательно,  $\mathbf{N}^\varepsilon = m + 6$ ,  $\mathbf{X}^\varepsilon = 1$  и  $C_m^\varepsilon = 1$  в формуле (6.9) (при необходимости изменили знак у собственной вектор-функции  $u_{m+6}^\varepsilon$ ), а значит,

$$\begin{aligned} & \|U_{(m)}^\varepsilon - u_{(m)}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| \leq c_m \varepsilon \\ \Rightarrow & \|u_{(m)}^\varepsilon - \varepsilon^{-1/2}(1 + \mu_m)^{-1/2}(\varepsilon^{-1}d^t a_{(m)}^t + d^r a_{(m)}^r + w_{(m)}); \mathcal{H}^\varepsilon\| \leq c_m \varepsilon. \end{aligned}$$

При этом приняты во внимание вытекающее из леммы 6.2 соотношение  $\|W_{(m)}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = \varepsilon^{1/2}((1 + \mu_m)^{1/2} + O(\varepsilon^2))$  и тот факт, что слагаемое  $\varepsilon^2 v_{(m)}$  с  $\mathcal{H}^\varepsilon$ -нормой  $O(\varepsilon^2)$  можно присоединить к остатку.

**Теорема 6.4.** Пусть  $\mu_m$  –  $\varkappa_m$ -кратное собственное число задачи (3.25),  $w_{(m)}, \dots, w_{(m+\varkappa_m-1)}$  – соответствующие собственные вектор-функции, подчинённые условиям (3.27), а столбцы  $a_{(m)}, \dots, a_{(m+\varkappa_m-1)} \in \mathbb{R}^6$  вычислены по формуле (3.22). Тогда найдутся такие числа  $\varepsilon_m > 0$ ,  $c_m > 0$  и ортогональная матрица  $(C_{pq}^\varepsilon)_{p,q=m}^{m+\varkappa_m-1}$ , что для собственных вектор-функций задачи (1.9), удовлетворяющих соотношениям (1.22), верны неравенства

$$\begin{aligned} & \left\| u_{(p)}^\varepsilon - \varepsilon^{-1/2}(1 + \mu_m)^{-1/2} \sum_{q=m}^{m+\varkappa_m-1} C_{pq}^\varepsilon (\varepsilon^{-1}d^t a_{(q)}^t + d^r a_{(q)}^r + w_{(q)}); \mathcal{H}^\varepsilon \right\| \leq c_m \varepsilon, \\ & p = m, \dots, m + \varkappa_m - 1. \end{aligned}$$

**7. Доступные обобщения и открытые вопросы.** (i) *Граница.*

Предположение о гладкости поверхности  $\partial\Omega$  было введено только для упрощения изложения. Разумеется, для сохранения всех результатов достаточно считать гладкими только участки  $\Gamma^j = \partial\Omega \cap \mathcal{V}^j$ . Впрочем среди точек  $P^0, \dots, P^{J-1}$  могут быть конические или их могут пересекать гладкие ребра (рис. 2, а и б). В этом случае предельные задачи типа (3.3)–(3.5) ставятся на конусе  $\mathbb{K}^j$  или двугранном угле  $\mathbb{D}^j$ , а множество  $\varpi_j$  лежит на их границах  $\partial\mathbb{K}^j$  или  $\partial\mathbb{D}^j$ . Если пятно  $\omega^\varepsilon$  расположено так, как указано на рис. 2, то в случае некругового конуса разницы между спектральными краевыми условиями с проекторами (1.7) и (1.6) нет, но в случае ребра эффект заполнения спектром комплексной плоскости может сохраниться, если ребро локально прямое.

В разд. 2–4 уплощённость участков  $\Gamma^0, \dots, \Gamma^{J-1}$  не играет существенной роли по причине примитивного строения анзацев для собственных вектор-функций – искривлённость границы проявляется лишь в младших, – игнорируемых – асимптотических членах. Согласно проведённому в разд. 3 анализу проектор (1.6) всегда обеспечивает такую простоту, однако для проектора (1.7) требуются ограничения на столбцы (1.18) или (5.4), причём в разд. 5 плоские участки  $\Gamma^0, \dots, \Gamma^{J-1}$  упростили как вычисления, так и формулировку самого дополнительного условия. Понятно, что форма поверхности важна: все повороты вокруг центра шара  $\Omega = \{x : |x| < R\}$  (см. пример 5.2,(1)) удовлетворяют задаче (1.1)–(1.3) с проектором (1.7) при каждом спектральном параметре  $\lambda^\varepsilon \in \mathbb{C}$  и любом расположении контактных пятен  $\omega_0^\varepsilon, \dots, \omega_{j-1}^\varepsilon$ , однако спектр задачи становится дискретным при “удачном” распределении пятен на эллипсоидальной поверхности с осями разных длин.

(ii) *Полные асимптотические разложения.* Итерационные процессы, разработанные в монографии [22, гл. 4 и 9, 10] позволяют построить бесконечные асимптотические ряды для собственных пар  $\{\lambda_m^\varepsilon, u_{(m)}^\varepsilon\}$  задачи (1.1)–(1.3), если только построены начальные члены асимптотики, поскольку в рамках метода составных разложений (см. [21, 22] и др.) на каждом шаге алгоритма предельные задачи решаются в одних и тех же функциональных пространствах.

В предположении о плоских участках  $\Gamma^0, \dots, \Gamma^{J-1}$ , принятом в абсолютном большинстве публикаций по обсуждаемой тематике, асимптотическая процедура достаточно проста: требуется привлечь младшие



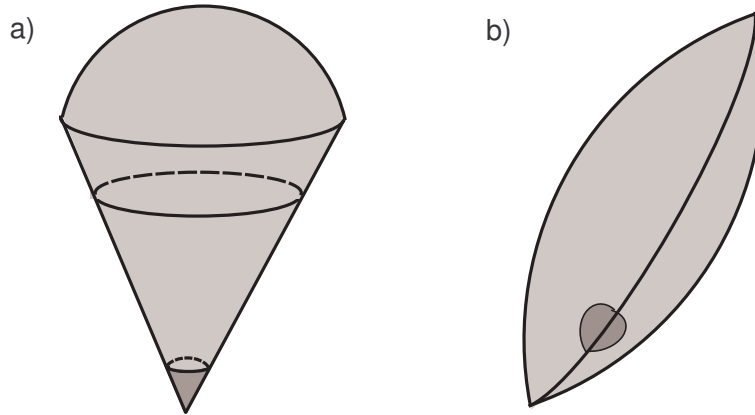


Рис. 2. Области с конической точкой (а) и ребром (б); контактные пятна глубоко тонированы.

члены разложений (3.16) и (3.14). Для искривлённой поверхности нужен переход в окрестности  $\mathcal{V}^j$  точки  $P^j$  к локальным координатам  $(s_1^j, s_2^j, n^j)$ , в которых операторы системы дифференциальных уравнений и краевых условий приобретают переменные коэффициенты и поэтому нуждаются в дополнительном разложении в бесконечные ряды. Аналогичное загромождение асимптотических конструкций возникает и в случае неоднородного упругого тела, когда матрица жесткости  $A$  зависит от точки  $x \in \Omega$ .

Алгоритмы, представленные в [22], обслуживают все описанные модификации. Обоснование асимптотик проводится по стандартной схеме, применённой в разд. 6, однако имеются и другие подходы (см., например, [13]).

(iii) *Спектральный параметр в системе дифференциальных уравнений.* Колебания весоного упругого тела  $\Omega$  с контактными пятнами  $\omega_0^\varepsilon, \dots, \omega_{j-1}^\varepsilon$  описываются собственными парами задачи (1.8), (1.2), (1.3). Асимптотические формулы

$$|\lambda_{m+6}^\varepsilon - \lambda_{m+6}^0| \leq c_m \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \text{ и } m \in \mathbb{N}, \quad (7.1)$$

её собственных чисел существенно отличаются от (3.1), (3.30) и привлекают спектр  $\{\lambda_k^0\}_{k \in \mathbb{N}}$  новой предельной спектральной задачи

$$L(\nabla_x)u^0(x) = \lambda^0 u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad N(x, \nabla_x)u^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Процедуры построения и обоснования асимптотик собственных пар можно извлечь из [22, гл. 9, 10].

В стороне остался вопрос о том, находит ли каким-то образом отражение в последовательности (1.25) спектр предельных задач в полупространстве  $\mathbb{R}_-^3$ . Вместе с тем в [12] показано, что высокочастотный диапазон спектра задачи Стеклова содержит собственные числа, которые порождены задачами о пограничных слоях, записанными в растянутых координатах.

(iv) *Двумерные задачи.* Из-за логарифмического множителя в фундаментальном решении для оператора  $-\Delta$  в  $\mathbb{R}^2$  собственные числа уравнения Лапласа в плоской области со спектральными условиями Стеклова на малых участках границы приобретают иные асимптотические структуры нежели указанные в (3.1) и (7.1), а именно, как установлено в [23], многие (но не все) члены асимптотики становятся вещественными аналитическими функциями нового малого параметра  $|\ln \varepsilon|^{-1}$ .

Автор благодарен анонимному рецензенту и редактору А. И. Назарову за полезные замечания, позволившие устранить опечатки и улучшить изложение.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*. М., Наука, 1977.
2. Ю. Н. Работнов, *Механика деформируемого твердого тела*. М., Наука, 1988.
3. С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. понижение размерности и интегральные оценки*. Новосибирск, Научная книга, 2002.
4. A. Bertram, *Elasticity and plasticity of large deformations*. Heidelberg, Springer-Verlag, 2005.
5. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*. М., Наука, 1973.
6. Г. Фикера, *Теоремы существования в теории упругости*. М., Мир, 1974.
7. С. А. Назаров, *Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы*. — Проблемы матем. анализа. Вып. 16. СПб: изд-во СПбГУ. (1997), 167–192.

8. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов*. — Успехи матем. наук **54**, No. 5 (1999), 77–142.
9. С. А. Назаров, *Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней*. — Успехи матем. наук **63**, No. 1 (2008), 37–110.
10. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна*. — Успехи матем. наук **43**, No. 5 (1988), 55–98.
11. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. Л., изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
12. С. А. Назаров, *Асимптотические разложения собственных чисел задачи Стеклова в сингулярно возмущенных областях*. — Алгебра и анализ **26**, No. 2 (2014), 119–184.
13. S. A. Nazarov, *Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions*. — RAIRO Model. Math. Anal. Numer. **27**, No. 6 (1993) 777–799.
14. J. J. Stoker, *Water Waves. The Mathematical Theory with Applications*. New-York, Wiley, 1992.
15. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear Water Waves*. Cambridge, Cambridge University, 2002.
16. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. — Труды Московск. матем. общества **16** (1963), 219–292.
17. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Теория упругости*. М, Наука, 1982.
19. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками*. — Math. Nachr. Bd. 76 (1977), 29–60.
20. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Оценки в  $L_p$  и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе*. — Math. Nachr. Bd. 77 (1977), 25–82.
21. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*. — Успехи матем. наук **12**, No. 5 (1957), 3–122.
22. W. G. Mazja, S. A. Nasarov, B. A. Plamenevski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten*. 1 & 2. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. (Английский перевод: Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000).
23. В. Киадо Пиат, С. А. Назаров, *Смешанные краевые задачи в сингулярно возмущенных двумерных областях со спектральным условием Стеклова*. — Проблемы матем. анализа. Вып. 106. Новосибирск (2020), 91–124.

Nazarov S. A. Asymptotics of eigenvalues of the elasticity theory problem with the Winkler–Steklov spectral conditions at small parts of the boundary.

Asymptotics of eigenpairs of the elasticity theory system is constructed in a three-dimensional domain with the Winkler–Steklov spectral boundary conditions at several small parts (the contact blots) and the Neumann (traction-free) conditions at the remaining part of the boundary. The asymptotic structures are essentially dependent on the distribution of the blots and the elastic or springy type of the contact. Various examples are considered and open questions are formulated.

Институт проблем машиноведения РАН  
В. О. Большой пр. 61, 199178  
С-Петербург, Россия  
*E-mail*: [srgnazarov@yahoo.co.uk](mailto:srgnazarov@yahoo.co.uk)

Поступило 21 апреля 2022 г.