Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 519, 2022 г.

К. А. Бекмаганбетов, А. М. Толеубай, Г. А. Чечкин

ОБ АТТРАКТОРАХ 2D СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА В СРЕДЕ С АНИЗОТРОПНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

Ведение

В этой работе изучается поведение аттракторов (см. рис. 1[1], например) начально-краевой задачи для двумерной системы уравнений Навье–Стокса в анизотропной среде с локально периодическими мелкозернистыми препятствиями, зависящими от малого параметра, при стремлении параметра к нулю. Задачи в перфорированных областях (в областях с мелкозернистыми препятствиями) привлекают большое внимание специалистов (см., например, [1–6]). О некоторых результатах можно прочитать в монографиях [7–9], а также ознакомиться там с подробной библиографией. В этой статье изучается случай появления потенциала в предельном уравнении (см. аналогичные задачи в [2, 4–6, 10–12]). Отметим некоторые результаты по усреднению аттракторов, которые появились в последнее время (см. [13–15]). В работах [13] и [15] изучалось усреднение аттракторов скалярных эволюционных уравнений с диссипацией в периодически перфорированной области.

Аттракторы описывают поведение решений диссипативных нелинейных эволюционных уравнений при стремлении времени к бесконечности, а также характеризуют устойчивость и неустойчивость предельных структур соответствующих динамических систем (см., например, монографии [16–18] и ссылки в них). Задачи для автономных и неавтономных двумерных уравнений Навье–Стокса с осциллирующими членами были изучены в [17, 19–21].

Ключевые слова: аттракторы, усреднение, система уравнений Навье–Стокса, нелинейные уравнения, слабая сходимость, перфорированная область, быстро осциллирующие члены, анизотропная среда.

Работа Бекмаганбетова К.А. и Толеубай А.М. в разделах 1, 2 и 3.2 поддержана КН МНиВО РК (грант AP14869553). Работа Чечкина Г.А. в разделах 3.1 и 3.3 частично поддержана РНФ (проект 20-11-20272).

[1]`https://oir.mobi/631015-fraktalnye-attraktory.html`

Нас интересует асимптотическое поведение траекторных аттракторов системы уравнений Навье–Стокса с быстро осциллирующими членами в перфорированной области (области с препятствиями), которые описывают поведение анизотропных сред. Мы изучаем слабую сходимость и предельное поведение аттракторов при стремлении малого параметра к нулю. Результаты по усреднению аттракторов системы уравнений Навье–Стокса в периодической изотропной среде см. [22]. В статье доказывается, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ двумерной си-

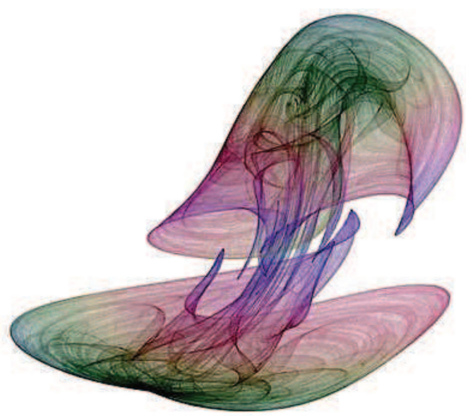

Рис. 1. Аттрактор.

стемы уравнений Навье–Стокса (см. также [19] и [20]) в перфорированной области (области с препятствиями) сходится в слабом смысле при $\varepsilon \to 0$ к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ усредненной системы уравнений в соответствующем функциональном пространстве. Здесь малый параметр ε также характеризует диаметр полостей (препятствий) и расстояние между ними в среде.

В разделе 1 определяются основные понятия и формулируются теоремы о траекторных аттракторах автономных эволюционных уравнений. В разделе 2 определяется геометрическая структура перфорированной области, формулируется задача для изучения и описываются необходимые функциональные пространства. Раздел 3 посвящен усреднению аттракторов автономной двумерной системы уравнений

Навье–Стокса с быстро осциллирующими членами в перфорированной области.

§1. Траекторные аттракторы эволюционных уравнений

В этом разделе излагается общая схема построения траекторных аттракторов автономных эволюционных уравнений. В следующем параграфе эта схема применяется для изучения траекторных аттракторов двумерной системы уравнений Навье–Стокса в перфорированной области с быстро осциллирующими членами в самих уравнениях и в граничных условиях и соответствующего им усредненного уравнения.

Рассматривается абстрактное автономное эволюционное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u), \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Предполагается заданным нелинейный оператор $A(\cdot) : E_1 \to E_0$, где E_1, E_0 – банаховы пространства и $E_1 \subseteq E_0$. Например, $A(u) = \nabla\left(a\left(\cdot\right)\nabla u\right) - (u, \nabla u) + g(\cdot)$ (см. раздел 2).

Назовём решением уравнения (1) функцию из L_2, при подстановке которой в (1), получаем тождество в смысле обобщённых функций из D'. Мы будем исследовать решения $u(s)$ уравнения (1) в целом как функции переменной $s \in \mathbb{R}_+$. Здесь $s \equiv t$ обозначает переменную времени. Множество решений (1), удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям, будем называть *пространством траекторий* $\mathcal{K}^+$ уравнения (1). Опишем пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ более подробно.

Прежде всего рассмотрим решения $u(s)$ уравнения (1), определенные на фиксированном отрезке времени $[t_1, t_2]$ из $\mathbb{R}$. Изучаются решения уравнения (1), принадлежащие банаховому пространству $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$, которое зависит от t_1 и t_2. Пространство $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ состоит из функций $f(s), s \in [t_1, t_2]$, таких, что $f(s) \in E$ для почти всех $s \in [t_1, t_2]$, где E – банахово пространство такое, что $E_1 \subseteq E \subseteq E_0$.

Например, пространством $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ может быть пространство $C([t_1, t_2]; E)$ или пространство $L_p(t_1, t_2; E)$, при $p \in [1, \infty]$, или пересечение таких пространств (см. раздел 2). Предположим, что $\Pi_{t_1,t_2}\mathcal{F}_{\tau_1,\tau_2} \subseteq \mathcal{F}_{t_1,t_2}$ и

$$\|\Pi_{t_1,t_2} f\|_{\mathcal{F}_{t_1,t_2}} \leqslant C(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)\|f\|_{\mathcal{F}_{\tau_1,\tau_2}}, \quad \forall f \in \mathcal{F}_{\tau_1,\tau_2}, \tag{2}$$

где $[t_1, t_2] \subseteq [\tau_1, \tau_2]$ и Π_{t_1,t_2} обозначает оператор сужения на отрезок $[t_1, t_2]$. Постоянная $C(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$ не зависит от функции f. Обычно рассматривается однородный случай пространств, когда $C(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2) = C(t_2-t_1,\tau_2-\tau_1)$.

Пусть $S(h)$ для $h\in\mathbb{R}$ обозначает оператор сдвига $S(h)f(s)=f(h+s)$. Очевидно, если аргумент s функции $f(\cdot)$ принадлежит отрезку $[t_1,t_2]$, тогда аргумент s функции $S(h)f(\cdot)$ будет принадлежать отрезку $[t_1-h,t_2-h]$ для $h\in\mathbb{R}$. Предположим, что отображение $S(h)$ является изоморфизмом из F_{t_1,t_2} в F_{t_1-h,t_2-h} и

$$\|S(h)f\|_{\mathcal{F}_{t_1-h,t_2-h}} = \|f\|_{\mathcal{F}t_1,t_2}, \quad \forall f\in\mathcal{F}_{t_1,t_2}. \tag{3}$$

Это предположение вполне естественно, например, для однородных пространств.

Если $f(s)\in\mathcal{F}_{t_1,t_2}$, то $A(f(s))\in\mathcal{D}_{t_1,t_2}$, где $\mathcal{F}_{t_1,t_2}\subseteq\mathcal{D}_{t_1,t_2}$. Производная $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$ – обобщенная функция со значениями в E_0, $\frac{\partial f}{\partial t}\in D'((t_1,t_2);E_0)$ и предположим, что $\mathcal{D}_{t_1,t_2}\subseteq D'((t_1,t_2);E_0)$ для всех $(t_1,t_2)\subset\mathbb{R}$. Функция $u(s)\in\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ называется *решением* уравнения (1) в пространстве $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ (на интервале (t_1,t_2)) если $\frac{\partial u}{\partial t}(s)=A(u(s))$ в смысле обобщенных функций в пространстве $D'((t_1,t_2);E_0)$.

Пусть

$$\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}} = \{f(s),\, s\in\mathbb{R}_+ \mid \Pi_{t_1,t_2}f(s)\in\mathcal{F}_{t_1,t_2}, \quad \forall\,[t_1,t_2]\subset\mathbb{R}_+\}. \tag{4}$$

Например, если $\mathcal{F}_{t_1,t_2}=C([t_1,t_2];E)$, то $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}=C(\mathbb{R}_+;E)$, а если $\mathcal{F}_{t_1,t_2} = L_p(t_1,t_2;E)$, то $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}=L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E)$.

Функция $u(s)\in\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ называется решением уравнения (1) в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$, если $\Pi_{t_1,t_2}u(s)\in\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ и функция $\Pi_{t_1,t_2}u(s)$ является решением уравнения (1) для любого отрезка времени $[t_1,t_2]\subset\mathbb{R}_+$.

Пусть $\mathcal{K}^+$ – некоторое множество решений уравнения (1), принадлежащих $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$, которое не обязательно является множеством *всех* решений уравнения (1), принадлежащих $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$. Элементы множества $\mathcal{K}^+$ называются *траекториями*, а само пространство $\mathcal{K}^+$ – *пространством траекторий* уравнения (1).

Предполагается, что пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ является *трансляционно-инвариантным* в следующем смысле: если $u(s)\in\mathcal{K}^+$, то $u(h+s)\in\mathcal{K}^+$ для любого $h\geqslant 0$. Это условие является естественным свойством решений автономного уравнения в однородном пространстве.

Рассмотрим теперь операторы сдвигов $S(h)$ в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$:

$$S(h)f(s)=f(s+h), \quad h\geqslant 0.$$

Ясно, что множество отображений $\{S(h), h \geqslant 0\}$ образует полугруппу в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$: $S(h_1)S(h_2) = S(h_1 + h_2)$ при $h_1, h_2 \geqslant 0$ и $S(0) = I$ – тождественное отображение. Заменим переменную h на переменную времени t. Полугруппа $\{S(t), t \geqslant 0\}$ называется *полугруппой сдвигов*. В силу сделанного предположения полугруппа сдвигов отображает пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ на себя

$$S(t)\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{K}^+, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{5}$$

Далее будут изучаться свойства притяжения полугруппы сдвигов $\{S(t)\}$, действующей на пространстве траекторий $\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$. Определим некоторую топологию в пространстве $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$.

Пусть $\rho_{t_1,t_2}(\cdot,\cdot)$ — метрика, определенная на пространстве $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ для всех отрезков $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющая

$$\begin{gathered}\rho_{t_1,t_2}\left(\Pi_{t_1,t_2} f, \Pi_{t_1,t_2} g\right) \leqslant D(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)\rho_{\tau_1,\tau_2}\left(f, g\right), \\ \forall f, g \in \mathcal{F}_{\tau_1,\tau_2},\ [t_1, t_2] \subseteq [\tau_1, \tau_2], \\ \rho_{t_1-h,t_2-h}(S(h)f, S(h)g) = \rho_{t_1,t_2}(f, g), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_{t_1,t_2},\ [t_1, t_2] \subset \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}.\end{gathered}$$

Обозначим через Θ_{t_1,t_2} соответствующее метрическое пространство на $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$. Например, ρ_{t_1,t_2} может быть метрикой, порожденной нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{t_1,t_2}}$ банахова пространства $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$. В приложениях также бывает, что метрика ρ_{t_1,t_2} порождает топологию Θ_{t_1,t_2} более слабую, чем топология сильной сходимости банахова пространства $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$.

Обозначим через Θ_+^{loc} пространство $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$, снабженное топологией локальной сходимости на Θ_{t_1,t_2} при любом $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$. Точнее, по определению последовательность функций $\{f_k(s)\} \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ сходится к функции $f(s) \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ при $k \to \infty$ в Θ_+^{loc}, если $\rho_{t_1,t_2}(\Pi_{t_1,t_2} f_k, \Pi_{t_1,t_2} f) \to 0$ при $k \to \infty$ для любого отрезка $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$. Нетрудно доказать, что топология Θ_+^{loc} метризуема, например, с помощью метрики Фреше

$$\rho_+(f_1, f_2) := \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} \frac{\rho_{0,m}(f_1, f_2)}{1 + \rho_{0,m}(f_1, f_2)}. \tag{6}$$

В случае, когда все метрические пространства Θ_{t_1,t_2} полны, тогда, очевидно, метрическое пространство Θ_+^{loc} также является полным.

Заметим, что полугруппа сдвигов $\{S(t)\}$ непрерывна в топологии Θ_+^{loc}. Это непосредственно вытекает из определения топологического пространства Θ_+^{loc}.

Определим также следующее банахово пространство

$$\mathcal{F}_+^b := \{f(s) \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}} \mid \|f\|_{\mathcal{F}_+^b} < +\infty\}, \tag{7}$$

где норма

$$\|f\|_{\mathcal{F}_+^b} := \sup_{h \geqslant 0} \|\Pi_{0,1} f(h+s)\|_{\mathcal{F}_{0,1}}. \tag{8}$$

Например, если $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}} = C(\mathbb{R}_+; E)$, тогда пространство $\mathcal{F}_+^b = C^b(\mathbb{R}_+; E)$ с нормой $\|f\|_{\mathcal{F}_+^b} = \sup_{h\geqslant 0} \|f(h)\|_E$, а если $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}} = L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E)$, тогда $\mathcal{F}_+^b = L_p^b(\mathbb{R}_+; E)$ с нормой $\|f\|_{\mathcal{F}_+^b} = \left(\sup_{h\geqslant 0} \int\limits_h^{h+1} \|f(s)\|_E^p ds\right)^{1/p}$.

Отметим, что $\mathcal{F}_+^b \subseteq \Theta_+^{\mathrm{loc}}$. Банахово пространство $\mathcal{F}_+^b$ необходимо для определения ограниченных множеств в пространстве траекторий $\mathcal{K}^+$. При построении траекторного аттрактора в $\mathcal{K}^+$ мы не рассматриваем соответствующую равномерную сходимость в топологии банахова пространства $\mathcal{F}_+^b$. Вместо этого мы используем топологию локальной сходимости Θ_+^{loc}, которая намного слабее.

Будем предполагать, что $\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{F}_+^b$, то есть любая траектория $u(s) \in \mathcal{K}^+$ уравнения (1) имеет конечную норму (8). Сформулируем определения притягивающего множества и траекторного аттрактора полугруппы сдвигов $\{S(t)\}$, действующей на $\mathcal{K}^+$.

Определение 1.1. Множество $\mathcal{P} \subseteq \Theta_+^{\mathrm{loc}}$ называется *притягивающим множеством* полугруппы сдвигов $\{S(t)\}$, действующей на $\mathcal{K}^+$, в топологии Θ_+^{loc}, если для любого ограниченного в $\mathcal{F}_+^b$ множества $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}^+$ множество $\mathcal{P}$ притягивает $S(t)\mathcal{B}$ при $t \to +\infty$ в топологии Θ_+^{loc}, то есть для любой ε-окрестности $O_\varepsilon(\mathcal{P})$ в Θ_+^{loc} существует $t_1 \geqslant 0$ такое, что $S(t)\mathcal{B} \subseteq O_\varepsilon(\mathcal{P})$ при любом $t \geqslant t_1$.

Свойство притяжения $\mathcal{P}$ можно сформулировать в следующей эквивалентной форме: для любого множества $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}^+$ ограниченного в $\mathcal{F}_+^b$ и для любого $M > 0$

$$\mathrm{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M} S(t)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\mathcal{P}) \to 0 \quad (t \to +\infty),$$

где

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{M}}(X, Y) := \sup_{x\in X} \mathrm{dist}_{\mathcal{M}}(x, Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \rho_{\mathcal{M}}(x, y)$$

обозначает полурасстояние по Хаусдорфу от множества X до множества Y в метрическом пространстве $\mathcal{M}$.

Определение 1.2 ([17]). Множество $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{K}^+$ называется *траекторным аттрактором* полугруппы сдвигов $\{S(t)\}$ на $\mathcal{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}, если **(i)** $\mathfrak{A}$ ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}, **(ii)** множество $\mathfrak{A}$ строго инвариантно относительно полугруппы сдвигов: $S(t)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ при всех $t \geqslant 0$, и **(iii)** $\mathfrak{A}$ является притягивающим множеством полугруппы сдвигов $\{S(t)\}$ для $\mathcal{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}, то есть для любого $M > 0$

$$\mathrm{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M} S(t)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\mathfrak{A}) \to 0 \quad (t \to +\infty).$$

Замечание 1.1. Используя терминологию из [16], можно сказать, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ является *глобальным* $(\mathcal{F}_+^b, \Theta_+^{\mathrm{loc}})$*-аттрактором* полугруппы сдвигов $\{S(t)\}$, действующей на $\mathcal{K}^+$, то есть $\mathfrak{A}$ притягивает $S(t)\,\mathcal{B}$ при $t \to +\infty$ в топологии Θ_+^{loc}, где $\mathcal{B}$ – любое ограниченное (в $\mathcal{F}_+^b$) множество из $\mathcal{K}^+$:

$$\mathrm{dist}_{\Theta_+^{\mathrm{loc}}}(S(t)\,\mathcal{B}, \mathfrak{A}) \to 0 \quad (t \to +\infty).$$

Сформулируем основные теоремы о существовании и структуре траекторного аттрактора уравнения (1).

Теорема 1.1 ([16, 17, 23]). *Пусть пространство траекторий $\mathcal{K}^+$, соответствующее уравнению* (1)*, замкнуто в $\mathcal{F}_+^b$ и выполняется* (5)*. Предполагается, что полугруппа сдвигов $\{S(t)\}$ имеет притягивающее множество $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{K}^+$, которое ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}. Тогда полугруппа сдвигов $\{S(t), t \geqslant 0\}$, действующая на $\mathcal{K}^+$, имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}$. Множество $\mathfrak{A}$ ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}.*

Опишем структуру траекторного аттрактора $\mathfrak{A}$ уравнения (1) в терминах полных траекторий этого уравнения. Рассмотрим уравнение (1) на всей числовой оси времени

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u), \; t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Распространим определение пространства траекторий на всю ось $\mathbb{R}$. Если функция $f(s)$, $s \in \mathbb{R}$, задана на всей оси времени, то сдвиги $S(h)f(s) = f(s+h)$ также определены при отрицательных h. Функция $u(s), s \in \mathbb{R}$ называется *полной траекторией* уравнения (9), если $\Pi_+ u(s+h) \in \mathcal{K}^+$ при любом $h \in \mathbb{R}$. Здесь $\Pi_+ = \Pi_{0,\infty}$ обозначает оператор ограничения на полуось $\mathbb{R}_+$.

По аналогии с $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}, \mathcal{F}_+^b$ и Θ_+^{loc} определим пространства $\mathcal{F}^{\mathrm{loc}}, \mathcal{F}^b$ и Θ^{loc}:

$$\mathcal{F}^{\mathrm{loc}} := \{f(s), s \in \mathbb{R} \mid \Pi_{t_1,t_2} f(s) \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}\ \forall\, [t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}\};$$
$$\mathcal{F}^b := \{f(s) \in \mathcal{F}^{\mathrm{loc}} \mid \|f\|_{\mathcal{F}^b} < +\infty\},$$

где

$$\|f\|_{\mathcal{F}^b} := \sup_{h \in \mathbb{R}} \|\Pi_{0,1} f(h+s)\|_{\mathcal{F}_{0,1}}. \tag{10}$$

Топологическое пространство Θ^{loc} совпадает (как множество) с $\mathcal{F}^{\mathrm{loc}}$, и по определению $f_k(s) \to f(s)$ $(k \to \infty)$ в Θ^{loc}, если $\Pi_{t_1,t_2} f_k(s) \to \Pi_{t_1,t_2} f(s)$ $(k \to \infty)$ в Θ_{t_1,t_2} при любом $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$. Ясно, что Θ^{loc} является метрическим пространством, также, как и Θ_+^{loc}.

Определение 1.3. *Ядро* $\mathcal{K}$ в пространстве $\mathcal{F}^b$ уравнения (9) есть объединение всех полных траекторий $u(s), s \in \mathbb{R}$, уравнения (9), ограниченных в $\mathcal{F}^b$ по норме (10):

$$\|\Pi_{0,1} u(h+s)\|_{\mathcal{F}_{0,1}} \leqslant C_u, \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда* $\mathfrak{A} = \Pi_+ \mathcal{K}$. *Множество* $\mathcal{K}$ *компактно в* Θ^{loc} *и ограничено в* $\mathcal{F}^b$.

Полное доказательство приведено в [17, 23].

При доказательстве того, что некоторый шар из $\mathcal{F}_+^b$ является компактным в Θ_+^{loc} нами будет использоваться следующая лемма. Пусть E_0 и E_1 – банаховы пространства такие, что $E_1 \subset E_0$. Рассмотрим банаховы пространства

$$W_{p_1,p_0}(0, M; E_1, E_0) = \Big\{\psi(s), s \in 0, M \mid \psi(\cdot) \in L_{p_1}(0, M; E_1),$$
$$\psi'(\cdot) \in L_{p_0}(0, M; E_0)\Big\},$$
$$W_{\infty,p_0}(0, M; E_1, E_0) = \Big\{\psi(s), s \in 0, M \mid \psi(\cdot) \in L_{\infty}(0, M; E_1),$$
$$\psi'(\cdot) \in L_{p_0}(0, M; E_0)\Big\},$$

(где $p_1 \geqslant 1$ и $p_0 > 1$) с нормами

$$\|\psi\|_{W_{p_1,p_0}} := \left(\int_0^M \|\psi(s)\|_{E_1}^{p_1} ds\right)^{1/p_1} + \left(\int_0^M \|\psi'(s)\|_{E_0}^{p_0} ds\right)^{1/p_0},$$

$$\|\psi\|_{W_{\infty,p_0}} := \operatorname{ess\,sup}\{\|\psi(s)\|_{E_1} \mid s\in[0,M]\} + \left(\int\limits_0^M \|\psi'(s)\|_{E_0}^{p_0} ds\right)^{1/p_0}.$$

Лемма 1.1 (Aubin–Lions–Simon, [24])**.** *Предположим, что* $E_1 \Subset E \subset E_0$*. Тогда следующие вложения компактны:*

$$W_{p_1,p_0}(0,T;E_1,E_0) \Subset L_{p_1}(0,T;E), \tag{11}$$

$$W_{\infty,p_0}(0,T;E_1,E_0) \Subset C([0,T];E). \tag{12}$$

В следующем разделе будут изучаться двумерные системы уравнений Навье–Стокса и их траекторные аттракторы, зависящие от малого параметра $\varepsilon > 0$.

Определение 1.4. Будем говорить, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ *сходятся* к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ при $\varepsilon \to 0$ в топологическом пространстве $\Theta_+^{\rm loc}$, если для любой окрестности $\mathcal{O}(\mathfrak{A})$ в $\Theta_+^{\rm loc}$ найдется $\varepsilon_1 \geqslant 0$ такое, что $\mathfrak{A}_\varepsilon \subseteq \mathcal{O}(\overline{\mathfrak{A}})$ при любом $\varepsilon < \varepsilon_1$, то есть для любого $M > 0$

$$\operatorname{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \ (\varepsilon\to 0).$$

§2. Обозначения и постановка задачи

Сначала мы определим перфорированную область. Пусть Ω – гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. Введем обозначения

$$\Upsilon_\varepsilon = \left\{ r\in\mathbb{Z}^2 : \operatorname{dist}(\varepsilon r, \partial\Omega) \geqslant \sqrt{2}\varepsilon \right\}, \quad \square \equiv \left\{ \xi : -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i=1,2 \right\}.$$

Пусть $F(x,\xi)$ – гладкая, 1-периодическая по переменной ξ функция и такая, что $F(x,\xi)|_{\xi\in\partial\square} \geqslant \text{const} > 0$, $F(x,0) = -1$, $\nabla_\xi F \neq 0$ при $\xi \in \square\setminus\{0\}$. Определим множества

$$G_\varepsilon^r = \left\{ x\in\varepsilon(\square + r) \mid F\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \leqslant 0 \right\}, \qquad G_\varepsilon = \bigcup_{r\in\Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^r$$

и вводим перфорированную область следующим образом $\Omega_\varepsilon = \Omega\setminus G_\varepsilon$.

В соответствии с выше приведенной конструкцией граница $\partial\Omega_\varepsilon$ состоит из $\partial\Omega$ и границы включений $\partial G_\varepsilon \subset \Omega$.

Ведем обозначения $Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0;+\infty)$ и $Q = \Omega\times(0;+\infty)$.

Обозначим через $G(x) = \{\xi\in\square : F(x,\xi) \leqslant 0\}$ – локальное включение, через $\partial G(x) = \{\xi\in\square : F(x,\xi) = 0\}$ – границу включения $G(x)$ в “растянутом” пространстве ξ.

Введем следующие обозначения для пространств $\mathbf{H} := [L_2(\Omega)]^2$, $\mathbf{H}_\varepsilon := [L_2(\Omega_\varepsilon)]^2$, $\mathbf{V} := [H_0^1(\Omega)]^2$, $\mathbf{V}_\varepsilon := [H^1(\Omega_\varepsilon;\partial\Omega)]^2$ – множество вектор-функций из $[H^1(\Omega_\varepsilon)]^2$ с нулевым следом на $\partial\Omega$. Нормы в этих пространствах определяются, соответственно, следующим образом

$$\|v\|^2 := \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{2} |v^k(x)|^2 dx,\ \|v\|_\varepsilon^2 := \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \sum_{k=1}^{2} |v^k(x)|^2 dx,$$

$$\|v\|_1^2 := \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{2} |\nabla v^k(x)|^2 dx,\ \|v\|_{1\varepsilon}^2 := \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \sum_{k=1}^{2} |\nabla v^k(x)|^2 dx.$$

Мы будем изучать асимптотическое поведение траекторных аттракторов следующей начально-краевой задачи для автономной двумерной системы уравнений Навье–Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right) & \\ \quad +(u_\varepsilon, \nabla)u_\varepsilon = g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ (\nabla, u_\varepsilon) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \gamma} + B\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon = h\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right), & x \in \partial G_\varepsilon, t \in (0, +\infty), \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$, $g_\varepsilon(x) = g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = (g^1, g^2) \in \mathbf{H}$, $h_\varepsilon(x) = h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = (h^1, h^2) \in \mathbf{H}$, $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \gamma} = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} n_i$, $n = (n_1, n_2)$ — вектор единичной внешней нормали к границе и матрица $(a_{ij}(x,\xi))$ – симметрическая положительно определенная, т.е. $\varkappa_1\eta^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}\eta_i\eta_j \leqslant \varkappa_2\eta^2$ для любого вектора η, для любых $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ – положительные константы.

Далее,

$$B(x,\xi) = \begin{pmatrix} b^1(x,\xi) & 0 \\ 0 & b^2(x,\xi) \end{pmatrix},$$

функции $b^k(x,\xi) \in C(\Omega \times \mathbb{R}^2)$ такие, что $b^k(x,\xi)$ – 1-периодические по переменным ξ функции на $\Omega \times \mathbb{R}^2$ и удовлетворяют условию

$$\int\limits_{\partial G(x)} b^k(x,\xi)\, d\sigma = 0, \qquad k = 1, 2,$$

где $d\sigma$ – элемент длины кривой $\partial G(x)$.

Аналогично компоненты вектор-функции $h(x,\xi)$ удовлетворяют условиям: $h^k(x,\xi) \in C(\Omega \times \mathbb{R}^2)$, $h^k(x,\xi)$ — 1-периодические по переменным ξ функции на $\Omega \times \mathbb{R}^2$ и

$$\int\limits_{\partial G(x)} h^k(x,\xi)\, d\sigma = 0, \qquad k = 1, 2.$$

Известно, что если $U \in \mathbf{H}$, то существует слабое решение $u(s)$ начально-краевой задачи (13), принадлежащее пространству

$$\mathbf{L}^{\mathrm{loc}}_{2,w}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}^{\mathrm{loc}}_{\infty,*w}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon),$$

такое, что $u(0) = U$. При этом имеем, что $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in \mathbf{L}^{\mathrm{loc}}_{2,w}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$. Для доказательства смотри, например, [23, 25].

Исходя из выше сказанного, будем исследовать слабые решения начально-краевой задачи (13), то есть функции

$$u_\varepsilon(x,s) \in \mathbf{L}^{\mathrm{loc}}_{2,w}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}^{\mathrm{loc}}_{\infty,*w}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v : \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}^{\mathrm{loc}}_{2,w}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \right\}$$

которые удовлетворяют задаче (13) в смысле обобщенных функций, то есть

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \cdot \psi \; dxdt + \int\limits_{Q_\varepsilon} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \; dxdt \\
+ \int\limits_{Q_\varepsilon} (u_\varepsilon, \nabla) u_\varepsilon \cdot \psi \; dxdt + \sum_{r \in \Upsilon_\varepsilon} \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\partial G^r_\varepsilon} B\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon \cdot \psi \; d\sigma dt \\
= \int\limits_{Q_\varepsilon} g_\varepsilon(x) \cdot \psi \; dxdt + \sum_{r \in \Upsilon_\varepsilon} \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\partial G^r_\varepsilon} h_\varepsilon(x) \cdot \psi \; d\sigma dt \qquad (14)
\end{aligned}$$

для любых вектор – функций $\psi \in [\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_\varepsilon)]^2$. Здесь $y_1 \cdot y_2$ означает скалярное произведение векторов $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$, а $d\sigma$ – элемент кривой ∂G_ε.

При описании пространства траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ для задачи (13), будем следовать общей схеме раздела 1 и определим банаховы пространства для каждого отрезка $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_{t_1,t_2} := \mathbf{L}_{2,w}^{\mathrm{loc}}(t_1,t_2;\mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(t_1,t_2;\mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v : \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2,w}^{\mathrm{loc}}\left(t_1,t_2;\mathbf{H}_\varepsilon\right) \right\} \tag{15}$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{t_1,t_2}} := \|v\|_{\mathbf{L}_2(t_1,t_2;\mathbf{V})} + \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(t_1,t_2;\mathbf{H})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}_2(t_1,t_2;\mathbf{H})}. \tag{16}$$

Очевидно, что условие (2) выполняется для нормы (16), а полугруппа сдвигов $\{S(h)\}$ удовлетворяет (3).

Положив $\mathcal{D}_{t_1,t_2} = \mathbf{L_2}\left(t_1,t_2;\mathbf{V}\right)$ получаем, что $\mathcal{F}_{t_1,t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1,t_2}$, а если $u(s) \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}$, тогда $A(u(s)) \in \mathcal{D}_{t_1,t_2}$. Далее можно рассматривать слабые решения задачи (13) как решение системы уравнений из общей схемы раздела 1.

Определив пространство (4), получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}} &= \mathbf{L}_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}) \cap \left\{ v \;\middle|\; \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}) \right\}, \\
\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{\mathrm{loc}} &= \mathbf{L}_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v \;\middle|\; \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_\varepsilon) \right\}.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ множество всех слабых решений задачи (13). Напомним, что для любой функции $U \in \mathbf{H}$ существует хотя бы одна траектория $u(\cdot) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ такая, что $u(0) = U(x)$. Следовательно, пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (13) не пусто и достаточно велико.

Ясно, что $\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ и пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ является трансляционно-инвариантным, то есть, если $u(s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$, тогда и $u(h+s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ для любых $h \geqslant 0$. Следовательно,

$$S(h)\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon^+, \quad \forall h \geqslant 0.$$

Далее, используя норму пространства $\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V})$, определим метрики $\rho_{t_1,t_2}(\cdot,\cdot)$ в пространствах $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ следующим образом

$$\rho_{0,M}(u,v) = \left(\int\limits_0^M \|u(s) - v(s)\|^2 ds\right)^{1/2}, \quad \forall\, u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0,M}.$$

Эти метрики порождают топологию Θ_+^{loc} в пространстве $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ (соответственно $\Theta_{\varepsilon,+}^{\mathrm{loc}}$ в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{\mathrm{loc}}$). Напомним, что последовательность $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ сходится к функции $v \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ при $k \to \infty$ в Θ_+^{loc}, если $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{\mathbf{L}_2(0,M;\mathbf{H})} \to 0$ $(k \to \infty)$ для любого $M > 0$. Топология Θ_+^{loc} метризуема (см. (6)) и соответствующее метрическое пространство является полным. Мы рассматриваем топологию в пространстве траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (13). Полугруппа сдвигов $\{S(t)\}$, действующая на $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ непрерывна в рассматриваемой топологии Θ_+^{loc}.

Следуя общей схеме раздела 1, определим ограниченные множества в $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ используя банаховы пространства $\mathcal{F}_+^b$ (см. (7)). Ясно, что

$$\mathcal{F}_+^b = \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \;\Big|\; \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \right\} \tag{17}$$

и $\mathcal{F}_+^b$ – подпространство пространства $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$.

Рассмотрим полугруппу сдвигов $\{S(t)\}$ на $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, $S(t): \mathcal{K}_\varepsilon^+ \to \mathcal{K}_\varepsilon^+$, $t \geqslant 0$.

Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon$ означает ядро задачи (13), которое состоит из всех слабых решений $u(s), s \in \mathbb{R}$ ограниченных в пространстве

$$\mathcal{F}^b = \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \;\Big|\; \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{H}) \right\}$$

Утверждение 2.1. *Задача* (13) *имеет траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc}. Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ равномерно (по $\varepsilon \in (0,1)$) ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}. Более того,*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon,$$

ядро $\mathcal{K}_\varepsilon$ – непусто и равномерно (по $\varepsilon \in (0,1)$) ограничено в $\mathcal{F}^b$. Напомним, что пространства $\mathcal{F}_+^b$ и Θ_+^{loc} зависят от ε.

Доказательство этого предложения практически полностью совпадает с доказательством, приведенным [17] для более частного случая.

§3. Усреднение аттракторов в начально-краевой задаче для системы уравнений Навье–Стокса в перфорированной области

3.1. Основное утверждение. В этом разделе изучается предельное поведение аттракторов $\mathfrak{A}_\varepsilon$ для системы уравнений Навье–Стокса (13) при $\varepsilon \to 0+$ и их сходимость к траекторному аттрактору соответствующего усредненного уравнения.

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид (структуру усреднённых коэффициентов см. в [12]):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{a}_{ij}(x)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right) + (u_0, \nabla)u_0 + V(x)\,u_0 = \mathcal{G}(x) + \mathcal{H}(x), & x \in \Omega, \\ (\nabla, u_0) = 0, & x \in \Omega, \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega \\ u_0 = U(x), & x \in \Omega, t = 0, \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\widehat{a}_{ij}(x) = \int\limits_{Y \setminus G(x)} \sum_{l=1}^{2} \widehat{a}_{il}(x,\xi)\left(\frac{\partial N_j(x,\xi)}{\partial \xi_l} + \delta_{ij}\right) d\xi,$$

$$\mathcal{G}(x) = \int\limits_{Y \setminus G(x)} g(x,\xi)\, d\xi,$$

$$m_k(x) = -\int\limits_{\partial G(x)} b^k(x,\xi) M^k(x,\xi)\, d\sigma, \quad V(x) = \begin{pmatrix} m_1(x) & 0 \\ 0 & m_2(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}_k(x) = -\int\limits_{\partial G(x)} h^k(x,\xi) M^k(x,\xi)\, d\sigma = \int\limits_{\partial G(x)} b^k(x,\xi) L^k(x,\xi) d\sigma, \quad \mathcal{H}(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1(x) \\ \mathcal{H}_2(x) \end{pmatrix}.$$

здесь $N_l(x,\xi)$, $M^k(x,\xi)$ и $L^k(x,\xi)$ – 1-периодические функции по ξ, удовлетворяющие задачам

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial\,(N_l+\xi_l)}{\partial \xi_j}\right) = 0 \text{ в } Y \setminus G(x), \quad \frac{\partial N_l}{\partial \gamma_\xi} = \sum_{i=1}^{2} a_{il}(x,\xi) n_i \text{ на } \partial G(x)$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial M^k}{\partial \xi_j}\right) = 0 \text{ в } Y \setminus G(x), \quad \frac{\partial M^k}{\partial \gamma_\xi} = -b^k(x,\xi) \text{ на } \partial G(x),$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(x,\xi) \frac{\partial L^k}{\partial \xi_j} \right) = 0 \text{ в } Y \setminus G(x), \quad \frac{\partial L^k}{\partial \gamma_\xi} = h^k\big(x,\xi\big) \text{ на } \partial G(x)$$

и имеющие нулевые средние по ячейке периодичности. Здесь $\dfrac{\partial\, \cdot}{\partial \gamma_\xi} = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,\xi) \dfrac{\partial\, \cdot}{\partial x_j} n_i^\xi$, $n_\xi = (n_1^\xi, n_2^\xi)$ — вектор единичной внешней нормали к границе полости $G(x)$.

Рассматриваются слабые решения начально-краевой задачи (18), то есть функции

$$u_0(x,s) \in \mathbf{L}_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v : \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2,w}^{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}\right) \right\}$$

которые удовлетворяют задаче (13) в смысле обобщенных функций, то есть

$$\int\limits_Q \frac{\partial u_0}{\partial t} \cdot \psi \; dxdt + \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{2} \widehat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \; dxdt + \int\limits_Q (u_0, \nabla) u_0 \cdot \psi \; dxdt$$
$$+ \int\limits_Q V\left(x\right) u_0 \cdot \psi \; dxdt = \int\limits_Q \mathcal{G}(x) \cdot \psi \; dxdt + \int\limits_Q \mathcal{H}(x) \cdot \psi dxdt \quad (19)$$

для любых функций $\psi \in [\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H})]^2$.

Замечание 3.1. Обозначим через $m_k = \sup\limits_{\Omega} m_k(x)$. Следует отметить, что коэрцитивность предельного оператора (18), является деликатной проблемой, поскольку числа m_k всегда положительны. В частности, корректность задачи (18), связанная с коэрцитивностью оператора обеспечивается неравенством

$$\lambda_0 > \max\{m_1, m_2\}, \quad (20)$$

где λ_0 – первое собственное значение оператора $\sum\limits_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(\widehat{a}_{ij}(x) \dfrac{\partial}{\partial x_j} \right)$ в пространстве $H^1(\Omega)$. Доказательство см в [6].

При условии (20) (см. замечание 3.1) задача (18) имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в пространстве траекторий $\overline{\mathcal{K}}^+$, соответствующем задаче (18), причем

$$\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \overline{\mathcal{K}}$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ – ядро задачи (18) в $\mathcal{F}^b$.

Сформулируем основную теорему об усреднении аттракторов системы уравнений Навье–Стокса.

Теорема 3.1. *Пусть* $\lambda_0 > \max\{m_1, m_2\}$, *тогда в топологическом пространстве* Θ_+^{loc} *справедливо предельное соотношение*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}} \ \ \textit{при } \varepsilon \to 0+. \tag{21}$$

Кроме того

$$\mathcal{K}_\varepsilon \to \overline{\mathcal{K}} \ \textit{при } \varepsilon \to 0+ \ \ \textit{в } \Theta^{\mathrm{loc}}. \tag{22}$$

Замечание 3.2. Напомним, что пространства в Теореме 3.1 зависят от ε. Предполагается, что все функции могут быть продолжены внутрь отверстий с сохранением соответствующих норм.

3.2. Вспомогательные утверждения. В данном разделе приводятся результаты из работы [6], которые будут использованы ниже.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_j}\right) = g^k\big(x,\frac{x}{\varepsilon}\big), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial n} + b^k\big(x,\frac{x}{\varepsilon}\big)u_\varepsilon^k = h^k\big(x,\frac{x}{\varepsilon}\big), & x \in \partial G_\varepsilon, \ \ k=1,2, \\ u_\varepsilon^k = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{23}$$

Потребуем также, чтобы

$$\int\limits_{\partial G(x)} b^k(x,\xi)d\sigma = 0, \qquad \int\limits_{\partial G(x)} h^k(x,\xi)d\sigma = 0. \tag{24}$$

Решение будем искать в виде асимптотического ряда

$$u_\varepsilon^k = u_0^k(x) + \varepsilon u_1^k(x,\xi) + \varepsilon^2 u_2^k(x,\xi) + \ldots, \qquad \xi = \frac{x}{\varepsilon}. \tag{25}$$

Замечание 3.3. Как правило, асимптотические ряды не являются сходящимися, и их сходимость не используется в формальном асимптотическом анализе. Такие ряды используются для установления вида предельной задачи и обобснование этих построений базируется на других аргументах.

Подставляя ряд (25) в задачу (23) и собирая члены одинакового порядка по ε, как в уравнении, так и в граничном условии, получаем рекуррентную последовательность задач, старшая из которых имеет вид

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(x,\xi) \frac{\partial u_1^k}{\partial \xi_j} \right) - \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(x,\xi) \frac{\partial u_0^k}{\partial x_j} \right) = 0, & x \in Y \setminus G(x), \\ \frac{\partial u_1^k}{\partial \gamma_\xi} + \frac{\partial u_0^k}{\partial \gamma_x} + b^k\big(x,\xi\big) u_0^k = h^k(x,\xi), & x \in \partial G(x). \end{cases} \tag{26}$$

Интегральное тождество задачи (26) выглядит следующим образом

$$\iint\limits_{Y\setminus G(x)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\,(x,\xi)\, \frac{\partial u_1^k}{\partial \xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 + \iint\limits_{Y\setminus G(x)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\,(x,\xi)\, \frac{\partial u_0^k}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 \\ + \int\limits_{\partial G(x)} b^k\big(x,\xi\big) u_0^k v d\sigma = \int\limits_{\partial G(x)} h^k\big(x,\xi\big) v d\sigma, \tag{27}$$

где $v \in H^1_{per}(Y \setminus G(x))$.

Вид интегрального тождества подсказывает нам структуру функции $u_1^k(x,\xi)$

$$u_1^k(x,\xi) = L^k(x,\xi) + M^k(x,\xi) u_0^k(x) + N_1(x,\xi) \frac{\partial u_0^k(x)}{\partial x_1} + N_2(x,\xi) \frac{\partial u_0^k(x)}{\partial x_2}. \tag{28}$$

Подставляя данное выражение в (27) и группируя соответствующие члены приходим к следующим задачам для функций $N_l(x,\xi)$, $M^k(x,\xi)$ и $L^k(x,\xi)$:

$$\iint\limits_{Y\setminus G(x)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,\xi) \frac{\partial N_l}{\partial \xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 + \iint\limits_{Y\setminus G(x)} \sum_{i=1}^{2} a_{ij}(x,\xi) \frac{\partial v}{\partial \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 = 0, \tag{29}$$

или, в классической форме

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(x,\xi) \frac{\partial (N_l + \xi_l)}{\partial \xi_j} \right) = 0, & x \in Y \setminus G(x), \\ \frac{\partial N_l}{\partial \gamma_\xi} = \sum\limits_{i=1}^{2} a_{ij}(x,\xi) n_i, & x \in \partial G(x); \end{cases}$$

$$\iint\limits_{Y\setminus G(x)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,\xi) \frac{\partial M^k}{\partial \xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 + \int\limits_{\partial G(x)} b^k\big(x,\xi\big) v d\sigma = 0 \tag{30}$$

или

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial M^k}{\partial \xi_j}\right) = 0, & x \in Y \setminus G(x), \\ \frac{\partial M^k}{\partial \gamma_\xi} + b^k\big(x,\xi\big) = 0, & x \in \partial G(x); \end{cases}$$

$$\iint\limits_{Y\setminus G(x)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial L^k}{\partial \xi_j}\frac{\partial v}{\partial \xi_i}d\xi_1 d\xi_2 = \int\limits_{\partial G(x)} h^k\big(x,\xi\big)v d\sigma \tag{31}$$

или

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial L^k}{\partial \xi_j}\right) = 0, & x \in Y \setminus G(x), \\ \frac{\partial L^k}{\partial \gamma_\xi} = h^k\big(x,\xi\big), & x \in \partial G(x). \end{cases}$$

Условие согласования в задаче (29) легко проверяется с помощью интегрирования по частям и следует из (24) в задачах (30) и (31). Заметим, что функции $N_l(x,\xi)$, $M^k(x,\xi)$ и $L^k(x,\xi)$ определены с точностью до аддитивной константы, естественными условиями нормировки являются

$$\iint\limits_{Y\setminus G(x)} N_l(x,\xi)d\xi = \iint\limits_{Y\setminus G(x)} M^k(x,\xi)d\xi = \iint\limits_{Y\setminus G(x)} L^k(x,\xi)d\xi = 0.$$

В дальнейшем эти условия предполагаются выполненными.

Следующая степень ε дает задачу на $u_2^k(x,\xi)$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial u_2^k}{\partial \xi_j}\right) + \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial u_0^k}{\partial x_j}\right) & \\ \quad + \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial u_0^k}{\partial \xi_j}\right) & \\ \quad + \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial u_0^k}{\partial x_j}\right) = -g^k(x,\xi), & x \in Y \setminus G(x), \\ \frac{\partial u_2^k}{\partial \gamma_\xi} + \frac{\partial u_1^k}{\partial \gamma_x} + b^k\big(x,\xi\big)u_1^k = 0, & x \in \partial G(x). \end{cases} \tag{32}$$

Верно следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Функции $M^k(x,\xi)$ и $N_l(x,\xi)$ связаны следующим интегральным тождеством*

$$\frac{\partial u_0^k(x)}{\partial x_l}\left(\iint\limits_{Y\setminus G(x)} \sum_{j=1}^{2} a_{lj}(x,\xi)\frac{\partial M^k}{\partial \xi_j}d\xi_1 d\xi_2 - \int\limits_{\partial G(x)} b^k(x,\xi)N_l d\sigma\right) = 0.$$

Нам потребуется интегральное тождество задачи (32)

$$\iint\limits_{Y\setminus G(x)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial u_2^k}{\partial \xi_j}\frac{\partial v}{\partial \xi_i}d\xi_1 d\xi_2 + \iint\limits_{Y\setminus G_(x)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial u_1^k}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial \xi_i}d\xi_1 d\xi_2$$
$$+\int\limits_{\partial G(x)} b^k(x,\xi)u_1^k v d\sigma - \iint\limits_{Y\setminus G(x)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial M^k}{\partial \xi_j} v d\xi_1 d\xi_2 \frac{\partial u_0^k}{\partial x_i}$$
$$-\iint\limits_{Y\setminus G(x)} \sum_{i,j,l=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{il}(x,\xi)\left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi_l}+\delta_{il}\right)\frac{\partial u_0^k}{\partial x_j}\right) v d\xi_1 d\xi_2$$
$$+\iint\limits_{Y\setminus G(x)} g^k(x,\xi) v d\xi_1 d\xi_2 = 0,$$

где $v \in H^1_{per}(Y \setminus G(x))$.

Условие разрешимости задачи (32) приводит к уравнению для функции $u_0^k(x)$, являющемуся искомым формальным усредненным уравнением. Применяя лемму 3.1, и учитывая связь между $b^k(x,\xi)$ и $h^k(x,\xi)$ перепишем его в виде

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{a}_{ij}(x)\frac{\partial u_0^k}{\partial x_j}\right) - u_0^k(x)\int\limits_{\partial G(x)} b^k(x,\xi)M^k(x,\xi)d\sigma \\ = \iint\limits_{Y\setminus G(x)} g^k(x,\xi)d\xi_1 d\xi_2 + \int\limits_{\partial G(x)} h^k(x,\xi)M^k(x,\xi)d\sigma,\end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\widehat{a}_{ij}(x) = \iint\limits_{Y\setminus G(x)} \sum_{l=1}^{2} a_{il}(x,\xi)\left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi_l}+\delta_{ij}\right)d\xi_1 d\xi_2, \quad \delta_{il}\text{– символ Кронекера.}$$

Таким образом, усредненная задача имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{a}_{ij}(x)\frac{\partial u_0^k}{\partial x_j}\right) - m_k(x)u_0^k(x) = \mathcal{G}_k(x) + \mathcal{H}_k(x), & x\in\Omega, \\ u_0^k(x) = 0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{34}$$

где

$$m_k(x) = \int\limits_{\partial G(x)} b^k(x,\xi)M^k(x,\xi)d\sigma, \quad \mathcal{G}_k(x) = \iint\limits_{Y\setminus G(x)} g^k(x,\xi)d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\mathcal{H}_k(x) = -\int\limits_{\partial G(x)} h^k(x,\xi)M^k(x,\xi)d\sigma = \int\limits_{\partial G(x)} b^k(x,\xi)L^k(x,\xi)d\sigma.$$

Справедлива следующая лемма (см. [6]).

Лемма 3.2. *Если* u_ε *– решение задачи* (23), *а* u_0 *– решение задачи* (34), *то имеет место сходимость*

$$\int\limits_{Q_\varepsilon} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x_i}dxdt + \sum_{r\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\partial G_\varepsilon^r} B\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon\cdot\psi\ d\sigma dt$$

$$-\sum_{r\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\partial G_\varepsilon^r} h\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\psi\ d\sigma dt - \int\limits_{Q_\varepsilon} g\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\psi\ dxdt$$

$$\longrightarrow \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{2}\widehat{a}_{ij}(x)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dxdt$$

$$+\int\limits_Q V(x)u_0\cdot\psi\ dxdt - \int\limits_Q \mathcal{H}(x)\cdot\psi\ dxdt - \int\limits_Q \mathcal{G}(x)\cdot\psi\ dxdt \qquad (35)$$

при $\varepsilon\to 0$.

Следуя результатам работы [26] с учётом замечания 3.2, покажем, что

$$(u_\varepsilon,\nabla)u_\varepsilon \longrightarrow (u,\nabla)u \quad \text{сильно в} \quad L_2(Q). \qquad (36)$$

Для этого используем оценку

$$\|(u_\varepsilon,\nabla)u_\varepsilon-(u,\nabla)u\|_{L_2(Q)} \leqslant \|(u_\varepsilon-u,\nabla)u_\varepsilon\|_{L_2(Q)}+\|(u,\nabla)(u_\varepsilon-u)\|_{L_2(Q)}$$

$$\leqslant C\Big(\int\limits_Q |u_\varepsilon-u|^2|\nabla u_\varepsilon|^2dxds\Big)^{\frac12} + C\Big(\int\limits_Q |u|^2|\nabla(u_\varepsilon-u)|^2dxds\Big)^{\frac12}$$

$$\leqslant C_1\Big(\int\limits_Q |\nabla u_\varepsilon|^3 dxds\Big)^{\frac{1}{3}}\Big(\int\limits_Q |u_\varepsilon - u|^6 dxds\Big)^{\frac{1}{6}}$$
$$+ C_1\Big(\int\limits_Q |u|^6 dxds\Big)^{\frac{1}{6}}\Big(\int\limits_Q |\nabla(u_\varepsilon - u)|^3 dxds\Big)^{\frac{1}{3}}. \quad (37)$$

В монографии [17] доказано, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ уравнений (13) и (18) существуют в более сильном топологическом пространстве $H_w^{(2,2,1)}(Q)$, где

$$H_w^{(2,2,1)}(Q) = L_{2,w}\left(\mathbb{R}_+; \left[W_2^2(\Omega)\right]^2\right) \cap \left\{v : \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{2,w}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H})\right\}.$$

Обозначим также

$$H_{3,w}^{(1,1,0)}(Q) = L_{3,w}\left(\mathbb{R}_+; \left[W_3^1(\Omega)\right]^2\right).$$

Поскольку $H^{(2,2,1)}(Q) \Subset H_3^{(1,1,0)}(Q)$ и $H^{(2,2,1)}(Q) \Subset L_6(Q)$, получаем

$$\int\limits_Q |u_\varepsilon - u|^6 dxds \to 0, \qquad \int\limits_Q |\nabla(u_\varepsilon - u)|^3 dxds \to 0 \qquad (38)$$

при $\varepsilon \to 0$. При этом мы использовали равномерную ограниченность

$$\int\limits_Q |\nabla u_\varepsilon|^3 dxds \leqslant M.$$

Таким образом, сходимость (36) доказана.

3.3. Доказательство теоремы 3.1.

Доказательство. Ясно, что (22) влечет (21). Поэтому достаточно доказать (22), то есть показать, что для любой окрестности $\mathcal{O}(\overline{\mathcal{K}})$ в $\Theta^{\rm loc}$ найдется число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\mathcal{O}) > 0$ такое, что

$$\mathcal{K}_\varepsilon \subset \mathcal{O}(\overline{\mathcal{K}}) \text{ для всех } \varepsilon < \varepsilon_1. \qquad (39)$$

Предположим, что (39) неверно. Тогда найдется окрестность $\mathcal{O}'(\overline{\mathcal{K}})$ в $\Theta^{\rm loc}$, последовательности $\varepsilon_k \to 0+$ $(k \to \infty)$ и $u_{\varepsilon_k}(\cdot) = u_{\varepsilon_k}(s) \in \mathcal{K}_{\varepsilon_k}$ такие, что

$$u_{\varepsilon_k} \notin \mathcal{O}'(\overline{\mathcal{K}}) \text{ для всех } k \in \mathbb{N}. \qquad (40)$$

Последовательность $\left\{g\left(x,\frac{x}{\varepsilon_n}\right)\right\}$ ограничена в $\mathbf{H}$. Следовательно, используя интегральное тождество и неравенство Коши-Буняковского, заключаем, что последовательность решений $\{u_{\varepsilon_n}\}$ ограничена в $\mathcal{F}^b$. Переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что

$$u_{\varepsilon_n} \to u_0 \ (n\to\infty) \ \text{ в } \Theta^{\mathrm{loc}}.$$

Утверждается, что $u_0 \in \overline{\mathcal{K}}$. Функции $u_{\varepsilon_n}(x,t)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial t} - \sum_{i,l=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{il}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon_n}\Big)\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial x_l}\right)+(u_{\varepsilon_n},\nabla)u_{\varepsilon_n}=g\Big(x,\frac{x}{\varepsilon_n}\Big),\ t\in\mathbb{R}, \quad (41)$$

с условием

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial \gamma}+B\Big(x,\frac{x}{\varepsilon_n}\Big)u_{\varepsilon_n}=h\Big(x,\frac{x}{\varepsilon_n}\Big), \quad x\in\partial G_{\varepsilon_n},$$

и энергетическому неравенству

$$-\frac{1}{2}\int_{-M}^{M}\|u_{\varepsilon_n}(\cdot,t)\|^2_{\mathbf{H}}\psi'(t)dt+\varkappa_1\int_{-M}^{M}\|u_{\varepsilon_n}(\cdot,t)\|^2_{\mathbf{V}}\psi(t)dt$$

$$+\sum_{r\in\Upsilon_{\varepsilon_n}}\int_{-M}^{M}\int_{\partial G^r_{\varepsilon_n}}B\Big(x,\frac{x}{\varepsilon_n}\Big)u^1_{\varepsilon_n}(x,t)\cdot\psi(t)d\sigma dt-\sum_{r\in\Upsilon_{\varepsilon_n}}\int_{-M}^{M}\int_{\partial G^r_{\varepsilon_n}}h\Big(x,\frac{x}{\varepsilon_n}\Big)\cdot\psi(t)d\sigma dt$$

$$\leqslant\int_{-M}^{M}\left(g\Big(x,\frac{x}{\varepsilon_n}\Big),u_{\varepsilon_n}(x,t)\right)_{\mathbf{H}}\psi(t)dt \quad (42)$$

при любом $M>0$ и для любой функции $\psi\in C_0^\infty(]-M,M[)$, $\psi\geqslant 0$. Это энергетическое неравенство может быть получено из интегрального тождества подстановкой решения u_{ε_n} в качестве пробной функции, и мы рассматриваем только те решения, которые удовлетворяют этому неравенству. Кроме того, $u_{\varepsilon_n}(x,t)\rightharpoonup u_0(x,t)$ $(n\to\infty)$ слабо в $\mathbf{L}_2(-M,M;\mathbf{V})$, $*$-слабо в $\mathbf{L}_\infty(-M,M;\mathbf{H})$ и $\dfrac{\partial u_{\varepsilon_n}(x,t)}{\partial t}\rightharpoonup\dfrac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}$ $(n\to\infty)$ слабо в $\mathbf{L}_2(-M,M;\mathbf{H})$. В силу известной теоремы о компактности из [25] (точную формулировку для нашего случая смотри в [21]) мы можем считать, что $u_{\varepsilon_n}(x,t)\to u_0(x,t)$ $(n\to\infty)$ сильно в $\mathbf{L}_2(-M,M;\mathbf{H})$ и $u_{\varepsilon_n}(x,t)\to u_0(x,t)$ $(n\to\infty)$ при почти всех

$(x,t) \in D \times (-M, M)$. В частности, $u_{\varepsilon_n}(x,t) \to u_0(x,t)$ $(n \to \infty)$ сильно в $\Theta_+^{\rm loc} = \mathbf{L}_2^{\rm loc}(\mathbb{R}; \mathbf{H})$.

Теперь, имея в виду лемму 3.2 и сходимость (36), переходим к пределу в (41) и (42) при $\varepsilon \to 0$, используя стандартное рассуждение из [25] (смотри подробное доказательство в [17,21,23]). Следовательно $u_0 \in \overline{\mathcal{K}}$, то есть, u_0 – решение (18), удовлетворяющее соответствующему тождеству (42) с внешней силой $\mathcal{G}(x)$. В то же время мы установили, что $u_{\varepsilon_n}(x,t) \to u_0(x,t)$ $(n \to \infty)$ в $\Theta_+^{\rm loc}$ и, следовательно, $u_{\varepsilon_n}(x,t) \in \mathcal{O}'(u_0(x,t)) \subset \mathcal{O}'\left(\overline{\mathcal{K}}\right)$ при $\varepsilon_n \ll 1$. Это противоречит (40). Теорема доказана. $\square$

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное прочтение работы и полезные замечание, которые помогли улучшить презентацию результатов.

Список литературы

1. В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов, *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.* Киев, Наукова думка (1974).
2. D. Cioranescu, F. Murat, *Un terme étrange venu d'ailleurs I & II. In Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications.* Collège de France Seminar, Volume II & III, ed. H.Berzis, J.L.Lions. Research Notes in Mathematics, 60 & 70, London: Pitman, 98–138 & 154–178 (1982).
3. D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, *. Homogenization in open sets with holes.* — J. Math. Anal. Appl **71** (1979), 590–607.
4. D. Cioranescu, P. Donato, *On a Robin Problem in Perforated Domains —*. In: Homogenization and Applications to Material Sciences. Edited by D. Cioranescu, A. Damlamian, and P. Donato. GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications. Tokyo: Gakkōtosho, Vol. 9 (1997), pp. 123–136.
5. C. Conca, P. Donato, *Non-homogeneous Neumann problems in domains with small holes.* — Modélisation Mathématique et Analyse Numérique (M^2AN) No. 22(4) (1988) 561–607.
6. А. Г. Беляев, А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, *Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей.* — Сиб. матем. журн. **39**, No. 4 (1998), 730–754.
7. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов.* М., Физматлит (1993).
8. O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization.* Amsterdam, North–Holland (1992).
9. А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, *Усреднение. Методы и приложения. Белая серия в математике и физике*, Т. 3. Новосибирск, Изд-во "Тамара Рожковская" (2007).
10. V. A. Marchenko, E. Ya. Khruslov, *Homogenization of partial differential equations.* Boston (MA), Birkhäuser (2006).

11. А. Г. Беляев, А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, *Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием.* — Матем. сб. **192** (2001), 3–20.
12. G. A. Chechkin, A. L. Piatnitski, *Homogenization of Boundary–Value Problem in a Locally Periodic Perforated Domain.* — Applicable Analysis **71**, No.1-4 (1999), 215–235.
13. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, *Attractors and a "strange term" in homogenized equation.* — C R Mécanique **348**, No. 5 (2020), 351–359.
14. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, *Strong Convergence of Trajectory Attractors for Reactio,n–Diffusion Systems with Random Rapidly Oscillating Terms.* — Communications on Pure and Applied Analysis (CPAA) **19**, No. 5 (2020), 2419–2443.
15. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, *"Strange Term" in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain.* Chaos, Solitons & Fractals **140**(2020), Art. No 110208.
16. А. В. Бабин, М. И. Вишик *Аттракторы эволюционных уравнений.* М., Наука (1989).
17. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Attractors for equations of mathematical physics.* Providence (RI), Amer. Math. Soc. (2002).
18. R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Applied Mathematics Series. Vol. 68. New York (NY): Springer-Verlag (1988).
19. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Non-autonomous 2D Navier–Stokes system with a simple global attractor and some averaging problems.* — ESAIM Control Optim. Calc. Var. **8** (2002), 467–487.
20. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Non-autonomous 2D Navier–Stokes system with singularly oscillating external force and its global attractor.* – J. Dynam. Diff. Eq. **19**, No. 3 (2007), 655–684.
21. М. И. Вишик, В. В. Чепыжов, *Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами.* — Матем. сб. **192** (2001), 13–50.
22. К. А. Бекмаганбетов, А. М. Толеубай, Г. А. Чечкин, *Об аттракторах системы уравнений Навье–Стокса в двумерной пористой среде.* — Проблемы математического анализа **115** (2022), 15–28.
23. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Evolution equations and their trajectory attractors.* — J. Math. Pures Appl. **76**, No. 10 (1997), 913–964.
24. F. Boyer, P. Fabrie, *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier–Stokes Equations and Related Models.* Applied Mathematical Sciences **183**, New York (NY), Springer (2013).
25. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires.* Paris, Dunod, Gauthier-Villars (1969).
26. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Trajectory attractors for reaction-diffusion systems.* — Top. Meth. Nonlin. Anal. J. Julius Schauder Center **7**, No. 1 (1996), 49–76.

Bekmaganbetov K. A., Toleubai A. M., Chechkin G. A. On attractors of 2D Navier–Stockes system in a medium with anisotropic variable viscosity and periodic obstacles.

A two-dimensional Navier–Stokes system of equations in a porous medium with an anisotropic variable viscosity with rapidly oscillating terms in the equations and in the boundary conditions, is considered. It is proved that the trajectory attractors of this system tend in a certain weak topology to the trajectory attractors of the homogenized Navier–Stokes system of equations with an additional potential.

Поступило 10 декабря 2022 г.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Казахстанский филиал, г. Нур-Султан;
Институт математики и математического моделирования, г. Алматы
E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.kz

Евразийский национальный
университет имени Л. Н. Гумилева, г. Нур-Султан;
Институт математики и математического моделирования, г. Алматы
E-mail: altyn.15.94@mail.ru

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва;
Институт математики с компьютерным центром
подразделение Уфимского федерального
исследовательского центра РАН, г. Уфа;
Институт математики и математического моделирования, г. Алматы
E-mail: chechkin@mech.math.msu.su