Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 519, 2022 г.

Ф. Д. Мироненко, А. И. Назаров

ЛОКАЛЬНАЯ ОЦЕНКА МАКСИМУМА ТИПА АЛЕКСАНДРОВА–БАКЕЛЬМАНА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ ВИДА “КНИЖКА”

§1. Введение

Идея оценки максимума для решений эллиптических уравнений второго порядка в недивергентной форме с помощью анализа нормального изображения выпуклой оболочки берет начало в работах А. Д. Александрова [5] и И. Я. Бакельмана [8]. В дальнейшем эта идея развивалась и использовалась многими авторами (обзор литературы по этой теме можно найти в [7] и в [6, §2.3]).

Настоящее краткое сообщение посвящено получению локальной оценки типа Александрова–Бакельмана на простейшем **стратифицированном множестве** (см. §2). Постановка задачи и формулировка основного результата содержатся в §3. В §4 исследуются свойства стратифицированного нормального отображения и приводится набросок доказательства основного результата.

Используемые обозначения. $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$ – точки в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

$B^n(R)$ – шар радиуса R в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат.

$B_0(R) := B^{n-1}(R) \times \{0\}$ – вложение $n-1$ мерного шара в $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n_\pm := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \gtrless 0\}$, $\quad B_\pm(R) := B^n(R) \cap \mathbb{R}^n_\pm$

$\mathbb{R}^n_{0,\pm} := \mathbb{R}^n_\pm \cup \{x_n = 0\}$, $\quad B_{0,\pm}(R) := B^n(R) \cap \mathbb{R}^n_{0,\pm} = B_0(R) \cup B_\pm(R)$

$\mathcal{U}(u) := \big\{(x,h) \in \mathbb{R}^{n+1} \big|\ x \in \mathrm{dom}(u),\ h \leqslant u(x)\big\}$ – подграфик функции u.

Ключевые слова: стратифицированное множество, принцип максимума Александрова–Бакельмана, нормальное отображение.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 22-21-00027, в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

$\mathrm{conv}(E) \subset \mathbb{R}^m$ – выпуклая оболочка множества $E \subset \mathbb{R}^m$.
Для функции u, заданной на выпуклом множестве в $\mathbb{R}^n$, определим ее **выпуклую оболочку** $\mathrm{conv}[u]$ как функцию, для которой $\mathcal{U}\big(\mathrm{conv}[u]\big) = \mathrm{conv}\big(\mathcal{U}(u)\big)$. Таким образом, выпуклая оболочка функции выпукла вверх.

$\Phi_z : \mathrm{dom}(z) \to \mathbb{R}^n$ – нормальное отображение, порождаемое выпуклой вверх функцией z. В общем случае это многозначное отображение, определяемое соотношением

$$\Phi_z(x_0) = \big\{p \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \langle p, x - x_0\rangle + z(x_0) \geqslant z(x), \quad x \in \mathrm{dom}(z)\big\},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение. В точках дифференцируемости функции z значение Φ_z определено однозначно и равно ее градиенту.

$u_+ := \max\{0, u\}$ – положительная часть функции u.

$\mathcal{Z}_u := \big\{x \in \mathrm{dom}(u) \mid u(x) = \mathrm{conv}[u_+](x)\big\}$ – множество контакта.

Индексы i и j принимают значения от 1 до n, а индексы l и m – от 1 до $n-1$. Оператор дифференцирования по переменной x_i обозначается D_i. Применяется правило суммирования по повторяющимся индексам.

§2. Стратифицированное множество

В общем случае стратифицированным множеством называется клеточный комплекс с некоторыми дополнительными свойствами (см., напр., [10]). В нашей работе рассматривается стратифицированное множество специального вида.

Рассмотрим $K \in \mathbb{N}$ копий n-мерного евклидова пространства и обозначим их $\mathbb{R}^{n,[k]}$. В каждом из этих пространств выделим n-ю координату $x_n^{[k]}$, а первые $n-1$ для всех пространств будем считать общими: $\bigcap_k \mathbb{R}^{n,[k]} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Множество

$$\mathbb{R}^{\circledast}_{+} := \bigcup_{k=1}^{K} \mathbb{R}^{n,[k]}_{0,+}$$

будем называть стратифицированным множеством типа “книжка”, что обусловлено интуитивными аналогиями, вызываемыми случаем $n = 2$. “Листы” $\mathbb{R}^{n,[k]}_{+}$ этой книжки называются n-мерными стратами, а “переплет” $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ – $(n-1)$-мерным стратом множества $\mathbb{R}^{\circledast}_{+}$.

Стратифицированным шаром будем называть шар в $\mathbb{R}^{\circledast}_{+}$ (см. рис. 1):

$$\mathbb{B} := \Big\{ x \in \mathbb{R}^{\circledast}_{+} \,\Big|\, |x| < R \Big\} = \bigcup_{k=1}^{K} B^{[k]}_{0,+}(R).$$

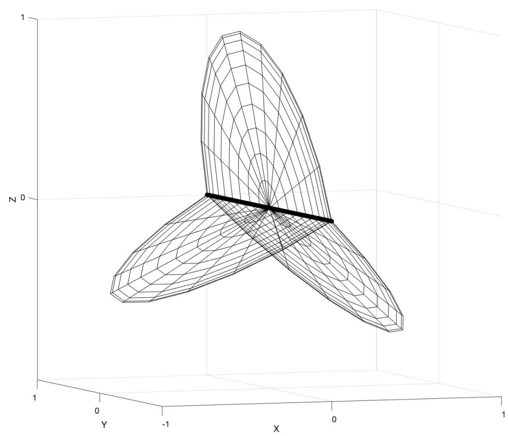

Рис. 1. Стратифицированный шар $\mathbb{B}$ при $n\!=\!2$ и $K\!=\!3$.

Границу этого шара можно явно записать так:

$$\partial\mathbb{B} = \bigcup \partial B^{[k]}_{0,+}(R) \setminus B_0(R).$$

В дальнейшем все векторы, принадлежащие пространству $\mathbb{R}^{n,[k]}$, будут обозначаться верхним индексом: $x^{[k]}$, и аналогичная запись будет использоваться для их n-ых компонент. И наоборот, для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ мы будем обозначать через $x^{[k]}$ его естественное вложение в $\mathbb{R}^{n,[k]}$.

Далее, функция $u : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ может быть представлена как набор своих функций-компонент $u_1, \ldots, u_K : B_{0,+}(R) \to \mathbb{R}$, для которых выполняется условие согласованности $u_i|_{B_0(R)} \equiv u_j|_{B_0(R)}$. Таким образом,

$$u\big(x^{[k]}\big) = u_k(x).$$

Введём аналог выпуклой оболочки функции u:

$$\mathrm{conv}[u]\big(x^{[k]}\big) = \mathrm{conv}[u_k](x). \tag{1}$$

Это определение корректно в силу следующего очевидного утверждения.

Лемма 1. *Рассмотрим функции $u_1, u_2 \in \mathcal{C}\big(\overline{B_+(R)}\big)$. Тогда*

$$u_1|_{B_0(R)} \equiv u_2|_{B_0(R)} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{conv}[u_1]|_{B_0(R)} \equiv \mathrm{conv}[u_2]|_{B_0(R)}.$$

Иными словами, сужение выпуклой оболочки непрерывной функции на $B_0(R)$ зависит лишь от значений функции на $B_0(R)$.

§3. Эллиптическое уравнение на стратифицированном шаре. Формулировка основного результата

Пусть на каждом из n-мерных стратов $B_+^{[k]}(R)$ задан оператор второго порядка

$$\mathcal{L}^{[k]}u(x) := -a_{ij}^{[k]}(x)D_iD_ju(x) \ + \ b_i^{[k]}(x)D_iu(x),$$

на коэффициенты которого накладываются следующие условия:

$$a_{ij}^{[k]} \in L_\infty\big(B_+^{[k]}(R)\big), \quad b_i^{[k]} \in L_n\big(B_+^{[k]}(R)\big).$$

На $(n-1)$-мерном страте определим оператор второго порядка

$$\mathcal{B}u(x') := -\alpha_{lm}(x')D_lD_mu(x',0) \ + \ \beta_l(x')D_lu(x',0),$$

где

$$\alpha_{lm} \in L_\infty\big(B_0(R)\big), \quad \beta_l \in L_{n-1}\big(B_0(R)\big),$$

и оператор “сопряжения”

$$\mathcal{J}u = \sum_{k=1}^{K} \beta_n^{[k]}(x') \cdot \lim_{x_n^{[k]} \to 0+} D_nu(x', x_n^{[k]})$$

(здесь $\beta_n^{[k]}$ – измеримые функции).

Матрицы старших коэффициентов операторов $\mathcal{L}^{[k]}$ и $\mathcal{B}$ удовлетворяют условию эллиптичности

$$\big(a_{ij}^{[k]}\big) \geqslant \nu I_n, \quad (\alpha_{lm}) \geqslant \nu I_{n-1}$$

(здесь $\nu > 0$ – константа эллиптичности, а неравенства понимаются в смысле квадратичных форм), а коэффициенты оператора $\mathcal{J}$ – условию $\beta_n^{[k]} \leqslant 0$, $k = 1, \dots, K$.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть функция* $u \in W_n^2(\mathbb{B})$ *такая, что*

$$u\big|_{B_0(R)} \in W_{n-1}^2\big(B_0(R)\big),$$

является решением задачи

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{[k]}u = f^{[k]} && \textit{в} \ \ B_+^{[k]}(R), \quad k = 1, \dots, K;\\ &\mathcal{B}u + \mathcal{J}u = g && \textit{в} \ \ B_0(R);\\ &u \leqslant 0 && \textit{на} \ \ \partial\mathbb{B}. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда справедлива оценка:

$$\max_{\overline{\mathbb{B}}} u_+ \leqslant N\left(n, \ \left(\frac{\|\, b^{[k]}\|_n}{\nu}\right)_{k=1}^{K}, \ \frac{\|\beta'\|_{n-1}}{\nu}\right) \cdot \frac{R}{\nu} \cdot \left(\sum_{k=1}^{K} \big\|f_+^{[k]}\big\|_n + \big\|g_+\big\|_{n-1}\right)$$

(все нормы в правой части берутся по множествам $\{x \mid u(x) > 0\}$ *на соответствующих стратах).*

Замечание 1. При $K = 1$ задача (2) – это классическая задача Вентцеля (результат теоремы 1 в этом случае был получен в [2, 4]), а при $K = 2$ – двухфазная задача Вентцеля (соответственно, в [1]). Существенно, что такие стратифицированные множества вкладываются в $\mathbb{R}^n$, что значительно упрощает анализ нормального изображения.

Будем считать, что $u \in \mathcal{C}^2\big(\overline{\mathbb{B}}\big)$ и $u\big|_{\partial\mathbb{B}} < 0$. Общий случай получается из этого стандартной аппроксимацией (см., например, доказательство теоремы 2.2 в [6]).

§4. Стратифицированное нормальное отображение

Обозначим $M = \max u_+$ (не умаляя общности, можно считать $M > 0$). Введём выпуклую оболочку $z = \operatorname{conv}[u_+]$ вида (1) и обозначим z_k ее k-ю компоненту.

Определим стратифицированный аналог нормального отображения Φ_z покомпонентно (заметим, что такое отображение всегда многозначно в точках “переплета”):

$$\begin{aligned} \Phi_z(x^{[k]}) &= \big(\Phi_{z_k}(x)\big)^{[k]}, && x^{[k]} \in B_+^{[k]}(R);\\ \Phi_z(x) &= \bigcup_{k=1}^{K} \big(\Phi_{z_k}(x)\big)^{[k]}, && x \in B_0(R). \end{aligned}$$

Введём в $\mathbb{R}^{\circledast}$ “двойственный” стратифицированный шар:

$$\mathbb{B}^* = \bigcup_{k=1}^{K} B_{0,-}^{[k]}\big(M/2R\big).$$

Далее в этом параграфе мы построим множество $\mathcal{D} \subset \mathbb{B}^*$. С одной стороны, оно имеет достаточно большой объем (именно, его проекция на $\mathbb{R}^n$ совпадает с полушаром $B_{0,-}(M/2R)$), а с другой – интеграл по нему можно оценить в терминах правых частей задачи (2) аналогично изначальной идее Александрова и Бакельмана. Для начала рассмотрим функцию

$$\widehat{u}(x) := \max\big\{u_1(x), \ldots, u_K(x)\big\} \tag{3}$$

и выпуклую оболочку $\widehat{z} := \operatorname{conv}[\widehat{u}_+]$. Заметим, что $\widehat{u}$ может не принадлежать классу $\mathcal{C}^1\big(B_{0,+}(R)\big)$. Однако она удовлетворяет условию нижнего шара (см. [9]) и $\widehat{u}\big|_{\partial B_{0,+}(R)\setminus B_0(R)} < 0$. Поэтому, аналогично лемме 2 в [9], градиент функции $\widehat{z}$ удовлетворяет условию Липшица.

Нам понадобятся два вспомогательных утверждения. Первое из них легко следует из теоремы Каратеодори (см., напр., [3, §17]).

Лемма 2. *Рассмотрим вектор $p \in \mathbb{R}^n_{0,-}$. Если плоскость π с градиентом p является опорной к графику $\widehat{z}$ с точкой касания $x^0 \in B_{0,+}(R)$, то у этой же опорной плоскости можно выбрать другую точку касания x^1, лежащую в множестве контакта $\mathcal{Z}_{\widehat{u}}$. При этом, если $x^0 \in B_0(R)$, то и x^1 может быть выбрана из $B_0(R)$.*

Второе утверждение хорошо известно (см., напр., доказательство теоремы 1.2 в [7]).

Лемма 3. $B_{0,-}(M/2R) \subset \Phi_{\widehat{z}}(B_{0,+}(R))$.

Из лемм 2 и 3 видно, что для любого вектора $p \in B_{0,-}\big(M/2R\big)$ существует точка касания $x \in \mathcal{Z}_{\widehat{u}}$ опорной плоскости с нормальным вектором $(p, -1)$ и графика $\widehat{z}$. Очевидно, в точке x опорная плоскость касается графиков тех компонент u_k, которые доставляют максимум в (3).

Обозначим через $\mathcal{P}_k$ множество тех $p \in B_{0,-}(M/2R)$, для которых соответствующие опорные плоскости касаются графика u_k. Множества $\mathcal{P}_k$ измеримы, и их объединением является весь полушар

$B_{0,-}(M/2R)$. Далее для удобства рассмотрим дизъюнктный набор

$$\mathcal{D}_k \;:=\; \mathcal{P}_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{P}_j \;\subset\; \Phi_{z_k}\big(B_{0,+}(R)\big) \cap \Phi_{\widehat{z}}\big(B_{0,+}(R)\big). \tag{4}$$

Теперь мы готовы определить искомое множество:

$$\mathcal{D} := \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{D}_k^{[k]} \subset \mathbb{B}^*$$

(каждое из множеств $\mathcal{D}_k$ “поднимается” на соответствующий лист).

Лемма 4 (Основное свойство множества $\mathcal{D}$)**.**

$$\widetilde{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \setminus \Phi_z\big(\mathbb{B} \setminus B_0(R)\big) \subset \Phi_z\big(\widetilde{\mathcal{Z}}\big),$$

где $\widetilde{\mathcal{Z}}$ – специальное множество на “переплете”:

$$\widetilde{\mathcal{Z}} := \Big\{ x \in \mathcal{Z}_u \cap B_0(R) \;\Big|\; \forall k: \quad D_n^{[k]} z(x',0) := \lim_{x_n^{[k]} \to 0+} D_n z(x', x_n^{[k]}) \leqslant 0 \Big\}.$$

Доказательство. Аналогично рассуждению из начала параграфа, градиент функции z удовлетворяет условию Липшица на каждом листе, поэтому множество $\widetilde{\mathcal{Z}}$ корректно определено.

Из определения множества $\mathcal{D}$ немедленно следует, что $\mathcal{D} \subset \Phi_z(\mathbb{B})$, и потому $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \Phi_z\big(B_0(R)\big)$, а из (4) видно, что для любого фиксированного $p^{[\kappa]} \in \widetilde{\mathcal{D}}$ выполнено $p \in \Phi_{\widehat{z}}\big(B_0(R)\big)$. Более того, по лемме 2 можно выбрать точку $x = (x', 0)$ из прообраза $\Phi_{\widehat{z}}^{-1}(p)$ так, что $x \in \mathcal{Z}_{\widehat{u}}$.

Функция $\widehat{u}$ по определению мажорирует каждую из компонент u_k, поэтому $\widehat{z} \geqslant z_k$, $k = 1, \ldots, K$. С другой стороны, $u_1(x) = \cdots = u_K(x) = \widehat{u}(x) = \widehat{z}(x)$. Поэтому для любого $k = 1, \ldots, K$ имеем

$$\lim_{x_n \to 0+} D_n z_k(x', x_n) \leqslant \lim_{x_n \to 0+} D_n \widehat{z}(x', x_n) \leqslant p_n \leqslant 0.$$

Тем самым $p^{[\kappa]} \in \Phi_z\big(\widetilde{\mathcal{Z}}\big)$, что и доказывает лемму. □

Схема доказательства теоремы 1.

Из леммы 4 следует, что справедливо включение

$$\mathcal{D} \subset \bigcup_{k=1}^{K} \Phi_z\Big(B_+^{[k]}(R)\Big) \cup \Phi_z\big(\widetilde{\mathcal{Z}}\big).$$

Поскольку $\mathcal{D}$ взаимно однозначно проецируется на полушар $B_{0,-}(M/2R)$, для любой неотрицательной измеримой функции g получаем аналогично теореме 3.3 [7] (см. также [1, Lemma 1.2])

$$\int\limits_{B_{0,-}(M/2R)} g(p)dp \leqslant \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{B_{+}(R)} g\big(Dz_k(x)\big) \cdot \det\big(-D^2 z_k(x)\big)dx$$
$$+\int\limits_{\widetilde{\mathcal{Z}}} \int\limits_{-M/2R}^{0} g\big(D'z(x',0),p_n\big) \cdot \det\big(-D'^2 z(x',0)\big)\,dp_n dx' \qquad (5)$$

(напомним, что на “переплете” все компоненты совпадают, поэтому $D'z$ и $D'^2 z$ определены корректно).

Положив $g(p) = (F^2 + |p|^2)^{-\frac{n}{2}}$, можно закончить доказательство так же, как в теореме 3.3 [7].

Список литературы

1. D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, *Linear two-phase Venttsel problems.* — Arkiv för matematik **39**, No. 2 (2001), 201–222.
2. D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, *Hölder estimates of solutions to initial-boundary value problems for parabolic equations of nondivergent form with Wentzel boundary condition.* — Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **164** (1995), 1–13.
3. Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, М., Мир (1973).
4. Y. Luo, *An Aleksandrov-Bakelman type maximum principle and applications.* — J. Differ. Equations **101**, No. 2 (1993), 213–231.
5. А. Д. Александров, *Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле.* — ДАН СССР **134**, No. 5 (1960), 1001–1004.
6. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Лемма о нормальной производной и вокруг неё.* — Усп. матем. наук **77** (2022), 3–68.
7. А. И. Назаров, *Принцип максимума А.Д. Александрова.* — Современная математика и ее приложения **29** (2005), 127–143.
8. И. Я. Бакельман, *К теории квазилинейных эллиптических уравнений.* — Сибирс. матем. ж. **2** (1961), 179–186.
9. А. И. Назаров, Н. Н. Уральцева, *Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **147** (1985), 95–109.
10. С. Н. Ощепкова, О. М. Пенкин, *Теорема о среднем для эллиптического оператора на стратифицированном множестве.* — Матем. зам. **81** (2007), 417–426.

Mironenko F. D., Nazarov A. I. Local Aleksandrov–Bakelman type maximum estimate for solutions to elliptic equations on a book-type stratified set.

In the last decades studies of partial differential equations on complex structures have been gaining their popularity. In particular, we notice equations on so-called stratified sets. We prove the Aleksandrov–Bakelman type maximum principle for linear elliptic second order equation on a "book" type stratified set.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
и Санкт-Петербургский госуниверситет

E-mail: fomius2000@yandex.ru

E-mail: al.il.nazarov@gmail.com

Поступило 6 ноября 2022 г.