Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 519, 2022 г.

А. И. Кароль

СИНГУЛЯРНЫЕ ЧИСЛА КОМПАКТНЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМ СИМВОЛОМ

Введение

В работе рассматриваются компактные в $L_2(\Omega)$ псевдодифференциальные операторы, заданные на $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ формулой

$$\big(Au\big)(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\Omega} e^{i(x-y)\xi} a(x,\xi) \langle\xi\rangle^{-(m+h(x))} u(y)dyd\xi. \qquad (1)$$

здесь (и далее) $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$, $m>0$, функция h неотрицательна. Область $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ ограничена и имеет липшицеву границу. Будем считать, что ограниченный символ a определен для всех $x,\xi\in\mathbb{R}^d$ и $a(x,\xi)\equiv 0$ для достаточно больших $|x|$. Порядок убывания символа по переменной ξ зависит от точки x, такой оператор будем называть оператором переменного порядка. Интерес к операторам такого вида возник в последние 5–10 лет в связи с теорией случайных процессов. К исследованию спектральных асимптотик таких операторов сводятся проблемы определения асимптотики вероятности малых уклонений в L_2 для гауссовых процессов с переменным показателем Хёрста [1,3,4]. В этих приложениях важно получить спектральные асимптотики при минимальных требованиях гладкости на функцию h и символ a.

Асимптотические свойства спектра операторов с классическими (однородными по переменной ξ) символами при очень слабых условиях гладкости получены в работах [13, 14]. В этих работах условия на символ формулируются в терминах принадлежности символа подходящему классу мультипликаторов ядер интегральных операторов. Ключевым моментом являлось использование спектральных оценок Розенблюма–Либа–Цвикеля. В настоящей работе условия на символ

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, негладкий символ, вейлевская асимптотика, асимптотики вероятности малых уклонений гауссовых процессов, переменный показатель Хёрста.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 20-51-12004.

также являются мультипликаторными, вместо оценок Розенблюма–Либа–Цвикеля используются спектральные асимптотики операторов с негладкими символами вида

$$p(x,\xi)^{-(m+h(x))}, \quad \text{где} \quad h(x) \geqslant 0, \tag{2}$$

и p – эллиптический символ первого порядка. Такой вид имеет символ оператора (1) для эллиптического символа a.

Асимптотические свойства спектра операторов с символами (2) определяются множеством, где функция h обращается в нуль. Если мера этого множества положительна, для оператора (1) сохраняется обычная степенная асимптотика. Основные трудности связаны с ситуацией, когда эта мера раняется нулю. В этом случае асимптотика является нестепенной и определяется поведением функции распределения для h в окрестности нулевого значения.

Даже если функция h является гладкой вне множества своих нулей, символ (2) вообще говоря теряет гладкость на фиксированном множестве переменных x. Спектральные асимптотики операторов с такими негладкими символами получены в [18] для операторов с вейлевскими символами $a\big((x+y)/2,\xi\big)$, и в [19, 20] для операторов с символами $a(x,\xi)$. Эти работы используют метод приближенного спектрального проектора в сочетании с методами асимптотической теории возмущений. В работах [19, 20] для оператора (1) с символом (2) при $m > d/2$ допускалось негладкое малое возмущение функции h. В настоящей работе ограничение на порядок оператора снято, а условия малости возмущения существенно ослаблены. Использование мультипликаторных свойств символов позволяет значительно снизить по сравнению с [19, 20] требования на функцию h и символ a. В частности, это позволило как пример рассмотреть функции h, обращающиеся в нуль на канторовом множестве. Для операторов переменного порядка оценки в слабых классах Шаттена с нестепенным поведением сингулярных чисел через нормы символа в классах мультипликаторов получены впервые.

Опишем структуру работы. В первом параграфе приведены формулировки основных результатов, теоремы 1.2–1.5. В §2 приведены вспомогательные сведения о классах компактных операторов, свойствах мультипликаторов, а также сформулирована теорема о спектральных асимптотиках псевдодифференциальных операторов с негладким по x символом. Эта теорема позволяет получить оценки сингулярных чисел старшей части оператора. §3 посвящен доказательству основных теорем 1.2–1.5. В §4 приведены приложения результатов о спектральной асимптотике к задачам об асимптотике малых уклонений для гауссовых процессов с переменным показателем Хёрста. В последнем параграфе 5 описаны достаточные аналитические условия на символы, для которых справедливы асимптотические формулы для сингулярных и собственных чисел. Эти условия связаны с правильным поведением символа по переменной ξ на бесконечности.

Приведем необходимые обозначения. Через C обозначаем различные константы. При необходимости параметры, от которых они зависят, указываем в скобках. Через $\{s_n(A)\}$ обозначаем невозрастающую последовательность сингулярных чисел (s-чисел) оператора $A : H_1 \to H_2$, занумерованную с учетом кратности, $s_n(A) := \sqrt{\lambda_n(A^*A)}$. $N(t, A)$ – функция распределения s-чисел,

$$N(t, A) := \#\{n \mid s_n(A) > t^{-1}\}.$$

Через $\mathbf{S}_p$ обозначаем класс Шаттена компактных операторов $A : H_1 \to H_2$ с конечной (квази)нормой, $\|A\|^p_{\mathbf{S}_p} := \sum\limits_n s^p_n(A)$. F – унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d)$ оператор Фурье,

$$(Fu)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} u(x) dx.$$

$\mathrm{vol}_k(G)$ – k-мерный объём множества G. Для неотрицательной функции f обозначаем через μ_f её функцию распределения,

$$\mu_f(s) := \mathrm{vol}_d\{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < f(x) < s\}. \tag{3}$$

Автор благодарен А. И. Назарову и А. В. Соболеву за полезные обсуждения и замечания.

§1. Постановка задачи. Основные результаты

Основной результат работы состоит в определении условий, при которых справедливы оценки функции распределения через норму символа и верна известная асимптотическая формула Вейля

$$N(t, A) = (2\pi)^{-d} \mathrm{vol}_{2d}\{x, \xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d \mid |a(x, \xi)| \langle\xi\rangle^{-(m+h(x))} > t^{-1}\} \times (1 + o(1)), \quad t \to \infty. \tag{4}$$

Условия на символ формулируются в терминах принадлежности символа подходящему классов мультипликаторов.

Напомним соответствующие определения (см. [15]). Для ограниченной функции $\Phi(x,\xi)$, $x,\xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d$ определим пребразование M_Φ в классе интегральных операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\Omega)$. Для оператора с ядром $K(x,\xi)$,

$$\big(Tf\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} K(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

оператор $M_\Phi T$ – интегральный с ядром $\Phi(x,\xi)K(x,\xi)$. По определению Φ – мультипликатор в классе Шаттена $\mathbf{S}_p$, если преобразование M_Φ непрерывно действует в пространстве $\mathbf{S}_p$. Множество таких мультипликаторов обозначим через $\mathcal{M}_p$. Нам потребуется лишь случай $p \geqslant 1$, когда пространства $\mathbf{S}_p$ нормируемы. Пространство мультипликаторов является тогда полным нормируемым пространством (банаховой алгеброй), мультипликаторной нормой $\|\Phi\|_{\mathcal{M}_p}$ функции Φ будем называть норму преобразования $M_\Phi : \mathbf{S}_p \to \mathbf{S}_p$.

Приведем достаточное аналитическое условие принадлежности функции классу мультипликаторов ([15, теорема 9.5 и следствие 9.2]).

Предложение 1.1. *Если при $q \geqslant 2$, $q\ell > d$ и $|1/p-1/2| < \ell/d$ функция $\xi \to \Phi(\cdot,\xi)$ – ограниченная функция со значениями в пространстве Соболева $W_q^\ell(\Omega)$, то Φ – мультипликатор в $\mathbf{S}_p$ и*

$$\|\Phi\|_{\mathcal{M}_p} \leqslant C\|\Phi(\,\cdot\,,\xi)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d, W_q^\ell(\Omega))}.$$

В частности, если $\Phi(\cdot,\xi)$ – ограниченная функция от ξ со значениями в $\mathcal{C}^l(\bar\Omega)$, $0 < l < 1$, то Φ является мультипликатором в $\mathbf{S}_p$ при $|1/p - 1/2| < l/d$.

Через $\mathcal{S}^0$ обозначим класс символов $a(x,\xi)$, для которых

$$|\partial_x^\alpha a(x,\xi)| \leqslant C(\alpha), \quad \forall\alpha, \quad x,\xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d,$$

и, если $\beta \neq 0$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leqslant C(\alpha,\beta,\varepsilon)\langle\xi\rangle^{\varepsilon-|\beta|}. \tag{5}$$

Отметим, что пересечение обычных классов Хермандера $S^0_{\rho,0}$ по всем $\rho < 1$ лежит в $\mathcal{S}^0$.

Из предложения 1.1 следует, что символы $a(x,\xi)$ из класса $\mathcal{S}^0$ входят в $\mathcal{M}_p$ для всех p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Обозначим через $\mathcal{S}(p)$ множество символов из $\mathcal{S}^0$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Для всех $x \in \bar{\Omega}$ существует предел
$$v(x,a) := \lim_{t\to+\infty} \mathrm{vol}_d\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid |\xi|^m < |a(x,t\xi)|\}. \tag{6}$$
Отметим, что функция $v(x,a)$ непрерывна (и даже гладкая) по переменной x.
2. Отображение, сопоставляющее символу $a \in \mathcal{S}(p)$ функцию $v(x,a) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, непрерывно как отображение из $\mathcal{M}_p$ в $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

Обозначим теперь через $\widetilde{\mathcal{M}}_p$ пополнение множества $\mathcal{S}(p)$ по норме $\mathcal{M}_p$. Отображение $a \to v(x,a)$ распространяется по непрерывности на класс $\widetilde{\mathcal{M}}_p$.

Конечно, в этот класс входят все непрерывные однородные по ξ вблизи бесконечности функции со значениями в $W_q^\ell(\Omega)$ при указанных параметрах ℓ, q. В приложении (§5) будут описаны другие достаточные аналитические условия принадлежности этому классу.

Обозначим через D множество нулей функции h. Асимптотика фазового объема в формуле (1) определяется сколь угодно узкой окрестностью этого множества и выражается через функцию $v(x,a)$.

В случае, когда $\mathrm{vol}_d(D) > 0$, для оператора A сохраняются степенные оценка и асимптотика функции распределения, которые были получены в [13, 14] для псевдодифференциальных операторов с классическими однородными символами.

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathrm{vol}_d(D) > 0$, $h \in L_\infty(\Omega)$, *а для параметра* p *выполнены неравенства*
$$p > d/m, \quad \text{если} \quad d/m \geqslant 2, \quad \text{и} \quad p < 2, \quad \text{если} \quad d/m \leqslant 2. \tag{7}$$
(*в частности, если* $d/m = 2$, *то* p *– любое число, не равное* 2).

Тогда

1. *Если символ* $a \in \mathcal{M}_p$, *то*
$$N(t,A) \leqslant C(m,d,p)\|a\|_{\mathcal{M}_p}^{\frac{d}{m}} t^{\frac{d}{m}}, \quad t > t_0 > 0. \tag{8}$$
.
2. *Если символ* $a \in \widetilde{\mathcal{M}}_p$, *то*
$$N(t,A) = (2\pi)^{-d} \int_D v(x,a)dx\, t^{\frac{d}{m}}\big(1 + o(1)\big), \quad t \to \infty. \tag{9}$$

Замечание. Асимптотика (9) получена в [19, 20] при дополнительном предположении гельдеровости функции h.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathrm{vol}_d(D) = 0$. Фиксируем функцию $\mathrm{d}(x), x \in \mathbb{R}^d$ – регуляризованное расстояние до D:

$$\mathrm{d} \asymp \mathrm{dist}(x, D), \text{ если } \mathrm{dist}(x, D) < 1 \text{ и } \mathrm{d}(x) = 2, \ \text{ если } \mathrm{dist}(x, D) > 2.$$

Предположим, что $\mathrm{d}(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus D)$, и

$$|\partial^\alpha \mathrm{d}(x)| \leqslant C(\alpha)\mathrm{d}^{1-|\alpha|}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus D, \tag{10}$$

а при некотором $\varkappa > 0$ для функции распределения (3) выполнено неравенство

$$\mu_{\mathrm{d}}(s) \leqslant Cs^{\varkappa},\ 0 < s < 1. \tag{11}$$

Условия (10), (11) заведомо выполнены, если множество D является липшицевой поверхностью; в этом случае параметр $\varkappa$ является её коразмерностью (см. [6]).

В окрестности множества D для выполнения формулы (1) наложим на функцию h следующие условия регулярности. Потребуем, чтобы при $x \to D$ можно было выделить главную часть асимптотики функции h. Именно, существует разложение $h = h_0 + h_1$, где главная часть h_0 непрерывна в точках множества D, бесконечно гладкая вне D, и

$$|\partial^\alpha h_0(x)| \leqslant C(\alpha)h_0(x)\mathrm{d}^{-|\alpha|}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus D. \tag{12}$$

Для остатка h_1 выполнено соотношение

$$h_1 = o(h_0^{1+\tau}) \quad \text{при} \quad x \to D, \quad \tau > 0. \tag{13}$$

Введем функции, через которые выражается асимптотика фазового объема в вейлевской формуле (1). Пусть для некоторого $\sigma > 0$ при $s \to +0$

$$\int\limits_{0<h(x)<s} v(x,a)dx = s^\sigma \psi(s,a)(1+o(1)), \tag{14}$$

где функция ψ такова, что для любого $\varepsilon > 0$

$$C_-(\varepsilon,a)s^\varepsilon \leqslant \psi(s,a) \leqslant C_+(\varepsilon,a)s^{-\varepsilon}, \quad 0 < s < 1. \tag{15}$$

Определим теперь функцию Ψ:

$$\Psi(t,a) := \int\limits_0^\infty t^{-\frac{s}{m}} d(s^\sigma \psi(s,a)), \quad t > 0. \tag{16}$$

Для $a \equiv 1$ функции $\psi(s,a), \Psi(s,a)$ обозначаем $\psi(s), \Psi(s)$ соответственно. В этом случае величина $v(x,a)$ совпадает с B_d – объемом единичного шара в $\mathbb{R}^d$ и при $s \to 0$

$$\mu_h(s) = B_d s^\sigma \psi(s)(1+o(1)), \tag{17}$$

$$\Psi(t) = \int\limits_0^\infty t^{-\frac{s}{m}} d(s^\sigma \psi(s)), \quad t>0. \tag{18}$$

Если функция $v(x,a) \not\equiv 0$ на множестве D, то $\psi(s,a) \asymp \psi(s)$, и константы $C_\pm$ в (15) положительны. Оценки (15) приводят к неравенствам

$$\widetilde{C}_-(\varepsilon)(\log t)^{-\sigma-\varepsilon} \leqslant \Psi(t,a) \ \leqslant \widetilde{C}_+(\varepsilon)(\log t)^{-\sigma+\varepsilon}, \quad t>1, \tag{19}$$

и при $t \to \infty$

$$|t\Psi'(t,a)| \leqslant C(\varepsilon)(\log t)^{-\sigma-1+\varepsilon} = o\big((\log t)^{-\rho}\Psi(t,a)\big), \quad 0<\rho<1. \tag{20}$$

Из последнего соотношения следует, что Ψ – *медленно меняющаяся функция* переменной t (см. [12]).

Поскольку функция $v(x,a)$ непрерывно зависит от символа a в метрике $\mathcal{M}_p$, то и функции $\psi(t,a)$, $\Psi(t,a)$ непрерывно зависят от a.

Приведем условия, когда можно дать явное описание асимптотики функции $\Psi(t,a)$ при $t \to \infty$.

Лемма 1.3. 1. *Если функция $t \to \psi(t^{-1},a)$ медленно меняющаяся при $t>1$, то*

$$\Psi(t,a) = \Gamma(\sigma+1)\Big(\frac{m}{\log t}\Big)^\sigma \psi(1/\log t, a)(1+o(1)), \quad t\to\infty,$$

Γ – гамма-функция Эйлера.

2. *Если функция $\psi(s,a)$ периодически зависит от $\log s$, т.е. для некоторой периодической функции ϕ имеем $\psi(s,a)=\phi(-\log s)$, то*

$$\Psi(t,a) = \Big(\frac{m}{\log t}\Big)^\sigma \widetilde{\Psi}(\log\log t), \quad \textit{где} \quad \widetilde{\Psi}(z) = \int\limits_0^\infty e^{-s}s^\sigma \phi(z-\log(ms))ds,$$

функция $\widetilde{\Psi}(z)$ периодична по z с тем же периодом, что и ϕ.

Доказательство. Интегрируя по частям в (16) и выполняя замену переменной, имеем

$$\Psi(t,a)=\frac{\log t}{m}\int\limits_0^\infty e^{-s\frac{\log t}{m}}s^\sigma\psi(s,a)ds=\Big(\frac{m}{\log t}\Big)^\sigma\int\limits_0^\infty e^{-s}s^\sigma\psi\Big(\frac{ms}{\log t},a\Big)ds. \quad (21)$$

Если ψ – медленно меняющаяся, то

$$\psi(c/\log t,a)=\psi(1/\log t,a)(1+o(1))$$

при $t\to\infty$, переход к пределу под знаком интеграла приводит к первому утверждению леммы.

Если $\psi(s,a)=\phi(-\log s)$, то из (21) сразу получаем второе утверждение леммы:

$$\Psi(t,a)=\Big(\frac{m}{\log t}\Big)^\sigma\int\limits_0^\infty e^{-s}s^\sigma\phi(-\log(ms)+\log\log t)ds. \qquad \square$$

Теорема 1.4. *Предположим, что* $\mathrm{vol}_d(D)=0$ *и выполнены условия* (10)–(15) *и* (7). *Пусть функция* h_0 *непрерывна в точках множества* D, *если* $d/m>2$ *и* $h_0\in\mathcal{C}^l(\bar\Omega)$ *для какого-то* $l\in(0,1)$, *если* $d/m\leqslant 2$.

Тогда для функции распределения сингулярных чисел оператора A *справедливы соотношения*

$$N(t,A)\leqslant C(d,m,h_0)\|a\|^{\frac{d}{m}}_{\mathcal{M}_p}t^{\frac{d}{m}}\Psi(t^{\frac{d}{m}}),\quad t>1,\quad \textit{для}\quad a\in\mathcal{M}_p, \quad (22)$$

$$N(t,A)=(2\pi)^{-d}t^{\frac{d}{m}}\Psi(t^{\frac{d}{m}},a)(1+o(1)),\quad t\to\infty,\quad \textit{для}\quad a\in\widetilde{\mathcal{M}_p}. \quad (23)$$

Замечание.

1. При выполнении условий леммы 1.3 достаточно требовать оценки (13) с $\tau=0$.
2. Асимптотика (23) получена в [19, 20] при $d/m<2$ и $\tau>\tau_0(m,d,\sigma)>0$ для эллиптических символов $a\in S^0_{\rho,\delta}$ и медленно меняющейся функции ψ в (14).

Справедливы аналоги теорем 1.2 и 1.4 для собственных чисел оператора $\mathrm{Re}A:=(A+A^*)/2$.

Опишем соответствующие классы символов. Пусть $\mathcal{S}_\dagger(p)$ – множество символов из $\mathcal{S}^0$, для которых справедливы следующие утверждения:

1. Для всех $x \in \bar{\Omega}$ существует предел
$$v_\dagger(x,a) := \lim_{t\to+\infty} \mathrm{vol}_d\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid |\xi|^m < \mathrm{Re}\, a(x,t\xi)\}. \tag{24}$$
2. Отображение, сопоставляющее символу $a \in \mathcal{S}_\dagger(p)$ функцию $v_\dagger(x,a) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, непрерывно, как отображение из $\mathcal{M}_p$ в $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

Через $\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\dagger}$ обозначим замыкание класса $\mathcal{S}_\dagger(m,p)$ в пространстве $\mathcal{M}_p$.

Пусть при $s \to 0$
$$\int\limits_{0<h(x)<s} v_\dagger(x,a)dx = s^\sigma \psi_\dagger(s,a)(1+o(1)), \tag{25}$$
$$\Psi_\dagger(t,a) := \int\limits_0^\infty t^{-\frac{s}{m}} d(s^\sigma \psi_\dagger(s,a)), \quad t>0. \tag{26}$$
Будем считать, что для функции $\psi_\dagger(s,a)$ сохраняются оценки (15), и, соответственно, оценки (19) для функции $\Psi_\dagger(t,a)$.

Пусть $N_\dagger(t,\mathrm{Re}A) := \#\{n \mid \lambda_n(\mathrm{Re}A) > t^{-1}\}$ – функция распределения положительных собственных чисел оператора $\mathrm{Re}A$.

Теорема 1.5.
1. *Если* $\mathrm{vol}_d(D) > 0$ *и* $a \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\dagger}$, *то в условиях теоремы* 1.2 *справедлива формула*
$$N_\dagger(t,\mathrm{Re}A) = (2\pi)^{-d} \int\limits_D v_\dagger(x,a)dx\; t^{\frac{d}{m}}\big(1+o(1)\big), \quad t\to\infty.$$
2. *Если* $\mathrm{vol}_d(D) = 0$ *и* $a \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\dagger}$, *то в условиях теоремы* 1.4 *справедлива формула*
$$N_\dagger(t,\mathrm{Re}A) = (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} \Psi_\dagger(t^{\frac{d}{m}},a)(1+o(1)), \quad t\to\infty.$$
.

Опишем кратко схему доказательства теорем 1.2–1.5. Основным моментом рассуждения является доказательство оценок (8), (22). Главные трудности связаны с случаем $\mathrm{vol}_d(D) = 0$. Требуется выделить старшую часть оператора, отвечающую за порядок убывания сингулярных чисел. Этой старшей частью является оператор A_0 с символом $a(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-(m+h_0(x))}$. Для $d/m \geqslant 2$ функция $a(x,\xi)$ является мультипликатором из соответствующего класса. Если $d/m < 2$, то оператор A_0

можно представить в виде произведения и использовать классы мультипликаторов сколь угодно близкие к максимально широкому классу L_∞ мультипликаторов в $\mathbf{S}_2$. Оценки сингулярных чисел оператора A_0 следуют из спектральных асимптотик, полученных в [19, 20] для гладких символов $a(x,\xi)$. Оценки спектра в мультипликаторных нормах позволяют распространить по непрерывности эти асимптотики на замыкание множества гладких символов в соответствующих пространствах мультипликаторов, тем самым существенно расширив область применения асимптотики Вейля (1) по сравнению с работами [19, 20].

Оставшаяся часть оператора A после выделения главной части A_0 – оператор A_1 с символом $a(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-(m+h_0(x))}(\langle\xi\rangle^{-h_1(x)}-1)$. Доказываются оценки сингулярных чисел этого оператора, которые позволяют сохранить для оператора A оценки и асимптотики, полученные для A_0. Для этого используются известные приемы оценки сингулярных чисел интегральных операторов.

§2. Вспомогательные утверждения

2.1. Классы $\mathbf{S}_{p,\Psi}$. Приведем необходимые сведения о сингулярных и собственных числах компактных операторов.

Нам потребуются классы компактных операторов с нестепенным асимптотическим поведением спектра. Для медленно меняющейся функции Ψ и $p>0$ рассмотрим класс $\mathbf{S}_{p,\Psi}$ компактных операторов $A : H_1 \to H_2$, для которых

$$\|A\|_{p,\Psi} := \sup_n \left(\frac{n}{\Psi(n)}\right)^{1/p} s_n(A) < \infty. \tag{27}$$

Классы $\mathbf{S}_{p,\Psi}$ подробно изучены в [17], все приводимые здесь сведения содержатся в этой работе. Для $\Psi(t)\equiv 1$ получаем обычный слабый класс Шаттена, для которого сохраняем стандартное обозначение $\mathbf{S}_{p,\infty}$. Класс $\mathbf{S}_{p,\Psi}$ – полное квазинормированное несепарабельное пространство относительно квазинормы (27). Множество $\mathring{\mathbf{S}}_{p,\Psi}$ операторов, для которых

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{n}{\Psi(n)}\right)^{1/p} s_n(A) = 0,$$

представляет собой сепарабельное замкнутое подпространство в $\mathbf{S}_{p,\Psi}$, пополнение по квазинорме (27) класса конечномерных операторов. В факторпространстве $\widetilde{\mathbf{S}}_{p,\Psi} := \mathbf{S}_{p,\Psi}/\mathring{\mathbf{S}}_{p,\Psi}$ индуцированная квазинорма есть

$$[A]_{p,\Psi} := \limsup_{k} \left(\frac{n}{\Psi(n)}\right)^{1/p} s_n(A), \tag{28}$$

эта величина не меняется при добавлении к A слагаемого из $\mathring{\mathbf{S}}_{p,\Psi}$.

Квазинорму (28) можно выразить через функцию распределения s-чисел. Введем функционал

$$\Delta_{p,\Psi}(A) := \limsup_{t\to\infty} \big(t^p \Psi(N(t,A))\big)^{-1} N(t,A).$$

Справедливо равенство

$$\Delta_{p,\Psi}(A) = \big([A]_{p,\Psi}\big)^p.$$

Для функционала $\big(\Delta_{p,\Psi}\big)^{\frac{1}{p+1}}$ верно неравенство треугольника, он задает индуцированную метрику на факторпространстве $\widetilde{\mathbf{S}}_{p,\Psi}$.

На пространстве $\mathbf{S}_{p,\Psi}$ рассмотрим также функционал

$$\delta_{p,\Psi}(A) := \liminf_{t\to\infty} \big(t^p \Psi(N(t,A))\big)^{-1} N(t,A).$$

Для самосопряженного компактного оператора A в гильбертовом пространстве H через $N_\pm(t,A)$ обозначаем функции распределения последовательностей $\lambda_n^\pm(A)$,

$$N_\pm(t,A) := \#\{n \mid \lambda_n^\pm(A) > t^{-1}\},$$

где $\lambda_n^+(A)$ – положительные и $-\lambda_n^-(A)$ – отрицательные собственные числа A. Для такого оператора из $\mathbf{S}_{p,\Psi}$ с помощью функций $N_\pm(t,A)$ аналогичным образом определим функционалы $\Delta^\pm_{p,\Psi}(A)$, $\delta^\pm_{p,\Psi}(A)$.

Пусть $D_{p,\Psi}$ – любой из функционалов $\Delta_{p,\Psi}$, $\delta_{p,\Psi}$, $\Delta^\pm_{p,\Psi}$, $\delta^\pm_{p,\Psi}$. Для операторов A_1, $A_2 \in \mathbf{S}_{p,\Psi}$ справедливы неравенства

$$\left|\big(D_{p,\Psi}(A_1)\big)^{\frac{1}{p+1}} - \big(D_{p,\Psi}(A_2)\big)^{\frac{1}{p+1}}\right| \leqslant \big(\Delta_{p,\Psi}(A_1 - A_2)\big)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Таким образом, все эти функционалы определены и непрерывны на факторпространстве $\widetilde{\mathbf{S}}_{p,\Psi}$. Совпадение значений функционалов $\Delta_{p,\Psi}(A) = \delta_{p,\Psi}(A) =: c$ эквивалентно асимптотике

$$s_n(A) = c\Big(\frac{\Psi(n)}{n}\Big)^{\frac{1}{p}}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Множество таких (классов) операторов замкнуто в $\widetilde{\mathbf{S}}_{p,\Psi}$. Это обстоятельство позволяет устанавливать асимптотику для подходящего плотного множества операторов, а затем распространять её по непрерывности.

Приведем утверждение об оценках s-чисел композиции операторов из классов $\mathbf{S}_{p,\Psi}$, [17, теорема 2.2a].

Предложение 2.1. *Пусть $A_1 : H_1 \to H_2$, $A_2 : H_2 \to H_3$ – компактные операторы из классов $\mathbf{S}_{p_j,\Psi_j}$, $j = 1,2$. Тогда $A_2A_1 \in \mathbf{S}_{p,\Psi}$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, $\Psi(t)^{1/p} = \Psi_1(t)^{1/p_1}\Psi_2(t)^{1/p_2}$,*

$$\|A_2A_1\|_{p,\Psi} \leqslant C(p_1,p_2,\Psi_1,\Psi_2)\|A_1\|_{p_1,\Psi_1}\|A_2\|_{p_2,\Psi_2},$$

$$[A_2A_1]_{p,\Psi} \leqslant \frac{p_1^{1/p_1}p_2^{1/p_2}}{p^{1/p}}[A_1]_{p_1,\Psi_1}[A_2]_{p_2,\Psi_2}.$$

Если один из операторов A_j принадлежит классу $\mathring{\mathbf{S}}_{p_j,\Psi_j}$, то и $A_2A_1 \in \mathring{\mathbf{S}}_{p,\Psi}$.

Пространства $\mathbf{S}_{p,\Psi}$ являются интерполяционными в шкале пространств $\mathbf{S}_p$, для них справедлива интерполяционная теорема, [17, §6].

Предложение 2.2. *Пусть линейное отображение $\mathcal{T}$ сопоставляет оператору A из $\mathbf{S}_{p_1} \cap \mathbf{S}_{p_2}$ оператор $\mathcal{T}A \in \mathbf{S}_{p_1} \cap \mathbf{S}_{p_2}$, причем*

$$\|\mathcal{T}A\|_{\mathbf{S}_{p_j}} \leqslant N_j\|A\|_{\mathbf{S}_{p_j}}, \quad j = 1,2.$$

Тогда для $0 < p_1 < p < p_2$ и медленно меняющейся функции Ψ отображение $\mathcal{T}$ непрерывно действует в пространстве $\mathbf{S}_{p,\Psi}$,

$$\|\mathcal{T}A\|_{\mathbf{S}_{p,\Psi}} \leqslant N(p,p_1,p_2,N_1,N_2,\Psi)\|A\|_{\mathbf{S}_{p,\Psi}}.$$

В дальнейшем нам понадобится описание функций, обратных к регулярно меняющимся функциям. Известно (см. [12]), что если f – медленно меняющаяся функция, то функция, обратная к $t \to \tau := tf(t)$, $t > t_0$, имеет вид $t = \tau g(\tau)$ для какой то медленно меняющейся функции g. При выполнении простых условий можно указать асимптотику функции g.

Лемма 2.3. *Пусть Ψ – медленно меняющаяся функция, и*

$$\frac{\Psi\big(\tau\Psi(\tau)\big)}{\Psi(\tau)} \to 1 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty. \tag{29}$$

Тогда для функции, обратной к $\tau(t) = \big(t/\Psi(t)\big)^{1/p}$, $p > 0$, справедливо равенство:

$$t(\tau) = \tau^p\Psi(\tau^p)\big(1 + o(1)\big), \quad \tau \to \infty.$$

Доказательство. Заменив τ на τ^p, приходим к ситуации, когда $p=1$. Будем искать функцию, обратную к $\tau(t)$ в виде $t=(1+\sigma(\tau))\tau\Psi(\tau)$. Имеем

$$1+\sigma=\frac{\Psi\big(\tau\Psi(\tau)(1+\sigma)\big)}{\Psi(\tau)}=\big(1+o(\sigma)\big)\frac{\Psi\big(\tau\Psi(\tau)\big)}{\Psi(\tau)}.$$

Из условия (29) получаем, что $\sigma(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$. □

Замечание.

1. Известное представление [12] медленно меняющейся функции

$$\Psi(t)=C\exp\Big(\int_1^t\frac{\epsilon(s)}{s}ds\Big),\quad \text{где}\quad \epsilon(s)=\frac{s\Psi'(s)}{\Psi(s)}\to 0$$

приводит к равенству

$$\frac{\Psi\big(\tau\Psi(\tau)\big)}{\Psi(\tau)}=\exp\Big(\int_\tau^{\tau\Psi(\tau)}\frac{\epsilon(s)}{s}ds\Big)=\exp\Big(\epsilon\big(s(\tau)\big)\,\log\Psi(\tau)\Big)$$

для какого то $s(\tau)$, $\tau<s(\tau)<\tau\Psi(\tau)$. Получаем, что условие (29) заведомо выполнено, если

$$\sup_{\tau\leqslant s\leqslant\tau\Psi(\tau)}\left|\frac{s\Psi'(s)}{\Psi(s)}\right|\log\Psi(\tau)\to 0\quad\text{при}\quad\tau\to\infty. \tag{30}$$

Из неравенств (20) следует, что функции Ψ, введенные в (16), (18), (26) удовлетворяют условию (30).

2. Функция $n\to 1/s_n(A)$ является "почти обратной" к функции $t\to N(t,A)$. Таким образом, для функций Ψ, удовлетворяющих условиям этой леммы, эквивалентны асимптотики

$$s_n(A)=\Big(\frac{\Psi(n)}{n}\Big)^{1/p}\big(1+o(1)\big)\quad\Longleftrightarrow\quad N(t,A)=t^p\Psi(t^p)\big(1+o(1)\big). \tag{31}$$

Справедливо равенство

$$\Delta_{p,\Psi}(A)=\limsup_{t\to\infty}\big(t^p\Psi(t^p)\big)^{-1}N(t,A).$$

Аналогичные равенства верны и для функционалов $\delta_{p,\Psi}$, $\Delta^{\pm}_{p,\Psi}$, $\delta^{\pm}_{p,\Psi}$.

2.2. Мультипликаторы в классах $\mathbf{S}_{p,\Psi}$. Следующее утверждение о свойствах мультипликаторов содержится в работе ([15]).

Предложение 2.4. 1. *Если $1/p + 1/p' = 1$, $1 \leqslant p$, $p' \leqslant \infty$, то $\mathbf{M}_{p'} = \mathbf{M}_p$, пространства изометричны.*

2. *Если $|1/p - 1/2| > |1/r - 1/2|$, то $\mathbf{M}_p \hookrightarrow \mathbf{M}_r$, $\|\Phi\|_{\mathcal{M}_r} \leqslant \|\Phi\|_{\mathcal{M}_p}$.*

Если Φ – мультипликатор в $\mathbf{S}_{p_0}$ и $\mathbf{S}_{p_1}$, то по интерполяционной теореме преобразование M_Φ будет непрерывным и в пространствах $\mathbf{S}_{p,\Psi}$ с промежуточными p, для соответствующей нормы справедлива оценка

$$\|\Phi\|_{\mathcal{M}_{p,\Psi}} \leqslant C(p_0, p_1, p, \Psi) \max\{\|\Phi\|_{\mathcal{M}_{p_0}}, \|\Phi\|_{\mathcal{M}_{p_1}}\}.$$

В частности, если функция Φ является непрерывным мультипликатором в $\mathbf{S}_p$, то эта функция будет мультипликатором и во всех пространствах $\mathbf{S}_{r,\Psi}$, $|1/p - 1/2| > |1/r - 1/2|$. Отметим, что если при этом $A \in \mathring{\mathbf{S}}_{r,\Psi}$, то и $M_\Phi A \in \mathring{\mathbf{S}}_{r,\Psi}$.

Нам потребуется следующий прием факторизации для оценки сингулярных чисел псевдодифференциального оператора отрицательного порядка (см. [13]).

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор $\mathfrak{A}$ в $L_2(\Omega)$,

$$\big(\mathfrak{A}u\big)(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} a(x,\xi) r(x,\xi) u(y)\,dy\,d\xi,$$

и семейство операторов $\mathcal{R}_l$, $0 < l \leqslant m$,

$$\big(\mathcal{R}_l f\big)(x) := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} r(x,\xi) \langle\xi\rangle^{m-l} f(\xi)\,d\xi, \quad \mathcal{R}_l : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega).$$

Лемма 2.5. *Пусть для какого то параметра l оператор $\mathcal{R}_l$ принадлежит классу $\mathbf{S}_{p_1,\Psi_1}$, а мультипликатор $a(x,\xi)$ непрерывен в $\mathbf{S}_{p_1,\Psi_1}$. Тогда*

$$\mathfrak{A} \in \mathbf{S}_{p_2,\Psi_2}, \quad 1/p_2 = 1/p_1 + (m-l)/d, \quad \Psi_2(k) = \Psi_1(k)^{p_2/p_1},$$

причем для соответствующих фактор норм справедливо неравенство

$$[\mathcal{R}_m]_{p_2,\Psi_2} \leqslant C(l,m,d) \|a\|_{p_1,\Psi_1} [\mathcal{R}_l]_{p_1,\Psi_1}.$$

Доказательство. Представим оператор $\mathfrak{A}$ в виде произведения, $\mathfrak{A} = \big(M_a \mathcal{R}_l\big) \mathcal{Q}_{m-l}$,

$$\big(\mathcal{Q}_{m-l} u\big)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\xi} \langle\xi\rangle^{-(m-l)} u(y)\,dy, \quad \mathcal{Q}_{m-l} : L_2(\Omega) \to L_2(\mathbb{R}^d),$$

M_a – преобразование, умножающее ядро оператора $\mathcal{R}_l$ на $a(x,\xi)$. При $t \to \infty$ имеем (см. например [13, 14]) $N(t,\mathcal{Q}_{m-l}) = ct^{\frac{d}{m-l}}(1+o(1))$, то есть $[\mathcal{Q}_{m-l}]_{\frac{d}{m-l},\infty} = c$. Из условия леммы вытекает, что $[M_a\mathcal{R}_l]_{p_1,\Psi_1} \leqslant \|a\|_{p_1,\Psi_1}[\mathcal{R}_l]_{p_1,\Psi_1}$. Утверждение леммы следует теперь из предложения 2.2. □

2.3. Спектральная асимптотика псевдодифференциальных операторов с символом, негладким по пространственным переменным. Нам потребуется следующий результат из работы [20] об асимптотике функции распределения спектра для одного класса операторов с символами, у которых гладкость нарушается на фиксированном множестве пространственных переменных.

Будем считать, что $\mathrm{vol}_d(D) = 0$, для регуляризованного расстояния $\mathrm{d}(x)$ от точки x до множества D выполнены условия (10), (11). Рассмотрим множество символов, гладких по переменной x вне D, но имеющих особенности на самом множестве D.

Через $\tilde{S}^{-m}$, $m > 0$, обозначим класс символов $r(x,\xi)$, таких, что для всех α,β при любом $\varepsilon > 0$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r(x,\xi)| \leqslant C(\alpha,\beta,\varepsilon)\langle\xi\rangle^{-m-|\beta|+\varepsilon}\mathrm{d}^{-|\alpha|}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus D,\, \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{32}$$

При $d/m \leqslant 2$ потребуем дополнительно, чтобы для какого нибудь $l \in (0,1)$ и любого $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$|r(x,\xi) - r(y,\xi)| \leqslant C(\varepsilon)(1+|\xi|)^{-m+l+\varepsilon}|x-y|^l, \quad x,y,\xi \in \mathbb{R}^d. \tag{33}$$

Пусть при $t \to \infty$ для какого то $\nu_0 > 0$

$$\mathrm{vol}_{2d}\{x,\xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d |\, |r(x,\xi)| > t^{-1}\} = t^{\frac{d}{m}} V(t,r)(1+O(t^{-\nu_0})), \tag{34}$$

где $V(t,r)$ является медленно меняющейся функцией переменной t.

Предложение 2.6 ([20, теорема 1.1]). *Пусть для символа* $r \in \widetilde{S}^{-m}$ *выполнены условия* (10), (11) *и* (32), (34) *и, если* $d/m \leqslant 2$, *то выполняются неравенства* (33). *Тогда для оператора*

$$\big(Ru\big)(x) = (2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} r(x,\xi)u(y)dyd\xi,\ R : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega), \tag{35}$$

справедлива асимптотическая формула Вейля

$$N(t,R) = (2\pi)^{-d}\mathrm{vol}_{2d}\{x,\xi \in \Omega\times\mathbb{R}^d \mid |r(x,\xi)| > t^{-1}\}(1+O(t^{-\nu}))$$
$$= (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} V(t,r)\big(1+O(t^{-\nu})\big), \quad t\to+\infty, \tag{36}$$

$0<\nu=\nu(m,d,\delta,\varkappa,l)<\nu_0$. *Такая же асимтотика верна и для функции распределения сингулярных чисел оператора* R_Ω *в* $L_2(\Omega)$, *определенного формулой* (35) *на функциях из* $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Справедлив аналог предложения 2.6 для асимптотики собственных чисел оператора $\mathrm{Re}\,R_\Omega := (R_\Omega + R_\Omega^*)/2$. Фиксируем асимптотику фазового объема для функции $\mathrm{Re}\,r(x,\xi)$. Пусть при $t\to\infty$ для какого нибудь $\nu_1>0$

$$\mathrm{vol}_{2d}\{x,\xi\in\Omega\times\mathbb{R}^d|\ \mathrm{Re}\,r(x,\xi) > t^{-1}\} = t^{\frac{d}{m}} V_\dagger(t,r)(1+O(t^{-\nu_1})), \tag{37}$$

$V_\dagger(t,r)$ – медленно меняющаяся функция.

Предложение 2.7. *Пусть для символа* $r\in\widetilde{S}^{-m}$ *выполнены условия* (10), (11) *и* (32), (37) *и, если* $d/m\leqslant 2$, *то должны выполняться неравенства* (33). *Тогда для функции распределения положительных собственных чисел оператора* $\mathrm{Re}R_\Omega$ *для некоторого* $\nu_1>0$ *справедлива асимптотика*

$$N_\dagger(t,\mathrm{Re}R_\Omega) = \#\{k \mid \lambda_n(\mathrm{Re}R_\Omega) > t^{-1}\} = (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} V_\dagger(t,r)\big(1+O(t^{-\nu})\big),$$
$$t\to+\infty,$$

$\nu=\nu(m,d,\delta,\varkappa,l)<\nu_1$.

Замечание. Оценка остатка $o(1)$ при $t\to\infty$ в условиях (34), (37) приводит к оценкам с $o(1)$ в утверждениях предложений 2.6, 2.7.

§3. Доказательства теорем 1.2–1.5

3.1. Случай $\mathbf{vol}_d$ D $>$0. В этом параграфе докажем теорему 1.2. Приведем вначале следующий результат о спектральных свойствах компактных псевдодифференциальных операторов. Пусть

$$\big(\mathfrak{A}_\phi u\big)(x) = (2\pi)^{-d}\phi(x)\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\Omega} e^{i(x-y)\xi} a(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-m} u(y)\,dy\,d\xi,$$
$$\mathfrak{A}_\phi : L_2(\Omega)\to L_2(\Omega).$$

Предложение 3.1. *Пусть параметры p, q удовлетворяют условиям*

$$p > q > d/m, \quad \textit{если} \quad d/m \geqslant 2, \quad \textit{и} \quad p < q = 2, \quad \textit{если} \quad d/m < 2.$$

Тогда для $\phi \in L_q(\Omega)$ справедливы следующие формулы для функции распределения сингулярных чисел оператора $\mathfrak{A}_\phi$:

1. *Если $a \in \mathcal{M}_p$, то*

$$N(t, \mathfrak{A}_\phi) \leqslant C \|\phi\|_{L_q(\Omega)} \|a\|_{\mathcal{M}_p} t^{d/m}, \quad t > 1. \tag{38}$$

2. *Если $a \in \widetilde{\mathcal{M}}_p$, то*

$$N(t, \mathfrak{A}_\phi) = (2\pi)^{-d} \int\limits_\Omega |\phi(x)|^{d/m} v(x, a) dx \; t^{\frac{d}{m}} \big(1 + o(1)\big), \quad t \to \infty. \tag{39}$$

Для неотрицательной функции $\phi \in L_q(\Omega)$ и $a \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\dagger}$ асимптотика функции распределения положительных собственных чисел оператора $\operatorname{Re} \mathfrak{A}_\phi$ выражается формулой

$$N_\dagger(t, \operatorname{Re} \mathfrak{A}_\phi) = (2\pi)^{-d} \int\limits_\Omega \phi(x)^{d/m} v_\dagger(x, a) dx \; t^{\frac{d}{m}} \big(1 + o(1)\big), \quad t \to \infty. \tag{40}$$

Утверждение об оценке (38) является частным случаем результата работ ([13, 14]). Утверждения (39), (40) об асимптотике функции распределения сформулированы в этих работах для классических однородных по ξ символов, они легко распространяются на символы классов $\widetilde{\mathcal{M}}_p$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\dagger}$. Действительно, для $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ и $a \in S^0_{1,0}$ символ оператора $\mathfrak{A}_\phi$ принадлежит классу $S^{-m}_{1,0}$. В этом случае асимптотика (39) хорошо известна, см., например, предложение 2.5. Оценка (38) означает, что $\mathfrak{A}_\phi \in \mathbf{S}_{d/m,\infty}$ с (квази)нормой, оцениваемой через мультипликаторную норму символа в $\mathcal{M}_p$ и L_q норму ϕ. Функционалы $\Delta_{d/m,\infty}$, $\delta_{d/m,\infty}$ непрерывны в $\mathbf{S}_{d/m,\infty}$. Равенство значений $\Delta_{d/m,\infty}(\mathfrak{A}_\phi) = \delta_{d/m,\infty}(\mathfrak{A}_\phi)$, эквивалентное существованию степенной асимптотики для $N(t, \mathfrak{A}_\phi)$, распространяется по непрерывности на символы $a \in \widetilde{\mathcal{M}}_p$ и функции $\phi \in L_q(\Omega)$. Аналогично получаем утверждение об асимптотике (40).

Пусть χ_0 – характеристическая функция множества D, $\chi_1 := 1 - \chi_0$. Положим $A_0 := \chi_0 A$, $A_1 := \chi_1 A$. Оценка и асимптотика сингулярных чисел оператора A_0 вытекают из предложения 3.1, соответствующие формулы (38), (39) совпадают с (8), (9). Асимптотика собственных чисел оператора $\mathrm{Re} A_0$ выражается формулой (40) при $\phi = \chi$.

Покажем теперь, что оператор A_1 можно рассматривать как возмущение A_0, т.е. $s_n(A_1) = o(n^{-m/d})$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим вначале модельную ситуацию. Определим оператор $\mathcal{R}$: $L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega)$,

$$\big(\mathcal{R}f\big)(x) := (2\pi)^{-d/2}\chi_1(x) \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\langle\xi\rangle^{-(l+h(x))} f(\xi)d\xi. \tag{41}$$

Лемма 3.2. *Если $l < d/2$, то $s_n(\mathcal{R}) = o(n^{-l/d})$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Сингулярные числа оператора $\mathcal{R}$ совпадают с сингулярными числами оператора $R := \mathcal{R}F : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega)$.

Оператор R является интегральным оператором с ядром

$$H(x-y,x) = (2\pi)^{-d/2}\chi_1(x)G(x-y, l+h(x)),$$

$x \in \Omega$ и $y \in \mathbb{R}^d$. Через $G(z,r)$ обозначено обратное преобразование Фурье от функции $\langle\xi\rangle^{-r}$ – ядро Бесселя–Макдональда (см. [21, § 8.1]). Функцию $G(z,r)$ будем использовать лишь для $0 < r < d$. Известно, что $G(z,r)$ как функция z зависит лишь от $|z|$, экспоненциально убывает при $|z| \to \infty$ и

$$G(z,r) = \alpha(r)|z|^{-(d-r)}(1 + O(|z|^2) \quad \text{при} \quad |z| \to 0. \tag{42}$$

Эту асимптотику можно дифференцировать по r, $0 < r < d$. Для таких r

$$\alpha(r) = \frac{2^{d/2-r}\Gamma\big((d-r)/2)\big)}{\Gamma\big(r/2\big)},$$

Γ – гамма функция Эйлера.

Воспользуемся известным приемом оценки сингулярных чисел интегрального оператора со слабой особенностью ([16, теорема 7 §11.8]). Для параметра $\delta > 0$ определим ядра

$$H_\delta(z,x) = \begin{cases} H(z,x), & |z| < \delta, \\ \\ 0, & |z| > \delta. \end{cases}, \quad H^\delta(z,x) = H(z,x) - H_\delta(z,x).$$

R_δ, R^δ – соответствующие операторы, действующие из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\Omega)$. Поскольку $|G(z, l+h(x))| \leqslant C|z|^{l-d}$ равномерно по $x \in \Omega$, то из теста Шура следует, что

$$\|R_\delta\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\Omega)} \leqslant C\delta^l.$$

Оценим $\mathbf{S}_2$-норму оператора R^δ. Поскольку $G(z,r)$ экспоненциально убывает по $|z|$ на бесконечности,

$$\|R^\delta\|_{S_2}^2 = \int\limits_{\Omega\setminus D} \int\limits_{\mathbb{R}^d, |x-y|>\delta} |H^\delta(x-y,x)|^2 dydx \leqslant C$$
$$+ (2\pi)^{-d} \int\limits_{\delta<|z|<1} \int\limits_{\Omega\setminus D} |G(z, l+h(x))|^2 dzdx.$$

Из асимптотики (42) следует, что

$$\int\limits_{\delta<|z|<1} |G(z, l+h(x))|^2 dz \leqslant C\delta^{2(l+h(x))-d}.$$

Интегрируя это неравенство по $x \in \Omega\setminus D$, получаем, что

$$\|R^\delta\|_{\mathbf{S}_2}^2 \leqslant C\delta^{2l-d} \int\limits_{h(x)>0} \delta^{2h(x)} dx = C\delta^{2l-d} \int\limits_0^\infty \delta^{2s} d\mu_h(s).$$

Поскольку $\mu_h(s) \to 0$ при $s \to 0$, интеграл по s стремится к нулю :

$$\int\limits_0^\infty \delta^{2s} d\mu_h(s) = 2\int\limits_0^\infty \delta^{2s} |\log\delta| \mu_h(s) ds$$
$$= 2\int\limits_0^\infty e^{-2\sigma} \mu_h(\sigma/|\log\delta|) d\sigma \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Таким образом, $\|R^\delta\|_{\mathbf{S}_2} = o(\delta^{l-d/2})$ при $\delta \to 0$, и для любого $\epsilon > 0$ равномерно по n при $\delta < \delta_0(\epsilon)$

$$s_n(\mathcal{R}) = s_n(R) \leqslant \|R_\delta\| + n^{-1/2}\|R^\delta\|_{\mathbf{S}_2} \leqslant C\left(\delta^l + \epsilon n^{-1/2}\delta^{l-d/2}\right).$$

Минимизируя правую часть неравенства по $\delta > 0$, возьмем δ из условия $n\delta^d = \epsilon^2$. При достаточно большом n будет выполнено неравенство $\delta < \delta_0(\epsilon)$, и тогда $s_n(\mathcal{R}) \leqslant C\epsilon^{2l/d} n^{-l/d}$ при $n > n_0(\epsilon)$. □

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathrm{vol}_d D > 0$, $h \in L_\infty(\Omega)$, *и символ* a *принадлежит классу* $\mathcal{M}_p$, *где* p *удовлетворяет условию* (7). *Тогда* $s_n(A_1) = o(n^{-m/d})$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Если $d/m > 2$, то утверждение теоремы следует из леммы 3.2. Действительно, по вариационному принципу сингулярные числа оператора A_1 в $L_2(\Omega)$ не превосходят сингулярных чисел оператора $\big(M_a\mathcal{R}\big)F : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega)$, где $\mathcal{R}$ – оператор , построенный по формуле (41) с параметром l равным m. По лемме 3.2 $\mathcal{R} \in \mathring{\mathbf{S}}_{d/m,\infty}$. При $p > d/m > 2$ мультипликатор $a(x,\xi)$ непрерывен в $\mathbf{S}_{d/m,\infty}$ и оператор $M_a\mathcal{R}$, а вместе с ним и $\big(M_a\mathcal{R}\big)F$ оказываются в $\mathring{\mathbf{S}}_{d/m,\infty}$.

Пусть теперь $d/m \leqslant 2$. Воспользуемся леммой 2.5. Символ псевдодифференциального оператора A_1 является произведением $a(x,\xi)\chi_1(x)\langle\xi\rangle^{-(m+h(x))}$. По параметру $p < 2$ выберем число $l < d/2$ такое, что $p' > d/l > 2$, $p' = p/(p-1)$ – сопряженный показатель. По лемме 3.2 интегральный оператор $\mathcal{R}_l : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega)$ с ядром $(2\pi)^{-d/2}\chi_1(x)e^{ix\xi}\langle\xi\rangle^{-(l+h(x))}$ попадает в класс $\mathring{\mathbf{S}}_{d/l,\infty}$. Поскольку мультипликатор $a(x,\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_{p'}$, он непрерывен в $\mathring{\mathbf{S}}_{d/l,\Psi}$ в силу выбора параметра l. Применяя лемму 2.5, получаем утверждение теоремы. □

Согласно §2.1 утверждение теоремы 1.2 следует из предложения 3.1 и теоремы 3.3.

3.2. vol$_d$ D =0, оператор A_0. Рассмотрим случай $\mathrm{vol}_d D = 0$. Определим старшую часть A_0 оператора A,

$$\big(A_0u\big)(x)=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\Omega} e^{i(x-y)\xi}a(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-(m+h_0(x))}u(y)dyd\xi,\ u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Это псевдодифференциальный оператор в $L_2(\Omega)$ с символом $r(x,\xi) := a(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-(m+h_0(x))}$.

Теорема 3.4. *В условиях теоремы* 1.4 *для функции распределения сингулярных чисел оператора* A_0 *справедливы формулы*

1. *Если* $a \in \mathcal{M}_p$, *то*

$$N(t,A_0) \leqslant C(d,m,h_0)\|a\|_{\mathcal{M}_p}^{\frac{d}{m}} t^{\frac{d}{m}}\Psi(t^{\frac{d}{m}}), \quad t > 1. \tag{43}$$

2. *Если* $a \in \widetilde{\mathcal{M}}_p$, *то*

$$N(t,A_0) = (2\pi)^{-d}t^{\frac{d}{m}}\Psi(t^{\frac{d}{m}},a)(1+o(1)), \quad t \to \infty. \tag{44}$$

Если $a \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,+}$, то для функции распределения положительных собственных чисел оператора $\mathrm{Re}A_0$ *справедлива асимптотика*

$$N_+(t, \mathrm{Re}A_0) = (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} \Psi_+(t,a)\big(1 + o(1)\big), \quad t \to +\infty.$$

Доказательство. Докажем справедливость оценки (43).Положим

$$\big(\mathcal{R}_l f\big)(x) := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \langle\xi\rangle^{-(l+h_0(x))} f(\xi) d\xi, \ \mathcal{R}_l : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega).$$

Рассмотрим сначала случай $d/m \geqslant 2$. Сингулярные числа оператора A_0 совпадают с сингулярными числами оператора $\mathcal{A}_0 := A_0 F^{-1}$,

$$\big(\mathcal{A}_0 f\big)(x) := (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} a(x,\xi) \langle\xi\rangle^{-(m+h_0(x))} f(\xi) d\xi.$$

Рассмотрим этот оператор как применение мультипликатора $a(x,\xi)$ к оператору $\mathcal{R}_m$. Из неравенств (12) следует, что символ $\langle\xi\rangle^{-(m+h_0(x))}$ принадлежит классу $\tilde{S}^{-m}$ и для оператора $\mathcal{R}_m$ применимо предложение 2.6. Таким образом,

$$N(t, \mathcal{R}_m) = (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} \Psi(t^{\frac{d}{m}})(1 + o(1))$$

при $t \to \infty$, так что $\mathcal{R}_m \in \mathbf{S}_{d/m,\Psi}$. При $p > d/m \geqslant 2$ мультипликатор класса $\mathcal{M}_p$ непрерывен в $\mathbf{S}_{d/m,\Psi}$, и $\|\mathcal{A}_0\|_{d/m,\Psi} = \|M_a \mathcal{R}_m\|_{d/m,\Psi} \leqslant C\|a\|_{\mathcal{M}_p}$ что и дает оценку (43).

Пусть теперь $d/m < 2$. Для параметра $p < 2$ фиксируем число l из промежутка $(0,m)$ такое, что $p < d/l < 2$. Из предложения 2.6 следует, что оператор $\mathcal{R}_l$ принадлежит классу $\mathbf{S}_{d/l,\Psi}$, а для выбранного параметра l мультипликатор $a(x,\xi)$ непрерывен в этом классе. Оценка (43) следует теперь из леммы 2.5.

Докажем второе утверждение теоремы. Если символ a из класса Хермандера $S^0_{1,0}$, и выполнены оценки (12),(10), то для символа $r(x,\xi)$ справедливы неравенства (32). Если $h_0 \in C^l(\bar{\Omega})$, то выполнены неравенства (33). Таким образом, этот символ принадлежит классу $\widetilde{S}^{-m}$, и для s-чисел оператора A_0 и собственных чисел оператора $\mathrm{Re}A_0$ применимы предложения 2.6 и 2.7 соответственно. Вычисляя фазовые объемы в формулах (36) и (37) соответственно для символов a из $\mathcal{S}(p)$ и $\mathcal{S}_\dagger(p)$ получаем, что $V(t,r) = \Psi(t^{d/m}, a)$ $(V_\dagger(t,a) = \Psi_\dagger(t^{d/m}, a))$ и для таких символов асимптотические формулы в утверждении теоремы вытекают из предложений 2.6 и 2.7.

Справедливость асимптотических формул для символов классов $\widetilde{\mathcal{M}}_p$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\dagger}$ следует из оценок (43). Действительно, эти оценки означают, что оператор A_0 принадлежит классу $\mathbf{S}_{p,\Psi}$ с квазинормой, которая оценивается через $\|a\|_{\mathcal{M}_p}$. Функционалы $\Delta_{p,\Psi}(A_0)$, $\delta_{p,\Psi}(A_0)$ и $\Delta^{\pm}_{p,\Psi}(A_0)$, $\delta^{\pm}_{p,\Psi}(A_0)$ непрерывно зависят от символа $a \in \mathcal{M}_p$. Равенство значений $\Delta_{p,\Psi}(A_0) = \delta_{p,\Psi}(A_0)$ (и аналогичное равенство для $\Delta^{+}_{p,\Psi}$, $\delta^{+}_{p,\Psi}$) эквивалентно асимптотике функции $N(t, A_0)$ ($N_\dagger(t, A_{0,\Omega})$). Таким образом, асимптотические формулы в теореме 3.4 получаются распространением по непрерывности этих формул с класса символов $\mathcal{S}(p)$ ($\mathcal{S}_\dagger(p)$) на пополнение этих классов в пространстве $\mathcal{M}_p$, то есть на классы $\widetilde{\mathcal{M}}_p$, ($\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\dagger}$). □

3.3. $\mathbf{vol}_d$ D $=$0, оператор A_1. В этом параграфе будут получены оценки сингулярных чисел оператора $A_1 := A - A_0$. Это псевдодифференциальный оператор с символом

$$a(x,\xi)\big(\langle\xi\rangle^{-(m+h(x))} - \langle\xi\rangle^{-(m+h_0(x))}\big).$$

Докажем, что $A_1 \in \mathring{\mathbf{S}}_{d/m,\Psi}$, тогда добавление оператора A_1 к A_0 не меняет оценок и главного члена асимптотики спектра оператора A_0. Рассмотрим сначала случай, когда $a(x,\xi) = 1$. Пусть

$$\big(\mathcal{Q}_l f\big)(x) := (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\big(\langle\xi\rangle^{-(l+h(x))} - \langle\xi\rangle^{-(l+h_0(x))}\big) f(\xi)d\xi, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \tag{45}$$

$\mathcal{Q}_l : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega)$.

Лемма 3.5. *Пусть для функции распределения μ_h справедливы соотношения* (17, 15).

1. *Если функция h_1 удовлетворяет условию $h_1(x) = O\big(h_0^{1+\tau}(x)\big)$ при $x \to D$ для какого то $\tau > 0$, то при $l < d/2$ для сингулярных чисел оператора $\mathcal{Q}_l$ справедлива оценка*
$$s_n(\mathcal{Q}_l) = O\big((n \log^{\sigma+\tau} n)^{-l/d}\big), \quad n \to \infty. \tag{46}$$
2. *Если функция ψ* (17) *удовлетворяет условиям леммы* 1.3, *а $h_1(x) = o(h_0(x))$ при $h_0 \to 0$, то при $l < d/2$ для сингулярных*

чисел оператора $\mathcal{Q}_l$ *справедлива оценка*

$$s_n(\mathcal{Q}_l) = o\big(n(\log n)^\sigma\, \psi(1/\log n)\big)^{-l/d}, \quad n \to \infty. \tag{47}$$

Замечание. Любая из оценок (46) или (47) влечет $\mathcal{Q}_l \in \mathring{\mathbf{S}}_{d/l,\Psi}$.

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства леммы 3.2. Сингулярные числа оператора $\mathcal{Q}_l$ совпадают с сингулярными числами оператора $Q_l := \mathcal{Q}_l F$,

$$\big(Q_l u\big)(x) := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} \big(\langle\xi\rangle^{-(l+h(x))} - \langle\xi\rangle^{-(l+h_0(x))}\big) u(y)) dy d\xi.$$

Как и в доказательстве леммы 3.2, выразим ядро оператора Q_l через ядро Бесселя–Макдональда $G(z,r)$:

$$\big(Q_l u\big)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} K(x-y,x) u(y) dy,$$
$$K(z,x) = G(z, l+h(x)) - G(z, l+h_0(x)).$$

Для параметра $\delta > 0$ определим ядра

$$K_\delta(z,x) = \begin{cases} K(z,x), & |z| < \delta, \\ 0, & |z| > \delta. \end{cases}, \quad K^\delta(z,x) = K(z,x) - K_\delta(z,x).$$

$\hat{Q}^\delta$, $\hat{Q}_\delta$ – соответствующие операторы, действующие из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\Omega)$, так что $Q = (2\pi)^{-d/2}(\hat{Q}_\delta + \hat{Q}^\delta)$. Поскольку при $z \to 0$ $K_\delta(z,x) = O\big(|z|^{-(d-l)}\big)$ равномерно по x, справедлива следующая оценка нормы оператора $\hat{Q}_\delta$:

$$\|\hat{Q}_\delta\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\Omega)} \leqslant C\delta^l \tag{48}$$

равномерно для всех функций $h(x) \geqslant 0$.

Оценим норму Гильберта–Шмидта оператора $\hat{Q}^\delta$. Вследствие экспоненциального убывания $G(z,r)$ по z на бесконечности достаточно оценивать интегралы по ограниченной области,

$$\|\hat{Q}^\delta\|^2_{\mathbf{S}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^d\times\Omega,\, |x-y|>\delta} |K^\delta(x-y,x)|^2 dy dx \leqslant C$$
$$+ \int\limits_{\delta<|z|<1} \int\limits_{\Omega} |K^\delta(z,x)|^2 dz dx. \tag{49}$$

Используя (42), запишем равномерные по δ оценки ядра $K^\delta(z,x)$ при $|z|>\delta$:

$$\begin{aligned}
K^\delta(z,x) &= \mathcal{K}_1^\delta(z,x)+\mathcal{K}_2^\delta(z,x)+O(|z|^{l-d+2}),\\
\mathcal{K}_1^\delta(z,x) &:= \alpha(l+h(x))|z|^{l+h_0(x)-d}\big(|z|^{h_1(x)}-1\big)\\
&= O\Big(h_1(x)|z|^{l+h_0(x)-d}\big|\log|z|\big|\Big),\\
\mathcal{K}_2^\delta(z,x) &:= \big(\alpha(l+h(x))-\alpha(l+h_0(x))\big)|z|^{l+h_0(x)-d}\\
&= O\big(h_1(x)|z|^{l+h_0(x)-d}\big).
\end{aligned}$$

Вычисляя в (49) интеграл по переменной z получаем, что

$$\|\hat{Q}^\delta\|_{\mathbf{S}_2}^2 \leqslant C_1 + C_2\delta^{2l-d}\log^2\delta \int\limits_{|x|<1} h_1^2(x)\delta^{2h_0(x)}dx. \tag{50}$$

Воспользуемся условием $h_1=O(h_0^{1+\tau})$, $\tau>0$, и оценим оставшийся интеграл по переменной x. С учетом (17-18) имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|x|<1} h_1^2(x)\delta^{2h_0(x)}dx \leqslant C\int\limits_0^\infty s^{2(1+\tau)}\delta^{2s}d\mu_{h_0}(s)\\
&\leqslant C\int\limits_0^\infty s^{2(1+\tau)}\delta^{2s}d\big(s^\sigma\psi(s)\big) \leqslant C(\varepsilon)|\log\delta|^{\varepsilon-\sigma-2(1+\tau)}.
\end{aligned}$$

Для $\varepsilon<\tau$ получаем оценку

$$s_n(\hat{Q}^\delta) \leqslant n^{-1/2}\|\hat{Q}^\delta\|_{\mathbf{S}_2} \leqslant Cn^{-1/2}\delta^{l-d/2}|\log\delta|^{-(\tau+\sigma)/2}$$

с константой, не зависящей от δ и n. Для сингулярных чисел оператора Q_l имеем неравенство

$$s_n(Q_l) \leqslant (2\pi)^{-d/2}\big(s_n(\hat{Q}^\delta)+\|\hat{Q}_\delta\|\big) \leqslant C(n^{-1/2}\delta^{l-d/2}|\log\delta|^{-(\tau+\sigma)/2}+\delta^l).$$

Минимизируя правую часть неравенства по δ, выберем

$$\delta = \big(n\log^{\tau+\sigma}n\big)^{-1/d}.$$

Это дает оценку (46).

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть теперь для функции ψ выполнены условия леммы 1.4 и $h_1=o(h_0)$ при $x\to D$.

Интеграл по пременной x в (50) есть $o(I(\delta))$,

$$I(\delta) = \int\limits_0^\infty s^2\delta^{2s}d\mu_{h_0}(s) = \int\limits_0^\infty s^2\delta^{2s}d\big(s^\sigma\psi(s)\big)\big(1+o(1)\big), \quad \delta \to 0.$$

Если функция ψ – медленно меняющаяся, для этого интеграла справедлива асимптотика

$$I(\delta) = \sigma\Gamma(\sigma+1)|2\log\delta|^{-(\sigma+2)}\psi(-1/\log\delta)\big(1+o(1)\big), \quad \delta \to 0.$$

Для ограниченной положительной функции ψ сохраняется оценка $I(\delta) \leqslant C|\log\delta|^{-(\sigma+2)}$, так что в обоих случаях получаем следующую оценку нормы Гильберта–Шмидта:

$$\|\hat{Q}^\delta\|_{\mathbf{S}_2} = o\big(\delta^{l-d/2}|\log\delta|^{-\sigma/2}\psi^{1/2}(-1/\log\delta)\big) \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Тогда для $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ равномерно по n и δ имеем неравенство

$$s_n(Q_l) \leqslant C\,\big(\varepsilon(\delta)n^{-1/2}\delta^{l-d/2}|\log\delta|^{-\sigma/2})\psi^{1/2}(-1/\log\delta) + \delta^l\big).$$

Как и в доказательстве пункта 1, минимизируя правую часть неравенства по параметру δ, получаем оценку (47). $\square$

Получим теперь оценки сингулярных чисел оператора A_1. Представим этот оператор в виде

$$\big(A_1u\big)(x) = (2\pi)^{-d}\int\limits_\Omega\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi}a(x,\xi)r(x,\xi)u(y)dyd\xi,$$
$$r(x,\xi) = \langle\xi\rangle^{-(m+h(x))} - \langle\xi\rangle^{-(m+h_0(x))}. \tag{51}$$

Теорема 3.6. *В условиях теоремы* 1.4 *справедливо соотношение*

$$s_n(A_1) = o\big((n\Psi(n))^{-m/d}\big), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $d/m \geqslant 2$. Имеем $A_1 = (M_a\mathcal{Q}_m)F$, где оператор $\mathcal{Q}_m : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega)$ определен в (3.3), а M_a – мультипликатор, умножающий ядро оператора $\mathcal{Q}_m$ на символ $a(x,\xi)$. Сингулярные числа операторов A_1 и $M_a\mathcal{Q}_m$ совпадают. По лемме 3.5 оператор $\mathcal{Q}_m$ из класса $\mathring{\mathbf{S}}_{d/m,\Psi}$, а, поскольку при $p > d/m \geqslant 2$, мультипликатор a непрерывен в этом классе, получаем, что и $A_1 \in \mathring{\mathbf{S}}_{d/m,\Psi}$.

Пусть теперь $d/m < 2$. Воспользуемся леммой 2.5. Символ псевдодифференциального оператора A_1 является произведением символа $a(x,\xi)$ и функции $r(x,\xi)$ (51). По параметру $p < 2$ выберем число

$l < d/2$ такое, что $p' > d/l > 2$, $p' = p/(p-1)$ – сопряженный показатель. По лемме 3.5 оператор Q_l с символом $r(x,\xi)\langle\xi\rangle^{m-l}$ попадает в класс $\mathring{\mathbf{S}}_{d/l,\Psi}$. Поскольку мультипликатор $a(x,\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_{p'}$, он непрерывен в $\mathring{\mathbf{S}}_{d/l,\Psi}$ в силу выбора параметра l. Утверждение теоремы для случая $d/m \leqslant 2$ вытекает из леммы 2.5. $\square$

Согласно §2.1, из теорем 3.4 и 3.6 вытекает утверждение теорем 1.4 и 1.5.

§4. Асимптотика малых уклонений

4.1. Гауссовские процессы с переменным показателем Хёрста. Приведем пример применения результатов о спектральной асимптотике операторов переменного порядка к задачам теории малых уклонений гауссовских процессов.

Пусть $X(x)$, $x \in \Omega$, – гауссовская случайная функция с нулевым средним и ковариационной функцией $\mathcal{G}_X(x,y) := \mathbb{E}X(x)X(y)$. Задача об асимптотике малых уклонений в L_2 состоит в определении асимптотики при $\varepsilon \to 0$ величины $\mathbb{P}\{\|X(\,\cdot\,)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon\}$. Как правило, эта величина экспоненциально убывает, и в качестве первого шага выступает задача определения порядка экспоненты, то есть определение асимптотики логарифма вероятности малых уклонений. Для определения такой логарифмической асимптотики в широком классе случаев достаточно знать первый член асимптотики функции распределения собственных чисел ковариационного оператора, т.е. интегрального оператора в $L_2(\Omega)$ с ковариационной функцией в качестве ядра, см. [8]. В работе [4] были получены логарифмические асимптотики малых уклонений для двух примеров гауссовских процессов с переменным индексом Хёрста. В настоящей работы расширены границы применимости результатов [4].

Multifractional Brownian Motion (mBM) было введено в [9] и [2].

$$W^{H(\cdot)}(x) = C_*(H(x)) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}-1}{|\xi|^{H(x)+\frac{1}{2}}}\, dW(\xi), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{52}$$

здесь $W(\xi)$ обычный винеровский процесс, а функциональный параметр Хёрста $H(x)$ подчинен условию $0 < H(x) < 1$. Множитель

$$C_*(H) = \left(\frac{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

обеспечивает равенство $\mathbb{E}\big(W^{H(\cdot)}\big)^2(1) = 1$.

Другим процессом похожей структуры является *Multifractal Brownian Motion* (mfBM), введенное в [10], см. также [11].

$$X^{H(\cdot)}(x) = \int\limits_0^x \mathcal{K}(x, y, H(x))\, dW(y), \tag{53}$$

где

$$\mathcal{K}(x, y, H) = c_*(H) y^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_y^x (z-y)^{H-\frac{3}{2}} z^{H-\frac{1}{2}}\, dz\, \mathbb{I}_{[0,x]}(y), \tag{54}$$

для параметра Хёрста $H(x)$ должно быть выполнено условие $\frac{1}{2} < H(x) < 1$. Множитель $c_*(H)$ определяется выражением

$$c_*(H) = \left(\frac{H(2H-1)\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(2-2H)\Gamma(H-\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оба процесса (52), (53) являются центрированными, при $H(x) \equiv H = \mathrm{const}$ они совпадают с обычным дробным броуновским движением.

Определим интегральные операторы, ассоциированные с процессами (52) and (53), см. [7, §3.2]

$$T : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(0,1), \quad (Tf)(x) := C_*(H(x)) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}-1}{|\xi|^{H(x)+\frac{1}{2}}} f(\xi)\, d\xi, \tag{55}$$

$$S : L_2(0,1) \to L_2(0,1), \qquad (Sf)(x) := \int\limits_0^x \mathcal{K}(x, y, H(x)) f(y) dy \tag{56}$$

(функция $\mathcal{K}$ определена в (54)). Ковариационные функции

$$\mathcal{G}_{W^{H(\cdot)}}(x,y) := \mathbb{E}W^{H(\cdot)}(x)W^{H(\cdot)}(y), \quad \mathcal{G}_{X^{H(\cdot)}}(x,y) := \mathbb{E}X^{H(\cdot)}(x)X^{H(\cdot)}(y)$$

являются соответственно ядрами интегральных операторов TT^* и SS^*.

4.2. Спектральные асимптотики. Положим

$$m := \min H(x) + 1/2, \quad h(x) := H(x) - \min H(x),$$

$D := \{x \in [0,1] \mid h(x) = 0\}$, $|D| := \mathrm{vol}_1 D$.

Введем операторы $\mathcal{A}_T$, A_S, старшие части операторов T, S соответственно. Пусть $p(\xi)$ – гладкая положительная четная функция, совпадающая с $|\xi|$ при $|\xi| > 2$, $r(\xi)$ – гладкая комплекснозначная функция, совпадающая с $\exp\big(i\,\mathrm{sign}(\xi)\pi/4\big)$ при $|\xi| > 2$.

$$\mathcal{A}_T : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(0,1),$$

$$(\mathcal{A}_T f)(x) := C_*(H(x)) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} p(\xi)^{-(m+h(x))} f(\xi)\, d\xi,$$

$$A_S : L_2(0,1) \to L_2(0,1),$$

$$(A_S u)(x) := (2\pi)^{-1} c_*(H(x)) \Gamma\Big(H(x) - \frac{1}{2}\Big)$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{1} e^{i(x-y)\xi} \big(r(\xi)p(\xi)\big)^{-(m+h(x))} u(y)\, dy d\xi.$$

Предложение 4.1 ([4, §3]). *Пусть $h \in \mathcal{C}^l[0,1]$, $0 < l < 1$. Тогда при $t > 1$ для какого то $\nu = \nu(m,l) > 0$ имеем*

$$N(t, T - \mathcal{A}_T) \leqslant C(\nu) t^{1/m-\nu},$$

$$N(t, S - A_S) \leqslant C(\nu) t^{1/m-\nu}.$$

Теорема 4.2. *Пусть $H \in \mathcal{C}^l[0,1]$. Тогда*

1. *Если $|D| > 0$, то при $t \to \infty$*

$$N(t,T) = \frac{1}{\pi} \Big((2\pi)^{\frac{1}{2}} C_*(H_{\min})\Big)^{\frac{1}{m}} |D|\, t^{\frac{1}{m}} \big(1 + o(1)\big); \tag{57}$$

$$N(t,S) = \frac{1}{\pi} \Big(c_*(H_{\min}) \Gamma\big(H_{\min} - \frac{1}{2}\big)\Big)^{\frac{1}{m}} |D|\, t^{\frac{1}{m}} \big(1 + o(1)\big). \tag{58}$$

2. *Если $|D| = 0$ и выполнены условия* (12),(13),(15),(17), *то при $t \to \infty$*

$$N(t,T) = \frac{1}{2\pi} \Big((2\pi)^{\frac{1}{2}} C_*(H_{\min})\Big)^{\frac{1}{m}} t^{\frac{1}{m}} \Psi(t^{\frac{1}{m}}) \big(1 + o(1)\big); \tag{59}$$

$$N(t,S) = \frac{1}{2\pi} \Big(c_*(H_{\min}) \Gamma\big(H_{\min} - \frac{1}{2}\big)\Big)^{\frac{1}{m}} t^{\frac{1}{m}} \Psi(t^{\frac{1}{m}}) \big(1 + o(1)\big). \tag{60}$$

Функция Ψ задается формулами (17)–(18) *по функции распределения μ_h.*

Доказательство. Асимптотика сингулярных чисел оператора A_S получается из теорем 1.2 и 1.4 для случаев $|D| > 0$ и $|D| = 0$ соответственно. Формулы (58), (60) являются соответственно реализациями формул (9) и (23). Ввиду § 2.1 и предложения 4.1 эти формулы сохраняются для сингулярных чисел оператора S.

Сингулярные числа оператора $\mathcal{A}_T$ совпадают с сингулярными числами псевдодифференциального оператора $A_T := \mathcal{A}_T F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(0,1)$. Поскольку символ этого оператора бесконечно гладкий по переменной ξ и однородный при $|\xi| > 2$, то оператор A_T псевдолокален, его шварцевское ядро $K(x,y)$, $x, y \in (0,1) \times \mathbb{R}$ является гладким по переменной $y \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, быстро убывающим по y на бесконечности. Обозначим через $\widetilde{A_T}$ сужение оператора A_T на $L_2(0,1)$. Стандартные рассуждения ([15, теорема 4.8]), см. также ([20, теорема 4.2]) показывают, что главные члены асимптотик сингулярных чисел операторов A_T и $\widetilde{A_T}$ совпадают. Для $\widetilde{A_T}$ эта асимптотика получена в теоремах 1.2 и 1.4, из предложения 4.1 и § 2.1 следует, что эта асимптотика сохраняется для оператора T. □

Замечание.

1. Если функция ψ в (17)удовлетворяет условиям леммы 1.3, то для сраведливости асимптотик (59)–(60) достаточно, чтобы условие (13) выполнялось с $\tau = 0$.
2. Хотя функциональный параметр Хёрста лежит в интервале $0 < H(x) < 1$ для оператора T и в интервале $1/2 < H(x) < 1$ для оператора S, для меньшего интервала асимптотические коэффициенты в формулах (57)–(58) и (59)–(60)совпадают.

4.3. Асимптотики малых уклонений. Как отмечалось, асимптотика собственных чисел ковариационного оператора позволяет получить логарифмическую асимптотику вероятности малых уклонений. Для собственных чисел, имеющих регулярную асимптотику, это результат работы [5, теорема 4.5]. Если медленно меняющаяся функция в асимптотике удовлетворяет условию леммы 2.3, то вычисления по формулам в [5] упрощаются.

Предложение 4.3 ([5, теорема 4.5])**.** *Пусть для собственных чисел ковариационного оператора центрированного гауссова процесса X при*

$n \to \infty$ справедлива асимптотика

$$\lambda_n = \Big(\frac{\Psi(n)}{n}\Big)^{\mathfrak{m}}\big(1+o(1)\big), \quad \mathfrak{m} > 1,$$

где Ψ – медленно меняющаяся функция, для которой выполнено соотношение (29)*. Тогда при $\varepsilon \to 0$*

$$\log \mathbb{P}\{||X||_{L_2} \leqslant \varepsilon\}$$
$$= -\frac{\mathfrak{m}-1}{2}\left(\frac{\pi}{\mathfrak{m}\sin\frac{\pi}{\mathfrak{m}}}\right)^{\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{\mathfrak{m}-1}} \left(\Psi(\varepsilon^{-\frac{2}{\mathfrak{m}-1}})\right)^{\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}-1}} \big(1+o(1)\big).$$

Для собственных чисел ковариационного оператора процессов $W^{H(\cdot)}$, $X^{H(\cdot)}$ имеем $\lambda_n(TT^*) = s_n^2(T)$, $\lambda_n(SS^*) = s_n^2(S)$ соответственно. Асимптотики сингулярных чисел получаются из (57)–(60) с помощью (31). Из предложения 4.3 получаем следующий результат:

Теорема 4.4. *Пусть функция H, $0 < H(x) < 1$, принадлежит пространству $\mathcal{C}^l[0,1]$. Тогда*

1. *Если $|D| > 0$, то при $\varepsilon \to 0$*

$$\log \mathbb{P}\{||W^{H(\cdot)}||_{L_2(0,1)} \leqslant \varepsilon\} = -\widehat{C}(H_{\min}, |D|)\varepsilon^{-\frac{1}{H_{\min}}}\big(1+o(1)\big),$$

$$\widehat{C}(H,|D|) = H\left(\frac{|D|}{(2H+1)\sin\big(\frac{\pi}{2H+1}\big)}\right)^{\frac{2H+1}{2H}} \Big(\Gamma(2H+1)\sin\big(\pi H\big)\Big)^{\frac{1}{H}}.$$

2. *Если $|D| = 0$, и для функции H выполнены условия* (12), (13), (15), (17)*, то при $\varepsilon \to 0$*

$$\log \mathbb{P}\{||W^{H(\cdot)}||_{L_2(0,1)} \leqslant \varepsilon\}$$
$$= -\widehat{C}_0(H_{\min})\big(\Psi(\varepsilon^{-\frac{1}{H_{\min}}})\big)^{\frac{2H_{\min}+1}{2H_{\min}}} \varepsilon^{-\frac{1}{H_{\min}}}\big(1+o(1)\big),$$

$$\widehat{C}_0(H) = H\left(2(2H+1)\sin\big(\frac{\pi}{2H+1}\big)\right)^{-\frac{2H+1}{2H}} \Big(\Gamma(2H+1)\sin\pi H\Big)^{\frac{1}{2H}}.$$

Замечание.

1. Если функция ψ в (17) удовлетворяет условиям леммы 1.3, то для справедливости утверждения п.2 достаточно, чтобы условие (13) выполнялось при $\tau = 0$.

2. Поскольку для $1/2 < H(x) < 1$ собственные числа ковариационных операторов процессов $W^{H(\cdot)}$ и $X^{H(\cdot)}$ имеют одинаковые главные члены асимптотик, для таких показателей Хёрста утверждения теоремы справедливы для асимптотики $\log \mathbb{P}\{||X^{H(\cdot)}||_{L_2(0,1)} \leqslant \varepsilon\}$.

4.4. Примеры. Приведем два примера вычисления асимптотики малых уклонений для случая $|D| = 0$. Чтобы не усложнять формулы, будем считать, что $H_{\min} = \frac{1}{2}$.

4.4.1. *Степенная асимптотика функции распределения.* Пусть функция распределения для $h(x) = H(x) - \frac{1}{2}$ имеет степенную асимптотику

$$\mu_h(s) = \big|\{x \in (0,1) \mid 0 < h(x) < s\}\big| = cs^\sigma(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad s \to 0.$$

Из (17),(18) и (21) получаем, что $\Psi(t) = 2c\Gamma(\sigma+1)\log^{-\sigma} t$. Если функция h допускает разложение (12)-(13) при $\tau = 0$, то из теоремы 4.4 получаем асимптотику

$$\log \mathbb{P}\{||W^{H(\cdot)}||_{L_2(0,1)} \leqslant \varepsilon\} = -\frac{c^2\Gamma^2(\sigma+1)}{2^{2\sigma+3}}\big(-\log\varepsilon\big)^{-2\sigma}\varepsilon^{-2}\big(1+o(1)\big), \ \varepsilon \to 0.$$

При несколько более ограничительных условиях эта формула получена в [4].

4.4.2. *Минимум функции Хёрста на канторовом множестве.* В следующем примере параметр Хёрста достигает своего минимального значения на канторовом множестве $\mathfrak{C}$. Обозначим через $\mathrm{d}(x)$ расстояние от точки x до $\mathfrak{C}$. Простые вычисления показывают, что функция распределения для $\mathrm{d}(x)$ кусочно линейна, для $2s \in \Delta_n := [3^{-(n+1)}, 3^{-n}]$

$$\mu_{\mathrm{d}}(s) = \big|\{x \in [0,1] \mid 0 < \mathrm{d}(x) < s\}\big| = \delta_n(2s) - 2s, \ \delta_n(\hat{s}) = (2/3)^n + 2^n\hat{s}.$$

В точках $\hat{s}_n = 3^{-n}$ имеем $\delta_n(\hat{s}_n) = 2(2/3)^n = 2\hat{s}_n^{1-\frac{\log 2}{\log 3}}$. Если $\hat{s} \in \Delta_{n+1}$, то $3\hat{s} \in \Delta_n$, и приходим к равенству

$$\phi_0(\log\hat{s}) := \frac{\delta_{n+1}(\hat{s})}{\hat{s}^{1-\frac{\log 2}{\log 3}}} = \frac{\delta_n(3\hat{s})}{\big(3\hat{s}\big)^{1-\frac{\log 2}{\log 3}}} = \phi_0(\log\hat{s} + \log 3).$$

Таким образом,

$$\mu_{\mathrm{d}}(s) = (2s)^{1-\frac{\log 2}{\log 3}}\,\phi_0(\log s + \log 2) - 2s, \quad 0 < s < 1/3,$$

а функция ϕ_0 является периодической с периодом $\log 3$.

Пусть $H(x) = \frac{1}{2} + h(x)$, $h(x) := \big(\mathrm{d}(x)\big)^{\gamma}$, $\gamma > 0$. Вычисления функции μ_{d} приводят к равенствам

$$\psi(s) = 2\mu_h(s) = s^{\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{\log 2}{\log 3}\right)}\phi(-\log s), \quad \phi(t) = 2^{2-\frac{\log 2}{\log 3}}\phi_0\big(\log 2 - \frac{t}{\gamma}\big).$$

Для соответствующей функции Ψ получаем выражение

$$\Psi(t) = (\log t)^{-\frac{1}{\gamma}}\,\widetilde{\Psi}(\log\log t), \quad \text{где} \quad \widetilde{\Psi}(z) = \int\limits_0^{\infty} e^{-s}s^{\frac{1}{\gamma}}\phi\big(z - \log s\big)\,ds.$$

Функция $\widetilde{\Psi}$ периодична с периодом $\gamma\log 3$.

Применяя теорему 4.4, получаем, что при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}&\log\mathbb{P}\{||W^{H(\cdot)}||_{L_2(0,1)} \leqslant \varepsilon\}\\ &= -2^{-(\frac{2}{\gamma}+5)}\Big(\log\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{-\frac{2}{\gamma}}\widetilde{\Psi}^2(\log\log\frac{1}{\varepsilon^2})\,\varepsilon^{-2}\big(1+o(1)\big).\end{aligned}$$

Этот пример не охватывается результатами работы [4].

§5. Приложение. Класс $\widetilde{\mathcal{M}}_p$

Опишем достаточные аналитические условия принадлежности символа a классу $\widetilde{\mathcal{M}}_p$. Эти условия формулируются в терминах регулярности поведения функции $r \to a(x, r\xi)$ при $r \to \infty$. Потребуем, чтобы эта функция была абсолютно непрерывна и

$$r\frac{\partial}{\partial r}a(x, r\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{61}$$

равномерно по $x \in \Omega$ и $|\xi| = 1$. Интегрируя, получаем, что $a(x, cr\xi) - a(x, r\xi) \to 0$ равномерно по параметру c, лежащему на произвольном сегменте в $(0, \infty)$.

Объем (6) запишем в сферических координатах:

$$v(x, a) = \lim_{r\to\infty}\int\limits_{|\xi|=1}\Big(\int\limits_{\rho^m<|a(x,r\rho\xi)|}\rho^{d-1}d\rho\Big)dS(\xi).$$

Поскольку a – ограниченная функция, при $r \to \infty$ имеем $a(x, r\rho\xi) = a(x, r\xi) + o(1)$ равномерно по $|\xi| = 1$ и $\rho > \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, что дает

$$v(x, a) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{d} \int\limits_{|\xi|=1} \left|a(x, r\xi)\right|^{\frac{d}{m}} dS(\xi). \tag{62}$$

Для функции $v_\dagger$ из (24) аналогично получаем

$$v_\dagger(x, a) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{d} \int\limits_{|\xi|=1} \big(\operatorname{Re} a(x, r\xi)\big)_+^{\frac{d}{m}} dS(\xi), \tag{63}$$

где $(\operatorname{Re} a)_+ = \big(\operatorname{Re} a + |\operatorname{Re} a|\big)/2$ – положительная часть символа $\operatorname{Re} a$. Таким образом, объемы v и $v_\dagger$ определяются предельным при $r \to \infty$ поведением символа на лучах $r\xi$. Если символ классический, то есть асимптотически однороден (нулевой степени) по ξ, то пределы (62), (63) существуют и являются интегралами от предельных значений символа. Однако, эти пределы могут существовать и для неклассических медленно осциллирующих по радиусу символов.

Если символ a принадлежит классу $\mathcal{S}(p)$ ($\mathcal{S}_\dagger(p)$) и удовлетворяет условию (61), то предел в (62) (соответственно в (63)) существует и непрерывно зависит от a в норме $L_\infty(\mathbb{R}^d \to \mathcal{C}(\bar\Omega))$.

Обозначим через r, φ, где $r > 0$ и $\varphi \in \mathbb{S}^{d-1}$, сферические координаты в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 5.1. *Рассмотрим $a(x, r\varphi)$ как векторнозначную абсолютно непрерывную функцию переменной r со значениями в пространстве функций $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{d-1} \to W_q^\ell(\Omega))$. Для параметров p, q и ℓ справедливы неравенства $q \geqslant 2$, $q\ell > d$ и $|1/p - 1/2| < \ell/q$. Пусть выполнено условие*

$$r \Big\| \frac{\partial}{\partial r} a(x, r\varphi) \Big\|_{\mathcal{C}(\mathbb{S}^{d-1} \to W_q^\ell(\Omega))} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{64}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Если для всех $x \in \Omega$ существует предел (62), то $a \in \widetilde{\mathcal{M}}_p$.*
2. *Если для всех $x \in \Omega$ существует предел (63), то $a \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\dagger}$*

Доказательство. Приведем доказательство первого утверждения, доказательство второго отличается незначительными деталями.

Из условия теоремы следует, что символ a является ограниченной функцией переменной $\xi \in \mathbb{R}^d$ со значениями в $W_q^\ell(\Omega)$, и поэтому принадлежит $\mathcal{M}_p$. Из соотношения (64) получаем, что

$$\|a(x, \rho r\varphi) - a(x, r\varphi)\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{d-1} \to W_q^\ell(\Omega))} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{65}$$

равномерно по параметру $\rho \geqslant \varepsilon$, для любого $\varepsilon > 0$.

Построим вначале по $a(x,\xi)$ функцию $\tilde{a}(x,\xi) \in \mathcal{S}^0$, такую, что

$$\|a(x, r\varphi) - \tilde{a}(x, r\varphi)\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{d-1} \to W_q^\ell(\Omega))} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{66}$$

Обозначим через J_ε оператор усреднения функции

$$f(x,\varphi) \in L_\infty(S^{d-1} \to W_q^\ell(\Omega))$$

по переменным x, φ:

$$\big(J_\varepsilon f\big)(x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_\varepsilon(\varphi, \varphi') X_\varepsilon(x - x') f^*(x', \varphi') dx' dS(\varphi'),$$

здесь f^* – продолжение функции f по переменным x из липшицевой области Ω на все пространство $\mathbb{R}^d$ с сохранением гладкости, ε – диаметр носителя усредняющего ядра. Для этого оператора выполнены следующие стандартные свойства:

1. $J_\varepsilon : L_\infty(\mathbb{S}^{d-1} \times \bar{\Omega})) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{d-1} \times \bar{\Omega})$, и для любого l равномерно по $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\|J_\varepsilon f\|_{\mathcal{C}^l(\mathbb{S}^{d-1} \times \bar{\Omega})} \leqslant C(l)\varepsilon^{-l} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{d-1} \times \bar{\Omega}))} \leqslant \tilde{C}(l)\varepsilon^{-l}\|f\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{d-1} \to W_q^\ell(\Omega))}. \tag{67}$$

   Последнее неравенство следует из непрерывности вложения $W_q^\ell(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ при $q\ell > d$.

2. Норма оператора J_ε в $L_\infty(\mathbb{S}^{d-1} \to W_q^\ell(\Omega))$ ограничена равномерно по ε, $0 < \varepsilon < 1$.
3. Для $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{d-1} \to W_q^\ell(\Omega))$ имеем

$$\|J_\varepsilon f - f\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{d-1} \to W_q^\ell(\Omega))} \leqslant \sup_{\varphi \in \mathbb{S}^{d-1}} \sup_{|z| < \varepsilon} \|f^*(\cdot + z, \varphi)$$
$$- f^*(\cdot, \varphi)\|_{W_q^\ell(\Omega)} + \sup_{|\varphi - \varphi'| < \varepsilon} \|f^*(\cdot, \varphi) - f^*(\cdot, \varphi')\|_{W_q^\ell(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{68}$$

Построим усреднения функции $r \to f(r) := a(x, r\varphi)$, при этом радиус усреднения будет стремиться к бесконечности с увеличением r. Поскольку нас интересуют предельные значения этой функции при $r \to \infty$, будем считать, что вблизи нуля $f(r) = 0$.

Положим $\Delta_k := (2^k, 2^{k+2})$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Фиксируем разбиение единицы на $(2,\infty)$ из функций $\theta_k(r) \in C_0^\infty(\Delta_k)$, подчиненное покрытию $\{\Delta_k\}$. Для их производных справедливы оценки $|\theta_k^{(j)}(r)| \leqslant C(j)2^{-kj}$, $j \in \mathbb{N}$, равномерно по k. Обозначим через $\omega_k(r)$ усредняющее ядро с радиусом усреднения 2^{k-1}, оценки производных ядра через радиус усреднения приводят к неравенствам $|\omega_k^{(j)}(r)| \leqslant C(j)2^{-k(j+1)}$, где $C(j)$ не зависят от k.

Для функции f построим $\tilde f$:

$$\tilde f(r) := \sum_k \theta_k(r) \int\limits_0^\infty \omega_k(r-r')\big(J_{1/k} f(r')\big)dr'.$$

Покажем, что функция $\tilde a(x, r\varphi) := \tilde f(r)(x,\varphi)$ принадлежит классу $\mathcal{S}^0$. Из свойств оператора J_ε следует, что $\tilde f(r)(x,\varphi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1} \times \bar\Omega))$. Получим оценки производных по r. Для $r \in \Delta_k$ достаточно оценить производные слагаемого с номером k. Из (67) и оценок производных функций θ_k, ω_k получаем неравенства

$$\Big\|\Big(\frac{d}{dr}\Big)^j \tilde f(r)\Big\|_{C^l(\mathbb{S}^{d-1}\times\bar\Omega)}$$
$$\leqslant C(l,j)k^l 2^{-kj} \sup_{2^{k-1}<r'<2^{k+3}} \|f(r')\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{d-1}, W_q^\ell(\Omega))} \leqslant \tilde C(l,j,f) r^{-j} \log^l r.$$

Таким образом, для функции $\tilde a(x,\xi)$ выполнены оценки (5) и $\tilde a(x,\xi) \in \mathcal{S}^0$.

Проверим теперь выполнение соотношения (66). Поскольку

$$\tilde f(r) - f(r) = \sum_k \theta_k(r) \int\limits_0^\infty \omega_k(r-r')\Big(J_{1/k} f(r') - f(r)\Big)dr',$$

для $r \in \Delta_k$ достаточно оценить слагаемое с номером k. Запишем интеграл в виде суммы двух слагаемых:

$$\int\limits_0^\infty \omega_k(r-r')\Big(J_{1/k} f(r') - f(r)\Big)dr' = I_{1,k}(r) + I_{2,k}(r),$$

$$I_{1,k}(r) = \int\limits_0^\infty \omega_k(r-r')\Big(J_{1/k} f(r') - J_{1/k} f(r)\Big)dr',$$

$$I_{2,k}(r) = \int_0^\infty \omega_k(r-r')\Big(J_{1/k}f(r) - f(r)\Big)dr' = J_{1/k}f(r) - f(r).$$

Оценим первый интеграл при $r \in \Delta_k$ и $k \to \infty$:

$$\begin{aligned}
&\|I_{1,k}(r)\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{d-1}, W_q^\ell(\Omega))} \\
&\leqslant \sup_{2^{k-1}<r'<2^{k+3}} \|J_{1/k}\big(f(r') - f(r)\big)\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{d-1}\to W_q^\ell(\Omega))} \\
&\leqslant \sup_{2^{k-1}<r'<2^{k+3}} \|f(r') - f(r)\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{d-1}\to W_q^\ell(\Omega))} \to 0
\end{aligned}$$

в силу свойства 2 оператора J_ε. Для второго интеграла имеем при $k \to \infty$ и $r \in \Delta_k$:

$$\|I_{2,k}(r)\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{d-1}\to W_q^\ell(\Omega))} = \|J_{1/k}f(r) - f(r)\|_{L_\infty(\mathbb{S}^{d-1}\to W_q^\ell(\Omega))} \to 0$$

в силу неравенств (68), поскольку $r \to f(r)$ – равномерно непрерывная функция со значениями в $L_\infty(\mathbb{S}^{d-1} \to W_q^\ell(\Omega))$. Соотношение (66) доказано.

Поскольку функции a и $\tilde a = \tilde f(r)(x,\varphi)$ имеют одинаковое поведение при $r \to \infty$, предел (62) для этих функций существует одновременно и тем самым $\tilde a$ попадет в класс $\mathcal{S}(p)$.

Теперь, когда построена функция $\tilde a \in \mathcal{S}(p)$ с условием (66), построим последовательность гладких по переменным x, ξ и финитных по ξ функций a_n, которая сходится в $L_\infty(\mathbb{R}^d \to W_q^\ell(\Omega))$ к $a - \tilde a$. Возьмем в качестве a_n усреднения с радиусом $1/n$ функции $\zeta_n(|\xi|)(a(x,\xi) - \tilde a(x,\xi))$, где срезка $\zeta(r)$ равняется единице при $r < n$ и нулю при $r > n+1$. Очевидно, функции a_n принадлежат $\mathcal{S}^0$, для $a_n + \tilde a$ существует предел (62), так что $a_n + \tilde a \in \mathcal{S}(p)$ и $a_n + \tilde a$ сходятся к a в $L_\infty(\mathbb{R}^d \to W_q^\ell(\Omega))$, а, следовательно, и в $\mathcal{M}_p$. Теорема 5.1 доказана. □

Список литературы

1. A. Benassi, S. Jaffard, D. Roux, *Gaussian processes and pseudodifferential elliptic operators.* — Rev. Math. Iberoamer. **13**, No. 1 (1997), 19–81.
2. A. Benassi, S. Cohen, J. Istas, *Identifying the multifractional function of a Gaussian process.*— Statist. Probab. Lett. **39** (1998), 337–345.
3. J. F. Coeurjolly, *Identification of multifractional Brownian motion.* — Bernoulli **11**, No. 6 (2005), 987–1008.
4. A. I. Karol, A. I. Nazarov, *Spectral Analysis for some Multifractional Gaussian Processes.* — Russian J. Math. Phys. **28**, No. 4 (2021), 488–500.

5. A. Karol, A. Nazarov, Ya. Nikitin, *Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators.* — Trans. Amer. Math. Soc. **360**, No. 3 (2008), 1443–1474.
6. G. Lieberman, *Regularized distance and its applications.* — Pacific J. Math. **117**, No. 2 (1985), 329–352.
7. M. A. Lifshits, *Lectures on Gaussian Processes*, Springer, New York, 2012.
8. A. I. Nazarov, *Log-level comparison principle for small ball probabilities.* — Stat. & Prob. Lett. **79**, No. 4 (2009), 481–486.
9. R.-F. Peltier, J. Lévy Véhel, *Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results.* — Inria research report No. 2645, 1995.
10. K. V. Ral'chenko, G. M. Shevchenko, *Path properties of multifractal Brownian motion.* — Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 80 (2009), 106–116 (Ukrainian); English trans.: Theor. Prob. and Math. Stat. No. 80 (2010), 119–130.
11. J. Ryvkina, *Fractional Brownian motion with variable Hurst parameter: definition and properties.* — J. Theor. Probab. **28**, No. 3 (2015), 866–891.
12. E. Seneta, *Regularly Varying Functions*, Lect. Notes in Math. **508**, Springer, Berlin–Heidelberg, 1976.
13. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами.* — Вестн. ЛГУ, сер. матем. No. 13 (1977), 13–21.
14. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами* II. — Вестн. ЛГУ, сер. матем. No. 13 (1979), 5–10.
15. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов.* — Успехи матем. наук **32**, No. 1 (1977), 17–84.
16. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* — СПб., Лань (2010), 464 с.
17. Т. Вайдль, *Общие операторные идеалы слабого типа.* — Алгебра и анализ, **4**, No. 3 (1992), 117–144.
18. А. И. Кароль, *Асимптотика спектра компактных пдо с символом, негладким по пространственным переменным.* —Пробл. матем. анал. **89** (2017), 21–39.
19. А. И. Кароль, *Асимптотика сингулярных чисел компактных ПДО с символом, негладким по пространственным переменным.* — Функц. анализ и его прил. **53**, No. 4 (2019), 89–92.
20. А. И. Кароль, *Сингулярные числа компактных псевдодифференциальных операторов с символом, негладким по пространственным переменным.* — Сиб. мат. ж. **61**, No. 4 (2020), 849–866.
21. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М., Наука (1977).

Karol A. I. Singular values of compact pseudodifferential operators of variable order with nonsmooth symbol.

We consider compact pseudodifferential operators with symbols whose decaying order with respect to the variable ξ depends on the space variable.

We obtain the estimates for singular values as well as validity conditions of the Weyl's asymptotics. The results are formulated in terms of the symbol belonging to the classes of multipliers of integral operators. We give applications of the results to the L_2 - small ball deviation asymptotics for Gaussian processes with variable Hurst parameter.

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: andrey.i.karol@gmail.com

Поступило 19 сентября 2022 г.