Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 519, 2022 г.

М. И. Белишев, А. В. Каплун

КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ АЛГЕБРЫ ЭЙКОНАЛОВ МЕТРИЧЕСКОГО ГРАФА И ЕГО ГЕОМЕТРИЯ

§1. Введение

• Алгебра эйконалов метрического графа введена в [6] и изучалась в работах [3,4,9,10]. Это некоммутативная операторная $*$-алгебра, определяемая динамической системой, которая описывает распространение волн в графе, инициированных источниками в граничных вершинах. Интерес к ней вызван возможными приложениями в обратных задачах, в частности – в задаче в реконструкции графа по граничным спектральным и динамическим данным. Связи обратных задач с банаховыми алгебрами – отдельная тема в рамках *метода граничного управления* (BC-метод; [2]).

• В нашей работе, для произвольного связного локально-компактного графа Ω и отвечающей ему алгебры эйконалов $\mathfrak{E}_\Sigma$, описываются две ее канонические блочные формы – *алгебраическая* и *геометрическая*. Обе формы выводятся из исходного параметрического представления алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma$. Алгебраическая форма известна и подробно описана в [4] (см. также примеры в [3,9]). Геометрическая форма является новой.

• Наши результаты таковы.

Показано, что обе формы определяют некоторые метрические графы – *фреймы* $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$ и $\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma$ соответственно.

Фрейм $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$ есть спектр (множество неприводимых представлений) алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma$, факторизованный по некоторому отношению и снабженный адекватными координатами. Он является инвариантом алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma$: любая ее изоморфная копия определяет фрейм $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$ с точностью до изометрии метрических пространств.

Ключевые слова: метрический граф, волновая динамическая система, алгебра эйконалов, спектр, фреймы.

Работа выполнена при поддержке Математического института им. Леонарда Эйлера, соглашение No. 075-15-2022-289, гранта РФФИ 18-01-00269 и при частичной поддержке Конкурса "Молодая математика России".

Фрейм $\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma$ напрямую связан с геометрией графа; точнее – с формой части графа, заполненной волнами. Он есть результат факторизации (склейки) этой области по отношению, имеющему прозрачный геометрический смысл. На фрейме $\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma$ также имеются естественные координаты, имеющие ту же природу, что и в случае фрейма $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$.

Вводится понятие *ординарных графов*. У них фреймы $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$ и $\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma$ идентичны: биекция, связывающая точки фреймов с одинаковыми координатами, оказывается изометрией.

• Возможное применение наших результатов в обратных задачах обсуждается в Комментариях в конце работы. Пока успешных приложений нет, чем объясняется отсутствие упоминаний и ссылок на обширную литературу по обратным задачам на графах.

Вводная часть работы имеет существенные пересечения с материалом предыдущих работ об алгебре эйконалов. Это объясняется желанием сделать изложение по возможности независимым.

§2. Волны на графе

Метрический граф. • Пусть $I_j := (0, a_j) = \{s_j \in \mathbb{R}|\ 0 < s_j < a_j < \infty\}, j = 1, \dots, d$ – конечные интервалы. Множество $S_d := \{0\} \sqcup I_1 \sqcup \dots \sqcup\ I_d$, оснащенное метрикой

$$\tau(x, y) := \begin{cases} |x-y|, & \text{при } x, y \in I_j \\ x+y, & \text{при } x \in I_i,\ y \in I_j, i \neq j \\ y, & \text{при } x = 0,\ y \in I_j \\ x, & \text{при } x \in I_i,\ y = 0 \\ 0, & \text{при } x = y = 0 \end{cases} . \tag{2.1}$$

будем называть *звездой*.

• *Метрический граф* Ω это связное метрическое пространство, локально изометричное либо звезде, либо интервалу. Его внутренние вершины суть точки, (малые) окрестности которых изометричны звездам S_d с $d > 2$; граничные вершины – звездам S_1 (полуоткрытым интервалам). Число d называется *валентностью* вершины. Отсутствие в рассмотрениях вершин валентности 2 объясняется тем, что звезды S_2, изометричны интервалам. Поэтому часть графа, изометричную S_2, можно заменить соответствующим интервалом. Однако ниже, при рассмотрении фреймов, вершины с $d = 2$ используются. Ребра суть максимальные части Ω, не содержащие вершин и изометричные интервалам.

Таким образом, $\Omega = E \sqcup V \sqcup \Gamma$, где $E = \{e_i\}_{i=1}^p$ - *ребра*; $V = \{v_j\}_{j=1}^q$, v_k – *внутренние вершины*; $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^n$, γ_k – *граничные вершины*; каждая вершина $w \in V \sqcup \Gamma$ имеет в Ω окрестность, изометричную S_d. В дальнейшем предполагается, что множество граничных вершин не пусто.

Принятое определение допускает существование ребер бесконечной длины.

• Пусть τ есть метрика на Ω. Через $\Omega^r[A] := \{x \in \Omega |\ \tau(x, A) < r\}$ радиуса $r > 0$ обозначается метрическая окрестность множества A.

Операторы и пространства на графе. • Ориентируем каждое из ребер линейным порядком $\prec$ (одним из двух возможных способов). Для ребра $e \in E$, функции y на Ω и точки $x \in e$ определим производную

$$\frac{dy}{de}(x) := \lim_{m \to x} \frac{y(m) - y(x)}{s_m \tau(m, x)},$$

где $s_m = 1$ при $x \prec m$ и $s_m = -1$ при $m \prec x$.

Выберем вершину $w \in V \cup \Gamma$ и ее окрестность в Ω, изометричную звезде S_d. Скажем, что ребро e примыкает к w, если $w \in \overline{e}$ (замыкание в Ω). Для каждого e, примыкающего к w, определим *исходящую производную*

$$\frac{dy}{de_+}(w) := \lim_{e \ni m \to w} \frac{y(m) - y(w)}{\tau(m, w)},$$

которая не зависит от ориентации. Для каждой вершины $w \in V \cup \Gamma$ и функции y определим *исходящий поток*

$$\Pi_w[y] = \sum_{\overline{e} \ni w} \frac{dy}{de_+}(w).$$

• Рассмотрим вещественное гильбертово пространство $\mathcal{H} := L_2(\Omega)$ функций на Ω со скалярным произведением

$$(y, u)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} yu \, d\tau = \sum_{e \in E} \int_{e} yu \, d\tau.$$

Через $C(\Omega)$ обозначим пространство непрерывных функций с нормой $\|y\| = \sup_{\Omega} |y(\cdot)|$. Функцию y отнесем к классу Соболева $\mathcal{H}^2(\Omega)$, если $y \in C(\Omega)$ и $\frac{dy}{de}, \frac{d^2y}{de^2} \in L_2(e)$ для каждого ребра $e \in E$. Отметим также, что значение второй производной $\frac{d^2y}{de^2}$ не зависит от ориентации ребер.

Введем класс Кирхгофа

$$\mathcal{K} := \{y \in \mathcal{H}^2(\Omega) \mid \Pi_v[y] = 0,\ \ v \in V\}\,.$$

Оператор Лапласа на графе вводится определением

$$\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}; \qquad \mathrm{Dom}\,\Delta = \mathcal{K}; \quad (\Delta y)\big|_e = \frac{d^2 y}{de^2}\,,\ \ e \in E. \tag{2.2}$$

Он плотно задан, замкнут и не зависит от ориентации ребер.

Динамическая система с граничным управлением. • Начально-краевая задача, описывающая распространение волн в графе, имеет вид

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \qquad \text{в } \mathcal{H},\ \ 0 < t < T; \tag{2.3}$$

$$u(\cdot, t) \in \mathcal{K} \qquad \text{при } \ 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{2.4}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \qquad \text{в } \Omega; \tag{2.5}$$

$$u = f \qquad \text{на } \ \Gamma \times [0, T]. \tag{2.6}$$

Здесь $T > 0$ – финальный момент времени; $f = f(\gamma, t)$ - *граничное управление*; $u = u^f(x, t)$ – решение (*волна*). При C^2-гладком (по t) управлении f, исчезающем вблизи $t = 0$, задача имеет единственное классическое решение u^f.

Как следует из определения (2.2), на каждом ребре e решение u^f удовлетворяет уравнению однородной струны $u_{tt} - u_{ee} = 0$. Отсюда видно, что волны распространяются от границы Γ внутрь Ω с единичной скоростью. Как следствие, если управление действует с части границы $\Sigma \subseteq \Gamma$, т.е. выполнено $\mathrm{supp}\, f \subset \Sigma \times [0, T]$, имеем соотношение

$$\mathrm{supp}\, u^f(\cdot, t) \subset \overline{\Omega^t[\Sigma]}, \qquad t > 0\,. \tag{2.7}$$

• Пространство управлений $\mathcal{F}^T := L_2(\Gamma \times [0, T])$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{F}^T} := \sum_{\gamma \in \Gamma} \int\limits_0^T f(\gamma, t)\, g(\gamma, t)\, dt$$

называется *внешним пространством* системы (2.3)-(2.6). Имеет место представление

$$\mathcal{F}^T = \oplus \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}^T_\gamma\,.$$

в виде суммы подпространств $\mathcal{F}^T_\gamma := \{f \in \mathcal{F}^T \mid\ \mathrm{supp} \subset \{\gamma \times [0, T]\}\}$.

Пространство $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ называется *внутренним*, волны $u^f(\cdot, t)$ суть его элементы, зависящие от времени.

Эйконалы. Выберем граничную вершину $\gamma \in \Sigma$ и фиксируем финальный момент $t = T$. Множество волн

$$\mathcal{U}_\gamma^s := \left\{ u^f(\cdot, s) \mid f \in \mathcal{F}_\gamma^T \right\} \subset \mathcal{H}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant T$$

называется *достижимым* (с вершины γ, к моменту $t = s$). Можно показать, что $\mathcal{U}_\gamma^s$ суть (замкнутые) подпространства в $\mathcal{H}$ [6]. С ростом s они расширяются: $\mathcal{U}_\gamma^s \subset \mathcal{U}_\gamma^{s'}$ при $s < s'$. Пусть P_γ^s в $\mathcal{H}$ суть (ортогональные) проекторы на подпространства $\mathcal{U}_\gamma^s$. Семейство $\{P_\gamma^s \mid 0 \leqslant s \leqslant T\}$ непрерывно по s и определяет оператор эйконала (коротко – *эйконал*)

$$E_\gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad E_\gamma := \int_0^T (s+1)\, dP_\gamma^s.$$

Из определения следует, что E_γ есть ограниченный самосопряженный положительный оператор. Пусть $T_\gamma^* = \max_{\gamma' \in \Gamma} \tau(\gamma, \gamma') \leqslant \infty$ – время заполнения графа волнами от вершины γ (см. (2.7)). Справедливо

Предложение 1. *Для эйконала E_γ выполнено* $\operatorname{Ran} E_\gamma = \mathcal{U}_\gamma^T$, $\operatorname{Ker} E_\gamma = \mathcal{H} \ominus \mathcal{U}_\gamma^T$. *При $T < T_\gamma^*$ он имеет собственное значение 0 бесконечной кратности и простой абсолютно непрерывный спектр, заполняющий сегмент* $[1, T+1]$.

Отметим, что наличие хотя бы одного ребра бесконечной длины приводит к тому, что спектр эйконала не имеет лакун и для любого $T < \infty$ в [4] установлено равенство

$$\sigma(E_\gamma\big|_{\mathcal{U}_\gamma^T}) = \sigma_{\rm ac}(E_\gamma) = [1, T+1].$$

Имеются ли лакуны в спектре в случае компактного графа – открытый вопрос.

§3. Алгебра эйконалов

Об алгебрах. Приводимые ниже сведения о C^*-алгебрах взяты из [1, 8, 12, 13].

• Напомним, что банахова алгебра $\mathfrak{A}$ с инволюцией $(\cdot)^*$ называется C^*-алгеброй, если выполнено

$$\|a^* a\| = \|a\|^2, \qquad a \in \mathfrak{A}.$$

Таковыми, в частности, являются алгебры ограниченных операторов $\mathfrak{B}(H)$ в гильбертовом пространстве H, в которых роль инволюции играет операторное сопряжение. Все алгебры в работе суть операторные C^*-алгебры [12].

Запись $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ будет означать, что C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ связаны $*$-изоморфизмом (далее коротко – *изоморфзмом*). Такой изоморфизм является изометрией.

Для множества $S \subset \mathfrak{A}$, через $\vee S$ обозначается минимальная C^*-(под)алгебра в $\mathfrak{A}$, содержащая S.

• Для элементов алгебры $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_p$ определены проекции $\mathrm{pr}_j : a = a_1 \oplus \cdots \oplus a_p \mapsto a_j$. Пусть $C \subset A$ – подалгебра; алгебры $\mathrm{pr}_j\, C$ суть *блоки* алгебры C.

Говорят, что алгебра C *разделяет* блоки $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ алгебры A, если для любого набора элементов $a_{i_1} \in A_{i_1}, \dots, a_{i_m} \in A_{i_m}$ в C найдутся элементы $c_{i_1}, \dots, c_{i_m}$, для которых выполнено

$$\mathrm{pr}_{i_l}\, c_{i_k} = \begin{cases} a_{i_k}, & i_k = i_l; \\ 0_{i_l}, & i_k \neq i_l; \end{cases} .$$

Если в A есть блоки, которые C не разделяет, то скажем, что алгебра C *связывает* блоки алгебры A.

• Представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ это $*$-гомоморфизм $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(H)$. Эквивалентность представлений $\pi \sim \pi'$ означает, что $\iota\pi(a) = \pi'(a)\iota$, $a \in \mathfrak{A}$, где $\iota : H \to H'$ – унитарный оперотор. Представление *неприводимо*, если операторы $\pi(\mathfrak{A})$ не имеют общего ненулевого инвариантного подпространства в H.

Спектром C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ называется множество $\widehat{\mathfrak{A}}$ классов эквивалентности ее неприводимых представлений. Класс эквивалентности (точку спектра), отвечающий представлению π, будем обозначать через $\hat{\pi}$. Спектр снабжен канонической топологией Джекобсона [8, 12].

Изоморфизм алгебр $\mathrm{u} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ определяет соответствие представлений

$$\widehat{\mathfrak{A}} \ni \pi \to \mathrm{u}_*\pi \in \widehat{\mathfrak{B}}, \quad (\mathrm{u}_*\pi)(b) := \pi(\mathrm{u}^{-1}(b)), \quad b \in \mathfrak{B},$$

которое продолжается до канонического гомеоморфизма спектров:

$$\widehat{\mathfrak{A}} \ni \hat{\pi} \to \mathrm{u}_*\hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{B}}, \quad \mathrm{u}_*\hat{\pi} := \{\, \mathrm{u}_*\pi \mid \pi \in \hat{\pi}\}.$$

Стандартные алгебры и их спектры. • Через $\mathbb{M}^n$ обозначается алгебра вещественных $n\times n$-матриц, рассматриваемых как операторы в $\mathbb{R}^n$ и снабженных соответствующей (операторной) нормой. Она неприводима.

C^*-подалгебру $\mathfrak{A}\subset\mathbb{M}^n$ также условимся считать неприводимой, если выполнено $\mathfrak{A}\cong\mathbb{M}^k$, где $k\leqslant n$. Такая алгебра, в подходящем базисе в $\mathbb{R}^n$, принимает блочно-диагональную форму и состоит из двух блоков, один из которых есть $\mathbb{M}^k$, а второй (если имеется) – нулевой.

Предложение 2. *Любая C^*-подалгебра алгебры $\mathbb{M}^n$ изоморфна прямой сумме $\bigoplus_k\mathbb{M}^{n_k}$, где $\sum\limits_k n_k\leqslant n$.*

• Через $C([a,b],\mathbb{M}^n)$ обозначается алгебра непрерывных $\mathbb{M}^n$-значных функций с нормой $\|\phi\|=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\|\phi(t)\|_{\mathbb{M}^n}$. Тем же символом мы обозначаем операторную (под)алгебру в $\mathfrak{B}\left(L_2([a,b];\mathbb{R}^n)\right)$, элементы которой умножают квадратично-суммируемые $\mathbb{R}^n$-значные функции на функции из $C([a,b],\mathbb{M}^n)$. Соответствие $\phi\mapsto\phi\,\cdot$ устанавливает изоморфизм этих алгебр.

Важную роль играет следующий факт [12].

Предложение 3. *Представления*

$$\pi_t: C([a,b],\mathbb{M}^n)\to\mathbb{M}^n;\;\; \pi_t(\phi):=\phi(t),\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{3.1}$$

неприводимы; их классы эквивалентности исчерпывают спектр алгебры $C([a,b],\mathbb{M}^n)$. Для любого неприводимого представления π алгебры $C([a,b],\mathbb{M}^n)$ существует единственная точка $t\in[a,b]$, такая, что $\pi\sim\pi_t$.

В алгебре $C([a,b];\mathbb{M}^n)$ содержатся подалгебры

$$\dot C([a,b];\mathbb{M}^n):=\{\phi\in C([a,b];\mathbb{M}^n)\mid\; \phi(a)\in\mathbb{M}_a,\;\phi(b)\in\mathbb{M}_b\}\;, \tag{3.2}$$

где $\mathbb{M}_a,\mathbb{M}_b$ суть C^*-подалгебры $\mathbb{M}^n$, которые называем *граничными.* Из Предложения 2 следует, что

$$\mathbb{M}_a\cong\bigoplus_{k=1}^{n_a}\mathbb{M}^{\kappa_k},\;\;\kappa_1+\dots+\kappa_{n_a}\leqslant n;\quad \mathbb{M}_b\cong\bigoplus_{k=1}^{n_b}\mathbb{M}^{\lambda_k},\;\;\lambda_1+\dots+\lambda_{n_b}\leqslant n. \tag{3.3}$$

В случае $\mathbb{M}_a=\mathbb{M}_b=\mathbb{M}^n$ имеем $\dot C([a,b];\mathbb{M}^n)=C([a,b];\mathbb{M}^n)$. Алгебры $\dot C([a,b];\mathbb{M}^n)$ мы будем называть *стандартными.*

• Спектр стандартной алгебры состоит из классов $\hat{\pi}_t,\ t \in (a,b)$ неприводимых представлений вида (3.1) и неприводимых представлений, на которые распадаются (вообще говоря, приводимые) представления $\hat{\pi}_a$, $\hat{\pi}_b$ алгебр $\mathbb{M}_a, \mathbb{M}_b$. Если, например, $n_a \geqslant 2$, то π_a распадается на неприводимые представления

$$\pi_a^k : \phi(a) \mapsto [\phi(a)]^k \in \mathbb{M}^{\kappa_k}, \tag{3.4}$$

где $[\dots]^k$ есть k-й блок блочно-диагональной матрицы в представлениях (3.3). В этом случае мы говорим, что представления $\hat{\pi}_a^1, \dots, \hat{\pi}_a^{n_a}$ образуют *кластер* в спектре стандартной алгебры. Этот термин мотивирован тем, что они неотделимы друг от друга в топологии Джекобсона ([1]). Аналогичный кластер может иметься и на правом конце $t = b$. В то же время, все $\hat{\pi}_t$ с разными $t \in (a,b)$ отделимы друг от друга и от кластеров (см. [6], [3]). Спектр алгебры $C([a,b]; \mathbb{M}^n)$ кластеров не содержит.

Приведенные выше факты и результаты взяты из [1, 8, 12, 13].

• Приведем еще одно понятие общего характера. Пусть дано множество X и симметричное рефлексивное отношение $\sim_0$ на нем. Рассмотрим на X отношение $\sim$, которое задается следующим условием: элементы x и y находятся в отношении $\sim$, если в X имеется конечный набор элементов $x_1, \dots, x_n$ такой, что выполнено $x \sim_0 x_1 \sim_0 \dots \sim_0 x_n \sim_0 y$. Такое отношение $\sim$ будем называть *транзитивным замыканием* отношения $\sim_0$. Легко видеть, что оно является отношением эквивалентности.

Алгебра $\mathfrak{E}_\Sigma$. В оставшейся части работы, если не оговорено противное, финальный момент T в (2.3)–(2.6) фиксирован и не всегда указывается в обозначениях.

• Выберем подмножество $\Sigma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\} \subset \Gamma$; входящие в него граничные вершины будем называть *управляющими*. В силу (2.7) выполнено

$$\mathcal{U}_\gamma^s \subset \mathcal{H}_\Sigma^T := \{y \in \mathcal{H} \mid \operatorname{supp} y \subset \overline{\Omega^T[\Sigma]}\}, \qquad \gamma \in \Sigma,\ 0 \leqslant s \leqslant T.$$

Как следствие, для полного достижимого множества имеем вложение

$$\mathcal{U}_\Sigma^s := \overline{\operatorname{span}\{\mathcal{U}_\gamma^s \mid \gamma \in \Sigma\}} \subset \mathcal{H}_\Sigma^T, \qquad 0 \leqslant s \leqslant T.$$

Таким образом, если управления f действуют только с вершин $\gamma \in \Sigma$, то естественным внутренним пространством системы (2.3)–(2.6) является подпространство $\mathcal{H}^T_\Sigma = L_2(\overline{\Omega^T[\Sigma]})$. Эйконалы E_γ, отвечающие вершинам $\gamma \in \Sigma$, суть операторы в $\mathcal{H}^T_\Sigma$.

• *Алгеброй эйконалов* мы называем операторную C^*-алгебру

$$\mathfrak{E}_\Sigma := \vee\{E_\gamma \mid \gamma \in \Sigma\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}^T_\Sigma),$$

введенную в [6]. Относящиеся к ней новые результаты, которые составляют предмет данной работы, содержатся в разделе 5. Их представление требует основательной подготовки, которая и проводится в оставшейся части раздела 3 и в разделе 4, где кратко описываются известные факты и результаты. Подробности читатель найдет в [4, 6].

Параметризация графа. • Множество $\Lambda = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \overline{\Omega^T[\Sigma]}$ называется *множеством определенности*, если для любой функции $y \in C(\overline{\Omega^T[\Sigma]})$ и для всех $\gamma \in \Sigma$, значения функций $E_\gamma y$ на Λ определяются значениями y на Λ. В эквивалентной формулировке, имеет место импликация

$$y|_\Lambda = 0 \;\Rightarrow\; (E_\gamma y)|_\Lambda = 0, \qquad \gamma \in \Sigma. \tag{3.5}$$

Каждая точка $x \in \overline{\Omega^T[\Sigma]}$, за возможным исключением *конечного* числа т.н. критических точек, входит в некоторое (вообще говоря, не единственное) множество определенности $\Lambda[x]$: см. [4, 6].

• Как следует из (3.5), пары $\{y|_\Lambda, (E_\gamma y)|_\Lambda\}$ образуют график оператора e_γ, действующего в m-мерном пространстве $\mathbf{l}_2(\Lambda)$ функций (векторов) со скалярным произведением $(a, b) = \sum\limits_{k=1}^{m} a(x_k)\, b(x_k)$. Соответствие $\pi : E_\gamma \mapsto e_\gamma$ расширяется с образующих E_γ, $\gamma \in \Sigma$ на всю алгебру $\mathfrak{E}_\Sigma$ и доставляет ей m-мерное представление

$$\pi :\, \mathfrak{E}_\Sigma \,\to\, \mathfrak{B}(\mathbf{l}_2(\Lambda)). \tag{3.6}$$

Пусть $\{\chi_1, \dots, \chi_m\}$, $\chi_i(x_k) = \delta_{ik}$ есть базис в $\mathbf{l}_2(\Lambda)$ из индикаторов точек, составляющих Λ. В нем операторы e_γ приобретают матрицы $\check{e}_\gamma$. Соответственно, представление (3.6) становится матричным:

$$\pi :\, \mathfrak{E}_\Sigma \,\to\, \mathbb{M}^m. \tag{3.7}$$

Как последует из дальнейшего, почти все представления алгебры эйконалов имеют вид (3.6), (3.7).

• При шевелении точки $x \in \Lambda[x]$, точки $x_1, \dots, x_m$, составляющие $\Lambda[x]$, заметают открытые интервалы (*клетки*) $\omega_1, \dots, \omega_m$ одинаковой длины $|\omega_k| = \epsilon > 0$, располагающиеся на ребрах графа. Клетки образуют *семейство*

$$\Phi := \bigcup_{k=1}^{m} \omega_k = \bigcup_{x\in\omega} \Lambda[x],$$

где ω – любая из клеток семейства Φ.

Весь (под)граф $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$, заполненный волнами, разбивается на конечное число семейств $\Phi^1, \dots, \Phi^J$ указанного вида

$$\Phi^j := \bigcup_{k=1}^{m_j} \omega_k^j, \qquad |\omega_k^j| = \epsilon_j \tag{3.8}$$

и конечное множество Θ т.н. *критических точек*, покрывающих стыки клеток:

$$\overline{\Omega^T[\Sigma]} \;=\; \left[\bigcup_{j=1}^{J} \Phi^j\right] \cup \Theta.$$

Как следствие, имеет место разложение

$$L_2(\Omega^T[\Sigma]) \;=\; \oplus \sum_{j=1}^{J} L_2(\Phi^j). \tag{3.9}$$

• Каждое семейство Φ^j в (3.8) параметризуется следующим образом. Выбирается любая клетка $\omega_k^j \subset \Phi^j$ и фиксируется один из ее концов $c \in \overline{\omega_k^j}$. Точка $x \in \omega_k^j$ приобретает параметр $r := \tau(x,c),\ 0 < r < |\omega_k^j|$ и обозначается через $x_k(r)$:

$$x_k(r) \;:=\; \Lambda[x(r)] \cap \omega_k^j, \qquad 0 < r < \epsilon_j\,.$$

При изменении r, точки $x_1(r), \dots, x_{m_j}(r)$, составляющие множество $\Lambda[x(r)]$, согласованно движутся по ребрам с единичной скоростью и заметают соответствующие (параметризаванные) клетки ω_k^j.

Вторая из двух возможных параметризаций отвечает выбору другого конца клетки $\omega_k^j \subset \Phi^j$. Разные Φ^j параметризуются независимо (одним из двух возможных способов). Далее считаем, что все семейства Φ^j параметризованы.

• Приведенные факты имеют вполне прозрачный геометрический смысл, связанный с т.н. *гидрой* H_Σ^T – пространственно-временным графом, определяемым динамикой системы (2.3)–(2.6): подробности и иллюстрации см. в [6].

Добавим, что связанное с динамикой разбиение вида (3.8) из работы [6] не является единственным: другие можно получить из него, например, разбиением семейств Φ^j на семейства с клетками меньшего размера. Наибольший интерес представляет разбиение, которое соответствует *минимальным* (по $m = \#\Lambda$) множествам Λ. Отношения между минимальностью и неприводимостью представлений (3.6) обсуждаются ниже.

• Параметризация графа индуцирует параметризацию представлений (3.6): появляются серии

$$\pi_j(r) : \mathfrak{E}_\Sigma \to \mathfrak{B}(\mathbf{l}_2(\Lambda[x(r)])),\ x(r) \in \Phi^j,\ 0 < r < \epsilon_j;\ \ j = 1, \dots, J. \tag{3.10}$$

Позже выяснится, что представления этого типа в существенном исчерпывают спектр алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma$.

В дальнейшем, наряду с (3.10) удобно использовать конкретные матрично-значные представления вида (3.7). С этой целью отождествим пространства $\mathbf{l}_2(\Lambda[x(r)]) \equiv \mathbf{l}_2(\Lambda[x(r')] =: \mathbf{l}_2^j \cong \mathbb{R}^{m_j}$ при $r, r' \in (0, \epsilon_j)$, базисы индикаторов в них, и определим соответствующий базис $\{\chi_1, \dots, \chi_{m_j}\}$ в $\mathbf{l}_2^j$.

Параметризация алгебры эйконалов. Параметризация графа определяет параметрическую форму алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma$. Опишем ее, следуя [6].

• Разбиению (3.8) сопоставляется набор унитарных операторов $U^j : L_2(\Phi^j) \to L_2((0, \epsilon_j), \mathbf{l}_2^j)$,

$$(U^j y)(r) := y\big|_{\Lambda[x(r)]} = \begin{pmatrix} y(x_1(r)) \\ \dots \\ y(x_{m_j}(r)) \end{pmatrix} \in \mathbf{l}_2^j, \quad r \in (0, \epsilon_j);\ \ j = 1, \dots, J, \tag{3.11}$$

определяющих унитарный оператор

$$U : L_2(\overline{\Omega^T[\Sigma]}) \to \oplus \sum_{j=1}^{J} L_2((0, \epsilon_j); \mathbf{l}_2^j), \quad U := \oplus \sum_{j=1}^{J} U^j.$$

Все эйконалы E_γ приводятся подпространствами $L_2(\Phi^j)$ из разложения (3.9), что ожидаемо следует из E_γ-инвариантности множеств определенности: см. (3.5). Они переходят в операторы, умножающие элементы пространства параметрического представления

$$\oplus \sum_{j=1}^{J} L_2((0, \epsilon_j); \mathbf{l}_2^j)$$

на операторно-значные функции

$$UE_\gamma U^{-1} = \oplus \sum_{j=1}^{J} \left[\sum_{i=1}^{n_{\gamma j}} \tau^i_{\gamma j}(\cdot_j) P^i_{\gamma j} \right] \in \bigoplus_{j=1}^{J} C\left([0,\epsilon_j]; \mathfrak{B}(\mathbf{l}_2^j)\right), \quad \mathfrak{B}(\mathbf{l}_2^j) \cong \mathbb{M}^{m_j}, \tag{3.12}$$

где каждая (скалярная) функция $\tau^i_{\gamma j}$ зависит от своего аргумента $r_j \in [0,\epsilon_j]$ и имеет одну из следующих форм:

$$\tau^i_{\gamma j}(r) = t^i_{\gamma j} + r \quad \text{или} \quad \tau^i_{\gamma j}(r) = \tilde{t}^i_{\gamma j} - r = (t^i_{\gamma j} + \epsilon_j) - r, \tag{3.13}$$

а константы $t^i_{\gamma j}, \tilde{t}^i_{\gamma j}$ определяются равенствами:

$$t^i_{\gamma j} := \min_{r\in[0,\epsilon_j]} \tau^i_{\gamma j}\,, \quad \tilde{t}^i_{\gamma j} := \max_{r\in[0,\epsilon_j]} \tau^i_{\gamma j}\,.$$

При этом, области значений (сегменты $\operatorname{ran}\tau^i_{\gamma j} = [t^i_{\gamma j}, \tilde{t}^i_{\gamma j}] \subset \mathbb{R}$) для различных пар индексов i, j и i', j' и одинаковых γ могут пересекаться *только* по концам (тогда выполнено либо $t^i_{\gamma j} = \tilde{t}^{i'}_{\gamma j'}$, либо $\tilde{t}^i_{\gamma j} = t^{i'}_{\gamma j'}$). Справедливо равенство, связывающее функции $\tau^i_{\gamma j}$ с абсолютно непрерывным спектром эйконалов:

$$\sigma_{\rm ac}(E_\gamma) = \bigcup_{j=1}^{J} \bigcup_{i=1}^{n_{\gamma j}} \operatorname{ran}\tau^i_{\gamma j}\,.$$

Операторы $P^i_{\gamma j}$ суть *одномерные* проекторы в $\mathbf{l}_2^j$, попарно ортогональные для каждой фиксированной вершины γ: $P^i_{\gamma j} P^k_{\gamma j} = \delta_{ik} P^i_{\gamma j}$. Примечательно и важно, что в (3.12) они постоянны – не зависят от $r \in (0,\epsilon_j)$.

Слагаемые

$$\left[UE_\gamma U^{-1}\right]^j := \sum_{i=1}^{n_{\gamma j}} \tau^i_{\gamma j}(\cdot_j) P^i_{\gamma j} \in C\left([0,\epsilon_j]; \mathfrak{B}(\mathbf{l}_2^j)\right)$$

в (3.12) суть блоки эйконала E_γ в параметрическом представлении.

- Из определения $\mathfrak{E}_\Sigma := \vee\{E_\gamma \mid \gamma \in \Sigma\}$ и (3.12) следует представление

$$U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1} \subset \bigoplus_{j=1}^{J} C\left([0,\epsilon_j]; \mathfrak{B}(\mathbf{l}_2^j)\right); \quad \operatorname{pr}_j U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1} =: \left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]^j$$
$$= \vee\left\{\left[UE_\gamma U^{-1}\right]^j \mid \gamma \in \Sigma\right\} \subset C\left([0,\epsilon_j]; \mathfrak{B}(\mathbf{l}_2^j)\right) \tag{3.14}$$

о котором мы будем говорить как об *исходной* параметрической форме алгебры эйконалов. В первом вложении существенно, что алгебра $U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}$ может связывать блоки алгебры справа. Характеризация этих связей составляет главное содержание работы [4].

• Пусть

$$\mathbb{P}^j := \{P^i_{\gamma j} \mid i = 1, \ldots, n_{\gamma j};\ \ \gamma \in \Sigma\}. \tag{3.15}$$

есть набор проекторов, относящихся к блоку $\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]^j$. Соотношения (3.14) уточняются следующим образом:

$$U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1} \subset \bigoplus_{j=1}^{J} C\left([0,\epsilon_j];\mathfrak{P}^j\right); \quad \left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]^j \subset C([0,\epsilon_j];\mathfrak{P}^j), \tag{3.16}$$

где $\mathfrak{P}^j := \vee\mathbb{P}^j \subset \mathfrak{B}(\mathrm{l}_2^j) \cong \mathbb{M}^{m_j}$.

§4. Первая каноническая форма

В работе [4] описан переход от исходной параметрической формы алгебры эйконалов к некоторой канонической форме, представляющей $\mathfrak{E}_\Sigma$ в виде суммы *независимых* стандартных алгебр вида (3.2). Кратко опишем соответствующую процедуру.

Разбиение на блоки. • Определим на каждом наборе проекторов $\mathbb{P}^j$ отношение $\overset{\text{nort}}{\sim}_0$ ("non orthogonal") по правилу: $P^i_{\gamma j} \overset{\text{nort}}{\sim}_0 P^{i'}_{\gamma' j}$, если $P^i_{\gamma j}P^{i'}_{\gamma' j} \neq 0$. Через $\overset{\text{nort}}{\sim}$ обозначим его транзитивное замыкание.

Пусть $[P]$ - класс эквивалентности проектора $P \in \mathbb{P}^j$ по отношению $\overset{\text{nort}}{\sim}$. Можно показать [4], что разбиению

$$\mathbb{P}^j = [P]^j_1 \cup \cdots \cup [P]^j_{p_j} \tag{4.1}$$

отвечает разложение алгебры $\mathfrak{P}^j$ на *неприводимые* блоки $\mathfrak{P}^j_p$:

$$\mathfrak{P}^j = \bigoplus_{p=1}^{p_j} \mathfrak{P}^j_p\,, \tag{4.2}$$

где $\mathfrak{P}^j_p := \vee[P]^j_p \cong \mathbb{M}^{\kappa^j_p}$, $\ \kappa^j_1 + \cdots + \kappa^j_{p_j} \leqslant m_j$.

• В соответствии с (4.1), блоки эйконалов в (3.16) распадаются на подблоки:

$$\left[UE_\gamma U^{-1}\right]^j = \oplus \sum_{p=1}^{p_j} \left[UE_\gamma U^{-1}\right]^j_p, \quad \left[UE_\gamma U^{-1}\right]^j_p := \sum_{P^i_{\gamma j}\in[P]^j_p} \tau^i_{\gamma j}(\cdot_j) P^i_{\gamma j}$$
$$\in C\left([0,\epsilon_j]; \mathfrak{P}^j_p\right), \tag{4.3}$$

а для алгебры эйконалов выполнено

$$U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1} \subset \bigoplus_{j=1}^{J}\left[\bigoplus_{p=1}^{p_j} C([0,\epsilon_j],\mathfrak{P}^j_p)\right].$$

Упрощая обозначения, перейдем к сквозной нумерации блоков, алгебр и параметров:

$$\begin{aligned}
&[UE_\gamma U^{-1}]^1_1,\dots,[UE_\gamma U^{-1}]^1_{p_1};\ \dots\ \dots;\ [UE_\gamma U^{-1}]^J_1,\dots,[UE_\gamma U^{-1}]^J_{p_J}\\
&\to [UE_\gamma U^{-1}]_1,\ \dots,[UE_\gamma U^{-1}]_L, \quad \gamma\in\Sigma\,;\\
&[P]^1_1,\dots,[P]^1_{p_1};\ \dots\ \dots;\ [P]^J_1,\dots,[P]^J_{p_J} \quad \to \quad [P]_1,\ \dots,[P]_L\,;\\
&\mathfrak{P}^1_1,\dots,\mathfrak{P}^1_{p_1};\ \dots\ \dots;\ \mathfrak{P}^J_1,\dots,\mathfrak{P}^J_{p_J} \quad \to \quad \mathfrak{P}_1,\ \dots,\mathfrak{P}_L\,;\\
&\epsilon_1,\dots,\epsilon_{m_1};\dots\ \dots;\epsilon_{J-m_J},\dots,\epsilon_J \quad \to \quad \epsilon_1,\dots,\epsilon_L
\end{aligned}$$

и перепишем последнее соотношение в виде

$$\begin{aligned}
U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1} \subset \bigoplus_{l=1}^{L} C\left([0,\epsilon_l],\mathfrak{P}_l\right); \quad [U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}]_l\\
= \vee\left\{[UE_\gamma U^{-1}]_l \;\middle|\; \gamma\in\Sigma\right\}, \quad [UE_\gamma U^{-1}]_l\\
= \sum_{P^k_{\gamma l}\in[P]_l} \tau^k_{\gamma l}(\cdot_l)P^k_{\gamma l} \in C\left([0,\epsilon_l],\mathfrak{P}_l\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

с *неприводимыми* $\mathfrak{P}_l$.

Соединение блоков. Алгебра $U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}$ в (3.14) состоит из новых (по отношению к (3.14)) блоков $\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_l := \vee\left\{[UE_\gamma U^{-1}]_l \mid \gamma\in\Sigma\right\}$. Возможна дальнейшая перестройка разложения (4.4), состоящая в соединении некоторых из этих блоков. Коротко опишем соответствующую процедуру; подробности см. в [4].

• Выберем элемент $e \in \mathfrak{E}_\Sigma$. Переходя к параметрической форме, в соответствии с (4.4) имеем разложение:

$$UeU^{-1} = \oplus \sum_{l=1}^{L} [UeU^{-1}]_l, \quad [UeU^{-1}]_l \in C([0,\epsilon_l];\mathfrak{P}_l).$$

Из неприводимости алгебр $\mathfrak{P}_l$ следует неприводимость представлений алгебры эйконалов вида

$$\pi_l^r : \mathfrak{E}_\Sigma \to \mathfrak{P}_l, \quad \pi_l^r(e) := [UeU^{-1}]_l(r), \quad 0 < r < \epsilon_l$$

(см. [4] и Предложение 3). В то же время, *граничные представления*

$$\rho_l^\pm : \mathfrak{E}_\Sigma \to \mathfrak{P}_l; \quad \rho_l^-(e) := \left[UeU^{-1}\right]_l(0), \quad \rho_l^+(e) := \left[UeU^{-1}\right]_l(\epsilon_l), \tag{4.5}$$

вообще говоря, могут оказаться приводимыми. При этом, представления ρ_l^- и ρ_l^+, отвечающие *одному* блоку, заведомо не эквивалентны. Причина в том, что, в силу монотонности функций $\tau_{\gamma l}^j$ (см. (3.13)), матрицы эйконалов $\sum\limits_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(0) P_{\gamma l}^j$ и $\sum\limits_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(\epsilon_l) P_{\gamma l}^j$ имеют *различные* наборы собственных значений $\{\tau_{\gamma l}^k(0) |\; k = 1,\dots,n_{\gamma l}\} \neq \{\tau_{\gamma l}^k(\epsilon_l) |\; k = 1,\dots,n_{\gamma l}\}$, что исключает эквивалентность.

• Скажем, что блоки $\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_l$ и $\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_{l'}$ допускают соединение, если существуют представления $\rho \in \{\rho_l^-, \rho_l^+\}$ и $\rho' \in \{\rho_{l'}^-, \rho_{l'}^+\}$, являющиеся эквивалентными: $\rho \sim \rho'$. Можно показать [4,10], что полный набор блоков $\{\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_l |\; l = 1,\dots,L\}$ однозначно разбивается на цепочки соединимых, причем порядок следования последних в цепочке тоже однозначно определен.

Пусть блоки $\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_{l_1},\dots,\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_{l_n}$ образуют цепочку соединимых блоков и выполнены соотношения $\rho_{l_1}^+ \sim \rho_{l_2}^-, \rho_{l_2}^+ \sim \rho_{l_3}^-,\dots,\rho_{l_{n-1}}^+ \sim \rho_{l_n}^-$ (для другого порядка соединения в цепочку рассуждения вполне аналогичны). Тогда существует набор изоморфизмов $\mathbf{Y}_{l_i l_{i+1}} : \mathfrak{P}_{l_{i+1}} \to \mathfrak{P}_{l_i}$ таких, что выполняются равенства

$$\left[UE_\gamma U^{-1}\right]_{l_i}(\epsilon_{l_i}) = \mathbf{Y}_{l_i l_{i+1}}\left(\left[UE_\gamma U^{-1}\right]_{l_{i+1}}(0)\right), \quad \gamma \in \Sigma.$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{Y}_{l_1 l_i} := \mathbf{Y}_{l_1 l_2} \dots \mathbf{Y}_{l_{i-1} l_i}, \quad r_i(r) := r - \epsilon_{l_1} - \dots - \epsilon_{l_{i-1}}, \qquad i = 2,\dots,n.$$

Соединением цепочки блоков $\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_{l_1},\ldots,\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_{l_n}$ будем называть алгебру $\left[UE_\gamma U^{-1}\right]_{l_1\ldots l_n}$, определяемую равенством

$$\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_{l_1\ldots l_n} := \vee\{E_\gamma^{l_1\ldots l_n}\mid \gamma\in\Sigma\}\subset C([0,\epsilon_{l_1}+\cdots+\epsilon_{l_n}];\mathfrak{P}_{l_1}) \quad (4.6)$$

с матрицами-функциями

$$E_\gamma^{l_1\ldots l_n}:(r)=\begin{cases}\left[UE_\gamma U^{-1}\right]_{l_1}(r), & r\in[0,\epsilon_{l_1});\\ \mathbf{Y}_{l_1l_2}\left[UE_\gamma U^{-1}\right]_{l_2}(r_2(r)), & r_2(r)\in[0,\epsilon_{l_2});\\ \cdots & \\ \mathbf{Y}_{l_1l_n}\left[UE_\gamma U^{-1}\right]_{l_n}(r_n(r)), & r_n(r)\in[0,\epsilon_{l_n}].\end{cases}.$$

Эта функция есть часть эйконала E_γ (в параметрическом представлении), отвечающая новому (укрупненному) блоку, образованному соединением блоков $\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_{l_1},\ldots,\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_{l_n}$. Также легко проследить, что соединение приводит к представлению

$$E_\gamma^{l_1\ldots l_n}(r)=\sum_{k=1}^{n_\gamma}\tau_\gamma^k(r)P_\gamma^k,$$

в котором $n_\gamma := n_{\gamma l_1}=\cdots=n_{\gamma l_n}$, $P_\gamma^k := P_{\gamma l_1}^k$, а функции τ_γ^k являются продолжениями линейных функций $\tau_{\gamma l_1}^k$, $k=1,\ldots,n_\gamma$ на больший (общий) сегмент $[0,\epsilon_{l_1}+\ldots,+\epsilon_{l_n}]$. При этом возможное различие между соединением $\left[U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right]_{l_1\ldots l_n}$ и алгеброй, в которую оно вкладывается (см. (4.6)), опять состоит в том, что элементы соединения могут удовлетворять дополнительным условиям на концах общего сегмента, в то время как у элементов алгебры $C([0,\epsilon_{l_1}+\cdots+\epsilon_{l_n}];\mathfrak{P}_{l_1})$ они отсутствуют.

Каноническая форма. • Выполнив все возможные соединения цепочек, мы представим алгебру эконалов в виде суммы блоков вида $\left[UE_\gamma U^{-1}\right]_{l_1\ldots l_n}$, которые уже не соединимы и в адекватном смысле независимы [4]. Воспользовавшись соотношениями $\mathfrak{P}_l\cong\mathbb{M}^{\kappa_l}$ получаем, что итогом такого "переформатирования" исходного параметрического представления является следующий результат, составляющий главное содержание работы [4].

Теорема 1. *Существует изоморфизм* $\mathbf{I}$, *доставляющий алгебре* $\mathfrak{E}_\Sigma$ *и ее образующим-эйконалам представление*

$$\mathbf{I}\mathfrak{E}_\Sigma = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \dot{C}([0,\varepsilon_l];\mathbb{M}^{\kappa_l}); \quad \mathbf{I}E_\gamma = \oplus \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[\sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau^k_{\gamma l} P^k_{\gamma l}\right], \ \gamma \in \Sigma\,. \qquad (4.7)$$

В нем $\tau^k_{\gamma l}$ *суть линейные функции от* $r_l \in [0,\varepsilon_l]$, *такие, что* $\left|\frac{d\tau^k_{\gamma l}}{dr_l}\right| = 1$. *Их области значений* $\psi^k_{\gamma l} := \operatorname{ran}\tau^k_{\gamma l}$ *суть сегменты длины* ε_l, *которые могут иметь при одинаковых* γ *и различных* k, l *разве что общие концы. При этом для всех* $\gamma \in \Sigma$ *выполнено равенство*

$$\sigma_{\rm ac}(E_\gamma) = \bigcup_{l=1}^{\mathcal{L}} \bigcup_{k=1}^{n_{\gamma l}} \psi^k_{\gamma l}\,.$$

Матрицы $P^k_{\gamma l} \in \mathbb{M}^{\kappa_l}$ *суть одномерные проекторы, попарно ортогональные для каждого* γ *и такие, что выполнено* $\vee\{P^k_{\gamma l} \mid k = 1, \dots, n_{\gamma l};\ \gamma \in \Sigma\} = \mathbb{M}^{\kappa_l}$.

Изоморфную копию $\mathbf{I}\mathfrak{E}_\Sigma$ алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma$ мы называем ее *первой канонической формой*. Переход к ней выявляет блочную структуру алгебры эйконалов.

Представление алгебры эйконалов в форме (4.7) не единственно, но можно показать, что любые два таких представления отличаются друг от друга лишь нумерацией блоков, их параметризацией (направлением изменения r_l) и заменами $P^k_{\gamma l} \to I_l P^k_{\gamma l}$ где $I_l : \mathbb{M}^{\kappa_l} \to \mathbb{M}^{\kappa_l}$ – изоморфизм. Функции $\tau^k_{\gamma l}$ во всех представлениях одни и те же, т.е. являются *инвариантами* алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma$. Позже это позволит использовать их в качестве координат на ее спектре.

• Напомним, что все рассмотрения проведены в предположении, что финальный момент времени $t = T$ в динамической системе (2.3)–(2.6) фиксирован. С его увеличением структура представлений (4.7) меняется. Существенные изменения происходят при тех T, при которых волны, идущие от управляющих вершин $\gamma \in \Sigma$, захватывают новые (внутренние или граничные) вершины: см. [3, 9]. Эволюция алгебры эйконалов со временем – отдельная интересная тема.

Координаты на спектре. • В силу (4.7) и по Предложению 3, спектр алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma$ есть объединение спектров отдельных стандартных алгебр $\dot{C}([0,\varepsilon_l];\mathbb{M}^{\kappa_l})$:

$$\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma} = \mathcal{S}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{S}_{\mathcal{L}}$$

(см. (3.2), (3.4)). Каждая компонента (*сегмент*) $\mathcal{S}_l$ состоит из множества (*интервала*) $\operatorname{int}\mathcal{S}_l$, содержащего точки, которые имеют окрестности, гомеоморфные открытым интервалам в $\mathbb{R}$ (мы называем их *внутренними*), и двух *границ* $\mathcal{K}_l^-$ и $\mathcal{K}_l^+$:

$$\mathcal{S}_l = \mathcal{K}_l^- \sqcup \operatorname{int}\mathcal{S}_l \sqcup \mathcal{K}_l^+.$$

Множества $\operatorname{int}\mathcal{S}_l$ гомеоморфны соответствующим интервалам $(0,\varepsilon_l)$. Через $\operatorname{int}\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma}$ обозначается множество всех внутренних точек спектра. Границы $\mathcal{K}_l^\pm$ состоят из конечного числа точек. Мы говорим, что граница есть *кластер*, если она содержит более одной точки. Точки, составляющие кластер, неотделимы друг от друга в топологии Джекобсона [1].

Интервалы $\operatorname{int}\mathcal{S}_l$ можно метризовать. Как легко видеть из второго представления в (4.7), каждой точке $\hat\pi \in \operatorname{int}\mathcal{S}_l$ отвечает единственное значение параметра $r \in (0,\varepsilon_l)$. Определение

$$\delta(\hat\pi,\hat\pi') := |r-r'|, \qquad \hat\pi,\hat\pi' \in \operatorname{int}\mathcal{S}_l \tag{4.8}$$

задает на интервале естественную метрику. По непрерывности можно определить и расстояние между точкой границы и внутренней точкой. Однако, при этом расстояния (4.8) между точками, входящими в один кластер, окажутся нулевыми, поскольку всем им отвечает одинаковое $r=0$ или $r=\varepsilon_l$.

• Приведем известный факт, мотивирующий последующие рассмотрения (см. [13]). Пусть $\mathfrak{A}$ есть *коммутативная* банахова алгебра с конечным числом образующих $E_1,\dots,E_n$, $\widehat{\mathfrak{A}}$ – ее спектр, состоящий из гомоморфизмов (характеров) $\pi:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$. Тогда соответствие

$$\widehat{\mathfrak{A}} \ni \pi \mapsto \{\pi(E_1),\dots,\pi(E_n)\} \in \mathbb{C}^n \tag{4.9}$$

доставляет координатизацию спектра.

Приведем аналог таких координат на спектре алгебры эйконалов. Технически он более сложен, что вполне ожидаемо, поскольку $\mathfrak{E}_\Sigma$ *некоммутативна*.

• Пусть $\hat\pi \in \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma$ есть произвольная точка спектра алгебры эйконалов, а $\pi \in \hat\pi$ – некторый ее представитель (неприводимое представление в гильбертовом пространстве H_π). Для каждой вершины $\gamma \in \Sigma$ определим оператор $e_\gamma(\pi)$ равенством

$$e_\gamma(\pi) := \pi(E_\gamma) \in \mathfrak{B}(H_\pi)\,;$$

пусть $\sigma^+(e_\gamma(\pi))$ есть множество его положительных собственных значений. При этом выполнено равенство

$$\sigma^+(e_\gamma(\pi)) = \sigma^+(e_\gamma(\pi')) \tag{4.10}$$

для любых представлений $\pi, \pi' \in \hat{\pi}$ из одного класса эквивалетности.

Пусть $\hat{\pi} \in \mathrm{int}\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma}$ есть внутренняя точка спектра. Для нее определим $\gamma-$*координаты* равенством

$$\sigma_\gamma(\hat{\pi}) := \sigma^+(e_\gamma(\pi)), \qquad \pi \in \hat{\pi}\,;$$

корректность определения следует из (4.10). Из второго представления в (4.7) и свойств входящих в него функций $\tau^k_{\gamma l}$ легко видеть, что выбранной точке $\hat{\pi}$ отвечают единственные номер l и параметр $r \in (0, \varepsilon_l)$ такие, что выполнено равенство

$$\sigma_\gamma(\hat{\pi}) = \{\tau^1_{\gamma l}(r), \ldots, \tau^{n_{\gamma l}}_{\gamma l}(r)\}.$$

Для точек границ $\hat{\pi} \in \mathcal{K}^\pm_l$ примем по непрерывности:

$$\sigma_\gamma(\hat{\pi}) := \left\{\lim_{r\to c}\tau^1_{\gamma l}(r),\, \ldots,\, \lim_{r\to c}\tau^{n_{\gamma l}}_{\gamma l}(r)\right\}, \qquad c = 0, \varepsilon_l\,. \tag{4.11}$$

Заметим, что если граничное множество есть кластер, то всем составляющим его точкам будет приписан *один и тот же* числовой набор (4.11).

Соответствие

$$\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma \ni \hat{\pi} \mapsto \{\sigma_\gamma(\hat{\pi}) \mid \gamma \in \Sigma\} \tag{4.12}$$

предлагается в качестве обобщения (4.9) на случай *некоммутативной* алгебры эйконалов.

Следует оговорить, что наборы в правой части (4.12) не являются координатами в строгом смысле слова: как было отмечено, они различают внутренние точки спектра, но не различают точки, входящие в один кластер. Тем не менее, они полезны, так как координатизируют множество $\mathrm{int}\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma}$ – основную часть спектра алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma$.

Фрейм $\mathfrak{F}^{\mathrm{a}}_\Sigma$. Здесь мы введем некоторое отношение эквивалентности для точек $\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma$. Факторизация (склейка) спектра по этому отношению превратит его в граф.

• Определим на $\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma$ отношение $\sim_0$ по следующему правилу: $\hat{\pi} \sim_0 \hat{\pi}'$, если существует вершина $\gamma \in \Sigma$ такая, что $\sigma_\gamma(\hat{\pi}) \cap \sigma_\gamma(\hat{\pi}') \neq \emptyset$. Пусть $\sim$ есть транзитивное замыкание $\sim_0$, а $[\hat{\pi}]$ – класс эквивалентности точки спектра $\hat{\pi}$.

Предложение 4. *Пусть* $\hat\pi \in \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma$ *есть точка спектра,* $[\hat\pi]$ *– ее класс эквивалентности. Тогда*:
1. *если* $\hat\pi \in \operatorname{int}\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma$ *– внутренняя точка, то* $[\hat\pi] = \{\hat\pi\}$*, т.е. ее класс эквивалентности исчерпывается самой точкой;*
2. *если* $\hat\pi \in \mathcal{K}_l^\pm$ *– точка граничного множества (возможно, кластера), то имеет место вложение* $\mathcal{K}_l^\pm \subset [\hat\pi] \subset \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma \setminus \operatorname{int}\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma$.

Часть 1 легко следует из свойств функций $\tau_{\gamma l}^k$ (см. Теорему 1), а именно, из дизъюнктности областей $\psi_{\gamma l}^k$. Вложение в части 2 прямо следует из определения эквивалентности, а разность $[\hat\pi] \setminus \mathcal{K}_l^\pm$ может состоять из точек других граничных множеств $\mathcal{K}_{l'}^\pm$, попавших в класс $[\hat\pi]$ при факторизации.

• Фактор-пространство $\mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{a}} := \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma/_\sim$ мы будем называть *алгебраическим фреймом* области $\Omega^T[\Sigma]$. Через $\operatorname{proj} : \widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma \to \mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{a}}$ обозначаем каноническую проекцию. Спектр оснащен топологией Джекобсона и, следовательно, на $\mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{a}}$ имеется каноническая фактор-топология.

Из Предложения 4 следует, что переход от спектра $\widehat{\mathfrak{E}}_\Sigma$ к фрейму $\mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{a}}$ сводится к соединению некоторых сегментов $\mathcal{S}_l$ путем отождествления точек их граничных множеств $\mathcal{K}_l^\pm$. Нехаусдорфовым пространством спектр делают кластеры, которые при факторизации склеиваются в точки. Как следствие, пространство $\mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{a}}$ оказывается *хаусдорфовым*, а каждая его компонента связности гомеоморфна некоторому *графу*, ребра которого суть $\operatorname{proj}(\operatorname{int}\mathcal{S}_l)$, а вершины – точки, образовавшиеся при склейке некоторых границ:

$$\mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{a}} = \mathcal{E}^{\mathrm{a}} \sqcup \mathcal{W}^{\mathrm{a}}; \quad \mathcal{E}^{\mathrm{a}} = \{\operatorname{proj}(\operatorname{int}\mathcal{S}_1), \dots, \operatorname{proj}(\operatorname{int}\mathcal{S}_{\mathcal{L}})\},$$
$$\mathcal{W}^{\mathrm{a}} = \{w_1, \dots, w_p\},\ w_k = \operatorname{proj}\mathcal{K}_{l_1}^{\alpha_1} = \ \dots\ = \operatorname{proj}\mathcal{K}_{l_k}^{\alpha_k}, \quad \alpha_k \in \{-,+\}.$$

Отметим, что при переходе от спектра к фрейму могут образоваться вершины валентности 2.

• Для упрощения записи, точки фрейма будем обозначать через $\boldsymbol{\pi} := [\hat\pi]$. Введем $\gamma-$координаты:

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\pi}) := \bigcup_{\hat\pi \in \boldsymbol{\pi}} \sigma_\gamma(\hat\pi) \in \mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{a}}$$

(объединение числовых наборов на общей числовой оси) и координатизируем весь фрейм по правилу

$$\mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{a}} \ni \boldsymbol{\pi} \mapsto \{\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\pi}) \mid \gamma \in \Sigma\}. \tag{4.13}$$

Из Предложения 4 легко следует, что наборы в правой части (4.13) различают *все* точки фрейма, т.е. являются полноценными координатами на $\mathfrak{F}_\Sigma$.

• Как следует из Предложения 4, на внутренние точки спектра проекция proj действует инъективно. Это позволяет метризовать ребра фрейма по правилу

$$\Delta(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') := \delta\left(\mathrm{proj}^{-1}(\boldsymbol{\pi}), \mathrm{proj}^{-1}(\boldsymbol{\pi}')\right)$$

(см. (4.8)), а затем, по аналогии с метрикой (2.1) на звездах, распространить метрику Δ на его вершины. В результате весь фрейм $\mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{a}}$ оказывается (возможно, несвязным) компактным *метрическим графом.*

• Итогом предыдущих рассмотрений оказывается примечательный факт: части графа Ω, заполненной волнами, по схеме

$$\Omega^T[\Sigma] \to \mathfrak{E}_\Sigma \to \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma} \to \mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{a}},$$

каноническим образом сопоставлен некоторый канонически координатизированный метрический граф – фрейм $\mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{a}}$, извлеченный из алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma$. Как легко видеть из Теоремы 1 и последующих замечаний, эта конструкция есть *инвариант* алгебры эйконалов: фреймы, отвечающие разным версиям представления (4.7) изометричны.

Функциональная модель. • Пусть представление (4.7) зафиксировано. Напомним, что тогда каждой точке спектра $\hat\pi \in \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma}$ приписано определенное значение параметра $r_{\hat\pi}$, принимающего значения в сегментах $[0, \varepsilon_l]$. При этом соответствие $\hat\pi \to r_{\hat\pi}$ инъективно на множестве внутренних точек $\operatorname{int}\mathfrak{E}_\Sigma$.

Пусть $[\mathbf{I}e]_l(\cdot) \in \dot C([0,\varepsilon_l]; \mathbb{M}^{\kappa_l})$ есть $l-$й блок элемента $\mathbf{I}e$ в форме (4.7). Для каждой точки $\hat\pi \in \operatorname{int}\mathcal{S}_l$ выберем представитель $\pi \in \hat\pi$, такой, что справедливо $\pi(e) = [\mathbf{I}e]_l(r_{\hat\pi})$. Для точек граничных множеств $\mathcal{K}_l^\pm$ зафиксируем их нумерацию $\mathcal{K}_l^\pm = \{\hat\pi_1^\pm, \dots, \hat\pi_{m_l^\pm}^\pm\}$ и представителей $\pi_k^\pm \in \hat\pi_k^\pm$ так, что выполняется равенство $\oplus \sum_{k=1}^{m_l^\pm} \pi_k^\pm(e) = [\mathbf{I}e]_l(c^\pm)$, $c^+ = \epsilon_l$, $c^- = 0$. Далее, матрицы-функции $\mathbf{I}e$ переносятся на спектр по правилу

$$e(\hat\pi) := \pi(e), \quad \pi \in \hat\pi \in \widehat{\mathfrak{E}_\Sigma},$$

где π есть представитель $\hat\pi$, опредеоенный выше.

Затем эти функции переносятся со спектра на фрейм $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$ по правилу

$$e(\boldsymbol{\pi}) := \begin{cases} e(\mathrm{proj}^{-1}(\boldsymbol{\pi})), & \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{E}^{\rm a}; \\ \oplus \sum\limits_{\hat{\pi}_k \in \mathrm{proj}^{-1}(\boldsymbol{\pi})} e(\hat{\pi}_k), & \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{W}^{\rm a}. \end{cases} \tag{4.14}$$

Во второй строчке в (4.14) стоит матрица, скомпонованная из блоков, расположенных в некотором порядке. Порядок не принципиален, но предполагается, что для каждого $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{W}^{\rm a}$ выбор порядка произведен.

В результате алгебра эйконалов реализуется как алгебра матричнозначных функций на алгебраическом фрейме. Эти функции непрерывны на его ребрах и, вообще говоря, разрывны в вершинах.

• Описанную выше конструкцию можно интерпретировать как расслоение C*-алгебр над базой $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$, а функции (4.14) – как его сечения [7, 11]. Можно показать, что эти сечения обладают дополнительным свойством – *полунепрерывностью*: см. [11].

§5. Вторая каноническая форма

Приведение алгебры эйконалов ко второй форме отправляется от той же исходной параметрической формы (3.14), (3.16).

Разбиение на блоки. • Напомним, что входящие в параметрическую форму проекторы $P^i_{\gamma j}$ суть одномерные проекторы в $\mathbf{l}^j_2$. В базисе индикаторов они приобретают вид

$$P^i_{\gamma j} = (\,\cdot\,, \beta^i_{\gamma j})_{\mathbf{l}^j_2}\, \beta^i_{\gamma j}, \quad \text{где} \quad \beta^i_{\gamma j} = \sum_{l=1}^{m_j} \beta^{il}_{\gamma j}\, \chi_k \in \mathbf{l}^j_2, \quad (\beta^i_{\gamma j}, \beta^k_{\gamma j})_{\mathbf{l}^j_2} = \delta_{ik},$$

и матрицы $\check{p}^i_{\gamma j} = \left\{\beta^{il}_{\gamma j}\beta^{il'}_{\gamma j}\right\}_{l,l'=1}^{m_j} \in \mathbb{M}^{m_j}$. Как и проекторы $P^i_{\gamma j}$, представляющие их векторы $\beta^i_{\gamma j} \in \mathbf{l}^j_2$ не зависят от r_j. Если рассматривать элементы пространства $\mathbf{l}^j_2$ как числовые функции на множестве $\Lambda[x(r)] \subset \Phi^j$ (см. (3.11)), то для каждого вектора определен его *носитель* $\mathrm{supp}\,\beta^i_{\gamma j} \subset \Lambda[x(r)]$. Определение корректно, поскольку проекторы $P^i_{\gamma j}$, а с ними и векторы $\beta^i_{\gamma j}$, не зависят от $r \in (0, \epsilon_j)$. Отметим равносильность

$$\mathrm{supp}\,\beta^i_{\gamma j} \cap \mathrm{supp}\,\beta^{i'}_{\gamma' j} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{l=1}^{m_j} |\beta^{il}_{\gamma j}|\,|\beta^{i'l}_{\gamma' j}| \neq 0, \qquad \gamma, \gamma' \in \Sigma$$

и примем по определению: $\mathrm{supp}\, P^i_{\gamma j} := \mathrm{supp}\,\beta^i_{\gamma j}$.

• Определим на каждом наборе проекторов $\mathbb{P}^j$ (см.(3.15)) отношение $\overset{\text{supp}}{\sim}_0$ по правилу: $P^i_{\gamma j} \overset{\text{supp}}{\sim}_0 P^{i'}_{\gamma' j}$, если $\operatorname{supp} P^i_{\gamma j} \cap \operatorname{supp} P^{i'}_{\gamma' j} \neq \emptyset$. Через $\overset{\text{supp}}{\sim}$ обозначим его транзитивное замыкание.

Пусть $\langle P\rangle$ есть класс эквивалентности проектора $P \in \mathbb{P}^j$ по отношению $\overset{\text{supp}}{\sim}$. Из определения отношения $\overset{\text{supp}}{\sim}$ легко следует, что разбиению

$$\mathbb{P}^j = \langle P\rangle^j_1 \cup \dots \cup \langle P\rangle^j_{q_j} \tag{5.1}$$

отвечает разложение алгебры $\mathfrak{P}^j = \vee\mathbb{P}^j$ на ортогональные блоки:

$$\mathfrak{P}^j = \bigoplus_{q=1}^{q_j} \mathfrak{Q}^j_q, \qquad \mathfrak{Q}^j_q := \vee\langle P\rangle^j_q. \tag{5.2}$$

• Представления (5.1) и (5.2) полезно сравнить с (4.1) и (4.2): если алгебры $\mathfrak{P}^j_p \cong \mathbb{M}^{\kappa^j_p}$ неприводимы, то неприводимость $\mathfrak{Q}^j_q$, вообще говоря, не гарантирована. В то же время, можно показать [10], что представление (5.1) отвечает разбиению

$$\Lambda[x(r)] \,=\, \Lambda^j_1[x(r)] \cup \ldots \cup \Lambda^j_{q_j}[x(r)] \subset \Phi^j$$

на *минимальные* множества определенности

$$\Lambda^j_q[x(r)] = \{x^{j,q}_1(r), \dots, x^{j,q}_{s_q}(r)\},$$

т.е. на наименьшие (по количеству точек) множества со свойством (3.5). Соответственно, происходит распадение семейств на подсемейства:

$$\Phi^j = \Phi^j_1 \cup \dots \cup \Phi^j_{q_j},\ \Phi^j_q = \bigcup_{0<r<\epsilon_j} \Lambda^j_q[x(r)] = \bigcup_{s=1}^{s_q} \omega^j_{k(s)},\ \omega^j_{k(s)} = \bigcup_{0<r<\epsilon_j} x^{j,q}_{k(s)}(r)\,. \tag{5.3}$$

Имея ввиду последнее, можно сказать, что разбиение (5.1), в отличие от (4.1), имеет геометрический смысл: ему соответствует разбиение графа

$$\overline{\Omega^T[\Sigma]} = \left[\bigcup_{\substack{j=1,\dots,\dots,J;\\ q=1,\dots,q_j}} \Phi^j_q\right] \cup \Theta\,.$$

При этом, по построению представления (5.3), выполнено

$$L_2(\overline{\Omega^T[\Sigma]}) = \bigoplus_{j=1}^{J}\sum_{q=1}^{q_j} L_2(\Phi^j_q); \quad E_\gamma L_2(\Phi^j_q) \subset L_2(\Phi^j_q),\ \ \gamma \in \Sigma\,. \tag{5.4}$$

• В соответствии с (5.4), блоки эйконалов в (3.16) распадаются на подблоки:

$$
\begin{aligned}
&\left[UE_\gamma U^{-1}\right]^j = \bigoplus_{q=1}^{q_j} \left\langle UE_\gamma U^{-1}\right\rangle_q^j, \\
&\left\langle UE_\gamma U^{-1}\right\rangle_q^j = \sum_{P_{\gamma j}^i \in \langle P\rangle_q^j} \tau_{\gamma j}^i(\cdot_j) P_{\gamma j}^i \in C\left([0,\epsilon_j]; \mathfrak{Q}_q^j\right),
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

а для алгебры эйконалов выполнено соотношение

$$
U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1} \subset \bigoplus_{j=1}^{J}\left[\bigoplus_{q=1}^{q_j} C\left([0,\epsilon_j]; \mathfrak{Q}_q^j\right)\right].
$$

Упрощая обозначения, перейдем к сквозной нумерации:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1^1,\dots,\Phi_{q_1}^1;\ \dots\ \dots;\ \Phi_1^J,\dots,\Phi_{q_J}^J \quad\to\quad \Phi_1,\ \dots,\Phi_M\,;\\
&\Lambda_1^1,\dots,\Lambda_{q_1}^1;\ \dots\ \dots;\ \Lambda_1^J,\dots,\Lambda_{q_J}^J \quad\to\quad \Lambda_1,\ \dots,\Lambda_M\,;\\
&\langle P\rangle_1^1,\dots,\langle P\rangle_{q_1}^1;\ \dots\ \dots;\ \langle P\rangle_1^J,\dots,\langle P\rangle_{q_J}^J \quad\to\quad \langle P\rangle_1,\ \dots,\langle P\rangle_M\,;\\
&\langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_1^1,\dots,\langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_{q_1}^1;\ \dots\ \dots;\ \langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_1^J,\dots,\langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_{q_J}^J\\
&\ \to \langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_1,\ \dots,\langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_M, \quad \gamma\in\Sigma\,;\\
&\mathfrak{Q}_1^1,\dots,\mathfrak{Q}_{q_1}^1;\ \dots\ \dots;\ \mathfrak{Q}_1^J,\dots,\mathfrak{Q}_{q_J}^J \quad\to\quad \mathfrak{Q}_1,\ \dots,\mathfrak{Q}_M\,;\\
&\epsilon_1,\dots,\epsilon_{m_1};\dots\ \dots;\epsilon_{J-m_J},\dots,\epsilon_J \quad\to\quad \epsilon_1,\dots,\epsilon_M.
\end{aligned}
$$

В новых обозначениях имеем:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\Omega^T[\Sigma]} = \left[\bigcup_{l=1}^{M}\Phi_l\right]\cup\Theta; \quad \Phi_l = \bigcup_{0<r<\epsilon_l}\Lambda_l[x(r)] = \bigcup_{s=1}^{m_l}\omega_{ls}, \quad \Lambda_l[x(r)]\\
&\quad = \{x_1^l(r),\dots,x_{m_l}^l(r)\}, \quad \omega_{ls} = \bigcup_{0<r<\epsilon_l} x_s^l(r)\,;
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1} \subset \bigoplus_{l=1}^{M} C\left([0,\epsilon_l];\mathfrak{Q}_l\right); \quad \mathrm{pr}_l\, U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1} =: \langle U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\rangle_l\\
&\quad = \vee\left\{\langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_l \;\middle|\; \gamma\in\Sigma\right\}, \ \ \langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_l\\
&\quad = \sum_{P_{\gamma l}^k\in\langle P\rangle_l} \tau_{\gamma l}^k(\cdot_l) P_{\gamma l}^k \in C\left([0,\epsilon_l],\mathfrak{Q}_l\right).
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Соединение семейств. Соединение семейств это процедура, аналогичная соединению блоков при переходе к первой форме. Важное отличие в том, что теперь все шаги сохраняют связь с геометрией и, в итоге, второй форме будет соответствовать новое разбиение графа $\overline{\Omega^T[\Sigma]}$ на семейства Φ. Новые семейства, вообще говоря, состоят из более крупных клеток и выделены тем, что они заметаются *минимальными* $\Lambda_l[x(r)]$ при вариациях параметра r: см. (5.6).

• С изменением r, множества $\Lambda_l[x(r)] = \{x^l_1(r), \dots, x^l_{m_l}(r)\}$ непрерывно меняют положение на графе. При выходе параметра на крайние значения 0 или ϵ_l, они переходят в предельные множества $\Lambda_l[x(0)]$, $\Lambda_l[x(\epsilon_l)] \subset \Theta'$ состоящие из границ $x^l_s(0)$, $x^l_s(\epsilon_l)$ клеток $\omega_{ls} \subset \Phi_l$.

Для элементов $UeU^{-1} \in \langle U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\rangle_l \subset C\left([0,\epsilon_l];\mathfrak{Q}_l\right)$ определим *граничные представления* $\rho^\pm_l : \mathfrak{E}_\Sigma \to \mathfrak{Q}_l$:

$$\rho^-_l(e) := \left\langle UeU^{-1}\right\rangle_l(0), \quad \rho^+_l(e) := \left\langle UeU^{-1}\right\rangle_l(\epsilon_l); \qquad l = 1,\dots,M.$$

Как и представления (4.5), они, вообще говоря, могут быть приводимыми, а представления ρ^-_l и ρ^+_l, отвечающие одному блоку, не эквивалентны.

• Пусть Φ_l и $\Phi_{l'}$ суть два семейства, состоящие из равного числа клеток: $m_l = m_{l'} =: m_{ll'}$. Будем говорить, что они допускают соединение, если

1. при некоторой их параметризации выполнено $\Lambda_l[x(\epsilon_l)] = \Lambda_{l'}[x(0)]$, причем $\#\Lambda_l[x(\epsilon_l)] = \#\Lambda_{l'}[x(0)] = m_{ll'}$;

2. при согласованным образом выбранной нумерации клеток, корректно определена биекция $\Lambda_l[x(\epsilon_l)] \leftrightarrow \Lambda_{l'}[x(0)]$, задаваемая условием $x^l_s(\epsilon_l) = x^{l'}_s(0)$, $s = 1,\dots,m_{ll'}$. Она задает унитарный оператор $V_{ll'} : \mathbf{l}^l_2 \to \mathbf{l}^{l'}_2$, $V_{ll'}\chi^l_s = \chi^{l'}_s$, $s = 1,\dots,m_{ll'}$ сплетающий граничные представления: $V_{ll'}\rho^+_l = \rho^-_{l'}V_{ll'}$ (чем устанавливается их эквивалентность).

В этом случае клетки $\omega_{ls} \subset \Phi_l$ и $\omega_{l's} \subset \Phi_{l'}$ стыкуются попарно на графе через общие границы $x^l_s(\epsilon_l) = x^{l'}_s(0)$. Такую связь клеток будем обозначать $\omega_{ls} \leftrightarrow \omega_{l's}$ Несложно видеть, что полный набор семейств $\{\Phi_l |\ l = 1,\dots,M\}$ разбивается на цепочки соединимых.

Пусть $\Phi_{l_1},\dots,\Phi_{l_n}$ образуют цепочку соединимых семейств и выполнены соотношения $\rho^+_{l_1} \sim \rho^-_{l_2}$, $\rho^+_{l_2} \sim \rho^-_{l_3},\dots,$ $\rho^+_{l_{n-1}} \sim \rho^-_{l_n}$ (для другого порядка соединения в цепочку рассуждения вполне аналогичны). Тем самым заданы цепочки клеток:

$$\omega^{l_1}_s \leftrightarrow \omega^{l_2}_s \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \omega^{l_{n-1}}_s \leftrightarrow \omega^{l_n}_s, \quad s = 1,\dots,m_{l_1\dots l_n},$$

где $m_{l_1\dots l_n} := m_{l_1} = \dots = m_{l_n}$. Определим клетки $\omega_s^{l_1\dots l_n}$ равенствами:

$$\omega_s^{l_1\dots l_n} := \omega_s^{l_1} \cup \overline{\omega_s^{l_2}} \cup \dots \cup \overline{\omega_s^{l_{n-1}}} \cup \omega_s^{l_n}, \quad s = 1, \dots, m_{l_1\dots l_n}.$$

Соединением семейств $\Phi_{l_1}, \dots, \Phi_{l_n}$ будем называть множество $\Phi_{l_1\dots l_n}$:

$$\Phi_{l_1\dots l_n} := \bigcup_{i=1}^{m_{l_1\dots l_n}} \omega_i^{l_1\dots l_n};$$

Несложно заметить, что $\Phi_{l_1\dots l_n}$ также является семейством, а из инвариантности пространств $L_2(\Phi_l)$ для эйконалов в (5.4) следует инвариантность $E_\gamma L_2(\Phi_{l_1\dots l_n}) \subset L_2(\Phi_{l_1\dots l_n})$, $\gamma \in \Sigma$. Прослеживая процедуру соединения, нетрудно проверить, что значения функций $\tau^i_{\gamma j}$, отвечающих блокам $\langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_{l_1}, \dots, \langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_{l_n}$ в представлении эйконалов (5.5), адекватно стыкуются на границах клеток $\omega_{l_1 s}, \dots, \omega_{l_n s}$ образуя линейные функции $\tau^s_{\gamma l_1\dots l_n}$ на новых клетках $\omega_{l_1\dots l_n, s}$. Из эквивалентности граничных представлений следует, что проекторы $P^i_{\gamma j}$, отвечающие блокам $\langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_{l_1}, \dots, \langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_{l_n}$, последовательно сплетаются операторами $V_{l_i l_{i+1}}$ и, следовательно, имеют одинаковые матрицы $\check{p}^s_{\gamma l_1\dots l_n}$ в соответствующих базисах индикаторов.

В результате, во всех предыдущих представлениях, место цепочки блоков $\langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_{l_1}, \dots, \langle UE_\gamma U^{-1}\rangle_{l_n}$ занимает один блок

$$\langle U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\rangle_{l_1\dots l_n},$$

полученный их соединением. Повторяя эту процедуру для всех цепочек соединимых блоков, мы приходим к разбиению заполненной волнами области $\Omega^T[\Sigma]$ на семейства, *более не допускающие соединений*:

$$\overline{\Omega^T[\Sigma]} = \left[\bigcup_{l=1}^{\mathcal{M}} \Phi'_l\right] \cup \Theta'; \quad \Phi'_l = \bigcup_{0<r<\epsilon'_l} \Lambda'_l[x'(r)] = \bigcup_{s=1}^{m'_l} \omega'_{ls}, \quad \Lambda'_l[x'(r)]$$
$$= \{{x'}^l_1(r), \dots, {x'}^l_{m'_l}(r)\}, \quad \omega'_{ls} = \bigcup_{0<r<\epsilon'_l} {x'}^l_s(r)\,. \tag{5.8}$$

Здесь $\Lambda'_l[x(r)]$ суть минимальные множества определенности, что дает повод называть разбиение (5.8) *оптимальным*.

Как легко видеть, оптимальное разбиение приводит эйконалы:

$$E_\gamma L_2(\Phi'_l) \subset L_2(\Phi'_l)$$

выполнено для всех $\gamma \in \Sigma$.

Геометрическая форма. Итогом предыдущих рассмотрений является следующий аналог Теоремы 1.

Теорема 2. *Оптимальному разбиению отвечает представление алгебры эйконалов в виде*

$$U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1} \subset \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{M}} C\left([0,\epsilon'_l];\mathfrak{Q}'_l\right); \quad \mathrm{pr}_l\, U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1} = \left\langle U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right\rangle'_l =$$

$$= \vee\left\{\left\langle UE_\gamma U^{-1}\right\rangle'_l \mid \gamma\in\Sigma\right\}, \quad \left\langle UE_\gamma U^{-1}\right\rangle'_l = \sum_{s=1}^{n'_{\gamma l}} {\tau'}^s_{\gamma l}(\cdot_l){P'}^s_{\gamma l}\,,$$

$$UE_\gamma U^{-1} = \oplus\sum_{l=1}^{\mathcal{M}}\left\langle UE_\gamma U^{-1}\right\rangle'_l \tag{5.9}$$

с блоками $\left\langle U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1}\right\rangle'_l \subset C\left([0,\epsilon'_l];\mathfrak{Q}'_l\right)$. *Функции* ${\tau'}^s_{\gamma l}$ *суть линейные функции от* $r_l\in[0,\epsilon'_l]$, *такие, что* $\left|\frac{d{\tau'}^s_{\gamma l}}{dr_l}\right| = 1$. *Их области значений* $\xi^s_{\gamma l} := \mathrm{ran}\,{\tau'}^s_{\gamma l}$ *суть сегменты длины* ϵ'_l, *которые могут иметь при одинаковых* γ *и различных* s, l *разве что общие концы. При этом для всех* $\gamma\in\Sigma$ *выполнено равенство*

$$\sigma_{\rm ac}(E_\gamma) = \bigcup_{l=1}^{\mathcal{M}}\bigcup_{s=1}^{n'_{\gamma l}}\xi^s_{\gamma l}\,.$$

Матрицы ${P'}^s_{\gamma l}\in\mathfrak{Q}'_l$ *суть одномерные проекторы, попарно ортогональные для каждого* γ *и такие, что выполнено* $\vee\{{P'}^s_{\gamma l},\, k=1,\dots,n_{\gamma l}\ ;\ \gamma\in\Sigma\} = \mathfrak{Q}'_l$.

О представлении (5.9) мы будем говорить как о *геометрической форме* алгебры эйконалов.

Фрейм $\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma$. Дальнейшие рассмотрения относятся к оптимальному разбиению (5.8) и отвечающей ему геометрической форме (5.9). Упрощая обозначения, мы убираем штрихи: $\Phi'_l =: \Phi_l$, $\Lambda'_l =: \Lambda_l$ и т.д.

- Каждая точка $x = x(r)\in\Phi_l$ входит в свое минимальное множество $\Lambda_l[x(r)] = \{x^l_1(r),\dots,x^l_{m_l}(r)\}$. Каждому семейству Φ_l сопоставлены *границы*

$$\Lambda^-_l := \lim_{r\to 0}\Lambda_l[x(r)], \quad \Lambda^+_l := \lim_{r\to\epsilon_l}\Lambda_l[x(r)].$$

Из (5.8) имеем:

$$\Theta = \bigcup_{l=1}^{\mathcal{M}} \left[\Lambda_l^- \cup \Lambda_l^+\right]. \tag{5.10}$$

На множестве всех границ $\{\Lambda = \Lambda_l^\pm \mid l = 1, \ldots, \mathcal{M}\}$ введем отношение $\sim_0$: $\Lambda \sim_0 \Lambda'$, если $\Lambda \cap \Lambda' \neq \emptyset$. Пусть $\sim$ есть транзитивное замыкание $\sim_0$, а $[\Lambda]$ – класс эквивалентности по $\sim$. Представление (5.10) преобразуется в разбиение:

$$\Theta = [\Lambda]_1 \cup \cdots \cup [\Lambda]_K.$$

Совокупность классов

$$\mathcal{W}^{\mathrm{g}} := \{w_1, \ldots, w_K\}, \quad w_k := [\Lambda]_k$$

будет играть роль множества *вершин* конструируемого фрейма. Оговоримся, что и в нем возможны вершины валентности 2.

• Скажем, что семейство Φ_l примыкает к вершине $w = [\Lambda]$, если одна из его границ $\Lambda_l^\pm$ содержится в $[\Lambda]$. Отождествляя точки

$$x_1^l(r), \ldots, x_{m_l}^l(r),$$

составляющие множество $\Lambda[x(r)] \subset \Phi_l$, превратим семейство в *ребро*

$$\lambda_l := \{\lambda_l(r) \mid 0 < r < \epsilon_l\}, \quad \lambda_l(r) := x_1^l(r) \equiv \cdots \equiv x_{m_l}^l(r),$$

примыкающее к вершине w. К каждой вершине примыкает свой набор ребер $\lambda_{i_1} \ldots, \lambda_{i_{d_w}}$; число d_w есть ее *валентность*. Через $\mathcal{E}^{\mathrm{g}} := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mathcal{M}}\}$ обозначим совокупность ребер.

Ребра метризованы: $\operatorname{dist}(\lambda_l(r), \lambda_l(r')) := |r - r'|$, и оснащены γ-координатами:

$$\sigma_\gamma(\lambda(r)) := \{\tau_{\gamma l}^1(r), \ldots, \tau_{\gamma l}^{n_{\gamma l}}(r)\}, \quad \gamma \in \Sigma \tag{5.11}$$

(см. (5.9)).

• Множество $\mathfrak{F}_\Sigma^{\mathrm{g}} := \mathcal{W}^{\mathrm{g}} \sqcup \mathcal{E}^{\mathrm{g}}$ мы называем *геометрическим фреймом* области $\Omega^T[\Sigma]$.

Тем же приемом (2.1), который оснащает метрикой звезды, метрика с ребер распространяется на весь фрейм, превращая его в метрический граф.

Ребра снабжены координатами (5.11); для вершин положим

$$\sigma_\gamma(w) := \bigcup_{\lambda_l \text{ примыкает к } w} \lim_{\lambda_l(r) \to w} \sigma_\gamma(\lambda(r)), \quad \gamma \in \Sigma$$

(объединение числовых наборов на общей числовой оси).

В итоге, фрейм $\mathfrak{F}^{\mathrm{g}}_{\Sigma}$ координатизирован:

$$\mathfrak{F}^{\mathrm{g}}_{\Sigma} \ni \lambda \mapsto \{\sigma_\gamma(\lambda) \mid \gamma \in \Sigma\}. \tag{5.12}$$

• Вполне аналогично тому, как это сделано при построении функциональной модели на фрейме $\mathfrak{F}^{\mathrm{a}}_{\Sigma}$, матрично-значные функции, составляющие алгебру $U\mathfrak{E}_\Sigma U^{-1} \subset \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{M}} C\left([0,\epsilon_l];\mathfrak{Q}_l\right)$ (см. (5.9)), можно перенести на фрейм $\mathfrak{F}^{\mathrm{g}}_{\Sigma}$ и, таким образом, получить вторую функциональную модель алгебры эйконалов. Она соответствует оптимальному разбиению области $\Omega^T[\Sigma]$.

§6. Ординарные графы

Идентичность фреймов. • Прослеживая переход от общей параметрической формы (3.14) к каноническим формам, легко видеть, что к их возможному различию приводит несовпадение разбиений (4.1) и (5.1). Из определений следует $[P]^j_q \subset \langle P\rangle^j_q$, поэтому несовпадение возможно в том и только в случае, когда хотя бы один из классов $\langle P\rangle^j_q$ в (5.1) допускает нетривиальное разложение по отношению $\overset{\mathrm{nort}}{\sim}$.

Определение 1. *Скажем, что область $\Omega^T[\Sigma]$ есть ординарный граф, если отношения $\overset{\mathrm{nort}}{\sim}$ и $\overset{\mathrm{supp}}{\sim}$ эквивалентны на всех наборах $\mathbb{P}^j$, $j = 1,\dots,J$, что равносильно совпадению разложений* (4.1) *и* (5.1) (*идентичности классов $[P]^j_q = \langle P\rangle^j_q$ при всех $q = 1,\dots,p_j = q_j$*).

Как представляется, для нарушения ординарности необходима специальная "настройка" графа $\Omega^T[\Sigma]$; в частности – подбор значения T. Поэтому, вероятно, правильным будет говорить об ординарности как о случае общего положения.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть область $\Omega^T[\Sigma]$ является ординарным графом. Тогда соответствие между фреймами $\mathfrak{F}^{\mathrm{a}}_{\Sigma} \ni \boldsymbol{\pi} \leftrightarrow \lambda \in \mathfrak{F}^{\mathrm{g}}_{\Sigma}$, задаваемое условием*

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\pi}) = \sigma_\gamma(\lambda), \qquad \gamma \in \Sigma \tag{6.1}$$

оказывается изометрией фреймов (как метрических пространств).

Доказательство. Ординарность приводит к совпадению классов $[P]^j_q = \langle P\rangle^j_q$, что ведет к равенству алгебр $\mathfrak{P}_l = \mathfrak{Q}_l$ и их одновременной неприводимости. Тем самым, представления (4.4) и (5.7) оказываются идентичными.

Используя представления (4.4) и (5.7), можно построить изометрические копии фреймов $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$ и $\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma$. Опишем эту процедуру для $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$; для $\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma$ все рассуждения аналогичны.

Каждому блоку $[U\mathfrak{C}_\Sigma U^{-1}]_l$ сопоставим открытый интервал

$$\omega_l := \{x(r) := r|\ r \in (0,\epsilon_l)\} \subset \mathbb{R},$$

оснащенный $\gamma-$координатами $\sigma(x(r)) := \{\tau^k_{\gamma l}(r)|\ P^k_{\gamma l} \in \langle P\rangle_l\}$. Рассмотрим также его замыкание $\overline{\omega_l}$, на котором координаты для двух границ $q_l^-, q_l^+ \in \overline{\omega_l}\backslash\omega_l$ доопределим по непрерывности. Рассмотрим множество всех границ интервалов $\Upsilon := \{q_l^-, q_l^+|\ l = 1,\dots,M\}$ и введем на нем отношение $\sim_0$ по правилу: $q_l^c \sim_0 q_{l'}^{c'}$, если $\sigma_\gamma(q_l^c)\cap\sigma_\gamma(q_{l'}^{c'}) \neq \emptyset$ для некоторого $\gamma \in \Sigma$ ($c, c' \in \{-,+\}$). Через $\sim$ обозначим транзитивное замыкание отношения $\sim_0$. Множество Υ представляется в виде дизъюнктного объединения классов эквивалентности $[q]_k$ по этому отношению:

$$\Upsilon = [q]_1 \cup \dots \cup [q]_K.$$

Пусть $w_k := [q]_k$; элементы множества $W := \{w_1,\dots,w_K\}$ будем называть вершинами, элементы множества $E := \{\omega_1,\dots,\omega_M\}$ – ребрами, а множество $\tilde{\mathfrak{F}}^{\rm a}_\Sigma := W \sqcup E$ – вспомогательным алгебраическим фреймом. Для точек ребер $\gamma-$координаты определены выше, а для вершин положим

$$\sigma_\gamma(w) := \bigcup_{q\in w} \sigma_\gamma(q).$$

Заметим, что фрейм $\tilde{\mathfrak{F}}^{\rm a}_\Sigma$ может отличаться от $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$ лишь наличием дополнительных вершин валентности 2.

Аналогичным образом определяется вспомогательный геометрический фрейм $\tilde{\mathfrak{F}}^{\rm g}_\Sigma$. Несложно видеть, что при ординарности $\Omega^T[\Sigma]$ вспомогательные фреймы оказываются идентичными: $\tilde{\mathfrak{F}}^{\rm a}_\Sigma \equiv \tilde{\mathfrak{F}}^{\rm g}_\Sigma$. При этом, каждый из вспомогательных фреймов изометричен оригинальному (алгебраическому или геометрическому), причем изометрии устанавливаются биекциями по равенству координат (6.1). Тем самым, ординарность области $\Omega^T[\Sigma]$ приводит к изометрии фреймов $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$ и $\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma$. Теорема доказана. $\square$

Комментарии. • Используя стандартные приемы метода граничного управления [2], можно показать, что традиционные данные обратных задач определяют некоторую *изоморфную копию* $[\mathfrak{C}_\Sigma]^c$ алгебры $\mathfrak{C}_\Sigma$.

Как следствие, эти данные определяют *изометрическую копию* $[\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma]^c$ фрейма $\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma$. Если захваченная волнами область $\Omega^T[\Sigma]$ является ординарным графом, то в нашем распоряжении оказывается изометрическая копия $[\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma]^c$ фрейма $\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma$. Как и сам фрейм, его копия отвечает оптимальному разбиению и, следовательно, содержит информацию о геометрии $\Omega^T[\Sigma]$. Можно попытаться получить ее по схеме

$$\text{Данные обратной задачи} \Rightarrow [\mathfrak{E}_\Sigma]^c \Rightarrow [\mathfrak{F}^{\rm a}_\Sigma]^c \equiv [\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma]^c \overset{?}{\Rightarrow} \Omega^T[\Sigma]$$

Принципиальный вопрос, задающий направление дальнейших исследований, состоит в том, в какой мере копия $[\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma]^c$ эту геометрию определяет. Грубо говоря, можно ли “расклеить” $\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma$ в $\Omega^T[\Sigma]$? Вопрос открыт и представляется весьма непростым.

• Открыт и вопрос о справедливости гипотезы, высказанной в [6]: каждой вершине v, перекрытой волнами от (не менее) двух граничных вершин, т.е. такой, что выполнено $v \in \Omega^T[\gamma] \cap \Omega^T[\gamma']$, отвечает кластер в спектре $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma}$. Можно ли определить наличие или отсутствие циклов в $\Omega^T[\Sigma]$ по спектру $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma}$ (фрейму $\mathfrak{F}^{\rm g}_\Sigma$) [5]?

Список литературы

1. W. Arveson, *An invitation to C^*-algebras*, Springer-Verlag Inc., 1976.
2. М. И. Белишев, *Граничное управление и томография Римановых многообразий (BC-метод).* — Успехи мат. наук **72**, No. 4 (2017), 3–66.
3. M. I. Belishev, A. V. Kaplun, *Eikonal algebra on a graph of simple structure.* — Eurasian J. Math. Computer Appl. **6**, No. 3 (2018), 4–33.
4. М. И. Белишев, А. В. Каплун, *Каноническое представление C^*-алгебры эйконалов метрического графа.* — Изв. РАН. сер. матем. **86**, No. 4 (2022), 3–50.
5. M. I. Belishev, N. Wada, *On revealing graph cycles via boundary measurements.* — Inverse Problems **25**, No. 10 (2009), 1–25.
6. M. I. Belishev, N. Wada, *A C^*-algebra associated with dynamics on a graph of strings.* — J. Math. Soc. Japan **67**, No. 3 (2015) 1239–1274.
7. Н. Б. Васильев, *C^*-алгебры с конечномерными представлениями.* — Успехи мат. наук **21**, No. 1 (1966), 135–154.
8. Ж. Диксмье, *C^*-алгебры и их представления.* — М. Наука, 1974.
9. А. В. Каплун, *Каноническое представление C^*-алгебры эйконалов простейшего графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **506**, (2021) 57–78.
10. А. В. Каплун, *Алгебра эйконалов метрического графа.* — Диссертация к.ф.-м.н. `http://pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council-01/dissertations/presented.`
11. M. Nilsen, *C^*–bundles and $C_0(X)$-algebras.* — Indiana Univ. Math. J. **45**, No. 2 (1996), 463–477.
12. Дж. Мерфи, *$*$-алгебры и теория операторов*, М., Факториал, 1997.
13. М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, М., Наука, 1968.

Belishev M. I., Kaplun A. V. Canonical forms of metric graph eikonal algebra and graph geometry.

The algebra of eikonals $\mathfrak{E}$ of a metric graph Ω is an operator C^*-algebra defined by a dynamical system with boundary control describing wave propagation. In this paper, two canonical block forms of the algebra $\mathfrak{E}$ are described for an arbitrary connected locally compact graph – *algebraic* and *geometric*. These forms define some metric graphs (*frames*) $\mathfrak{F}^{\,\mathrm{a}}$ and $\mathfrak{F}^{\,\mathrm{g}}$. The frame $\mathfrak{F}^{\,\mathrm{a}}$ is defined by the boundary data of inverse problems. Frame $\mathfrak{F}^{\,\mathrm{g}}$ is related to graph geometry. A class is being introduced of *ordinary graphs*, whose frames are identical: $\mathfrak{F}^{\,\mathrm{a}} \equiv \mathfrak{F}^{\,\mathrm{g}}$. The results are supposed to be used in the inverse problem, which consists in reconstructing a graph from boundary inverse data.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки 27
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru
E-mail: alex.v.kaplun@gmail.com, kaplunav@pdmi.ras.ru

Поступило 17 октября 2022 г.