Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 518, 2022 г.

Д. Д. Черкашин

О ХРОМАТИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ ГРАФОВ ТИПА ДЖОНСОНА

§1. Обозначения

Напомним, что *хроматическим числом графа* G называется минимальное количество цветов $\chi(G)$, в которое можно покрасить вершины графа таким образом, чтобы любое ребро имело разноцветные концы. *Независимое множество* в графе – это множество вершин, никакая пара из которых не является ребром. *Числом независимости* графа G является размер его максимального независимого множества; обозначается число независимости $\alpha(G)$.

Обобщенным графом Джонсона $J(n,k,t)$ называется граф, вершинами которого являются вектора из гиперкуба $\{0,1\}^n$, у которых ровно k единиц, а ребра соединяют вершины со скалярным произведением t (то есть $J(n,k,t)$ непустой, если $k < n$ и $2k - n \leqslant t < k$). *Обобщенные графы Кнезера* $K(n,k,t)$ имеют то же самое множество вершин, а ребра соединяют вершины со скалярным произведением не больше t. Графы типа Джонсона, определенные в следующем абзаце, являются естественным обобщением графов Джонсона.

Графом типа Джонсона $J_\pm(n,k,t)$ назовем граф, вершинами которого являются вектора из множества $\{0,\pm1\}^n$ длины $\sqrt{k}$, а ребра проведены между парами векторов со скалярным произведением t.

Заметим, что вершины графа $J_\pm(n,k,t)$ естественным образом вкладываются в $\mathbb{R}^n$, при этом расстояние между смежными вершинами равно $\sqrt{2(k-t)}$. Таким образом, $J_\pm(n,k,t)$ является дистанционным графом, то есть его ребра соединяют пары вершин на фиксированном расстоянии. Будем считать, что координаты пронумерованы, иными словами, множество координат равно $[n] = \{1,\dots,n\}$. *Носителем* вершины называется множество её ненулевых координат. При $k = 2$ мы используем обозначение a^ib^j для вершины с носителем $\{a,b\}$ и знаками $i,j \in \{+,-\}$ на координатах a и b, соответственно; аналогичные обозначение мы используем при $k = 3$.

Ключевые слова: дистанционные графы, раскраски графов, теорема Шпернера.
Работа поддержана грантом No. 21-11-00040 Российского научного фонда.

Автоморфизм графа – это биекция из множества вершин на себя, сохраняющая смежность. Граф называется *вершинно-транзитивным*, если для любых вершин u и v существует автоморфизм графа, переводящий u в v.

Наконец, пусть $m(a,b)$ – номер старшего неравного разряда в двоичной записи чисел a и b (разряды нумеруются с единицы).

§2. Введение

В работе найден порядок роста хроматических чисел графов $J_\pm(n,2,-1)$ и $J_\pm(n,3,-1)$ (логарифмический по n), а также $J_\pm(n,3,-2)$ (повторно-логарифмический по n).

Обзор результатов о хроматических числах обобщенных графов Джонсона и Кнезера при фиксированных k и t можно найти в [1].

В работе [1] найдены точные значения чисел независимости графов $J_\pm(n,k,t)$ при фиксированном k, достаточно большом n и нулевом или нечетном отрицательном t. Асимптотики чисел независимости графов $J_\pm(n,k,t)$ при фиксированном k, достаточно большом n и отрицательном t найдены в статье [2] (см. также исправленную версию [3]). Точные значения чисел независимости для четных отрицательных t до сих пор неизвестны, начиная со случая $J_\pm(n,3,-2)$.

Перейдем к хроматическим числам. Пусть k фиксировано, а t – отрицательно. Тогда все вектора с неотрицательными координатами образуют независимое множество I с долей вершин $\frac{1}{2^k}$. Таким образом, для любого графа $G = J_\pm(n,k,t)$ типа Джонсона классическое неравенство

$$\chi(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \tag{1}$$

дает нижнюю оценку на хроматическое число, не превосходящую 2^k. В дальнейшем мы увидим, что часто это неравенство является сильно неточным.

С другой стороны, все рассматриваемые в статье графы являются вершинно-транзитивными. Следовательно, для $G = J_\pm(n,k,t)$ выполняется неравенство, верное для всех вершинно-транзитивных графов [4]

$$\chi(G) \leqslant (1 + \ln \alpha(G)) \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leqslant C(k) \log_2 n, \tag{2}$$

где $C(k)$ – константа, зависящая только от k. Мы увидим, что иногда эта оценка дает точный порядок роста по n, в частности для $J_{\pm}(n,3,-1)$.

§3. Результаты

Для разогрева правильно раскрасим $J_{\pm}(n,2,-1)$ в $2\lceil\log_2 n\rceil+2$ цветов. Пусть первый и второй цвета получат вершины с неотрицательными и неположительными значениями соответственно. Остались только вершины вида a^+b^-. Покрасим вершину a^+b^- в цвет $m(a,b)$, если в бите $m(a,b)$ число a имеет 1, а число b, соответственно, 0; вершину же a^-b^+ покрасим в цвет $-m(a,b)$. Несложно видеть, что все вершины покрашены, и каждое ребро соединяет вершины разных цветов. Итого получается как раз $2\lceil\log_2 n\rceil+2$ цветов.

Следующая теорема показывает, что асимптотика хроматического числа примерно в два раза меньше, чем в приведенном примере.

Теорема 1. *При всех $n\geqslant 2$ выполняются неравенства*

$$\log_2 n\leqslant\chi(J_{\pm}[n,2,-1])\leqslant\log_2 n+\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\log_2\log_2 n.$$

Доказательство. Начнем с нижней оценки. Рассмотрим подмножество вершин, содержащих координаты разных знаков; назовем его $V_{\pm}$. Предположим, что мы покрыли $V_{\pm}$ независимыми множествами $I_1,\dots,I_q$. Рассмотрим множество I_j. Если по какой-то координате a вершины из I_j принимают значения обоих знаков, то все вершины из I_j, чей носитель содержит a – это a^+b^- и a^-b^+ для некоторой координаты b. Таким образом, на координате b вершины из I_j тоже принимают значения разных знаков; назовем такие координаты *разнообразными*, а оставшиеся координаты *положительными* и *отрицательными* соответственно.

Определим вспомогательный граф G_j, вершинами которого являются координаты, а ребро соединяет пару координат, если эта пара является носителем вершины из I_j. Заметим, что G_j – двудольный граф: в самом деле, носитель либо содержит положительную и отрицательную координаты (поскольку мы рассматриваем только вершины из $V_{\pm}$) либо две разнообразных; выше мы показали, G_j на разнообразных координатах является паросочетанием.

Раз $I_1, \dots, I_q$ покрывают $V_\pm$, графы G_j покрывают $K_{[n]}$ – полный граф на множестве координат. Хорошо известно, что для такого покрытия необходимо не менее $\log_2 n$ двудольных подграфов. В самом деле, если $F_i := G_1 \cup \dots \cup G_i$, то $\alpha(F_{i+1}) \geqslant \alpha(F_i)/2$; с другой стороны $\alpha(K_{[n]}) = 1$.

Перейдем к примеру. Мы покрасим $J_\pm(n, 2, -1)$ в $2m+2$ цвета для $n \leqslant \binom{2m+1}{m}$. Сопоставим каждой координате m-элементное подмножество $[2m+1]$; обозначим сопоставление за f. Для $1 \leqslant i \leqslant 2m+1$ цвет I_i состоит из вершин a^+b^+, для которых $i \in f(a), f(b)$, из вершин a^+b^-, для которых $i \in f(a)$, $i \notin f(b)$ и вершин a^-b^-, для которых $i \notin f(a), f(b)$. Заметим, что все вершины вида a^+b^- покрыты этими цветами. Действительно, для любых m-элементных подмножеств $f(a)$, $f(b)$ найдется элемент i, принадлежащий $f(a)$, но не $f(b)$. Аналогично все вершины вида a^-b^- покрыты цветами, поскольку для любых двух m-элементных подмножеств $(2m+1)$-элементного множества найдется элемент из их общего дополнения. Последний цвет с номером $2m+2$ содержит все вершины вида a^+b^+.

Поскольку $J_\pm(n_1, 2, -1)$ – подграф $J_\pm(n_2, 2, -1)$ при $n_1 < n_2$, осталось проверить, что неравенство $n \geqslant \binom{2m-1}{m-1}$ влечет неравенство $2m + 2 \leqslant \log_2 n + (1 + o(1))\frac{1}{2}\log_2\log_2 n$. Это действительно так, поскольку

$$\binom{2m-1}{m-1} = \frac{1}{2}\binom{2m}{m} = \Omega\left(\frac{4^m}{\sqrt{m}}\right). \qquad \square$$

Пусть I – независимое множество графа $J_\pm(n, 3, -1)$. Назовем координату $i \in [n]$ *разнообразной*, если вершины из I принимают оба ненулевых значения на i. Назовем вершину $v \in I$ *особой*, если носитель v содержит разнообразную координату.

Лемма 1. *Пусть I – независимое множество графа $J_\pm(n, 3, -1)$, для которого t координат являются разнообразными. Тогда*

$$|I| \leqslant 8t(n-2) + \binom{n-t}{3}.$$

Доказательство. Рассмотрим разнообразную координату i. Пусть I_i – подмножество вершин I, чей носитель содержит i. Тогда I_i содержит вершину v_+ с носителем $\{i, a, b\}$ и знаком $+$ на i, а также вершину v_- с носителем $\{i, c, d\}$ и знаком $-$ на i (множества $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ должны пересекаться). Тогда любая вершина $v \in I_i$, со знаком $+$ на i пересекает

$\{c, d\}$ (иначе между v_+ и v_- есть ребро, что противоречит независимости I); аналогично любая v со знаком $-$ на i пересекает $\{a, b\}$. Таким образом

$$|I_i| \leqslant 8(n-2) \qquad \text{и} \qquad \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant t} I_i \leqslant 8t(n-2).$$

Мы посчитали все вершины, у которых хотя бы одна координата является разнообразными. Остались вершины, чей носитель лежит на $n-t$ однообразных координатах. Их не более $\binom{n-t}{3}$. □

Следствие 1. *Пусть I – независимое множество графа $J_\pm(n, 3, -1)$. Тогда число особых вершин не превосходит cn^2.*

Теорема 2. *Для некоторых положительных констант c, C и произвольного $n > 3$ выполняются неравенства*

$$c \log_2 n \leqslant \chi(J_\pm[n, 3, -1]) \leqslant C \log_2 n.$$

Доказательство. Верхняя оценка следует из того, что граф $J_\pm(n, 3, -1)$ является вершинно-транзитивным, что было показано во введении.

Перейдем к нижней оценке. Рассмотрим разбиение множества вершин V графа $J_\pm(n, 3, -1)$ на независимые множествами $I_1, \ldots, I_k$. Рассмотрим множество $V_\pm \subset V$, состоящее из вершин, у которых есть координаты разного знака; таких вершин $6\binom{n}{3}$. Заметим, что для каждой пары координат (i, j) существуют $4(n-2)$ вершин из $V_\pm$, в которых i и j имеют разный знак. Скажем, что множество вершин *разделяет* пару координат (i, j), если множество содержит все эти $4(n-2)$ вершины. Тогда по следствию 1 особые вершины всех независимых множеств в объединении разделяют $O(kn)$ пар координат.

Завершение доказательства аналогично теореме 1. Пусть независимые множества $I_1, \ldots, I_q$ покрывают граф G. Рассмотрим двудольный граф F_i на множестве координат, долями которого являются однообразные координаты I_i положительного и отрицательного знаков. Как было показано в доказательстве теоремы 1, у графа $F := F_1 \cup \cdots \cup F_q$ найдется независимое множество размера хотя бы $n/2^q$. При $q < \frac{1}{3} \log_2 n$ имеем

$$\alpha(F) \geqslant n^{2/3}.$$

Тогда все пары координат на независимом множестве размера $n^{2/3}$ должны быть разделены разнообразными координатами; таких асимптотически больше, чем kn – противоречие. □

Теорема 3. *Для всех $n \geqslant 3$ выполняются неравенства*

$$\lceil \log_2 \lceil \log_2 n \rceil \rceil \leqslant \chi(J_{\pm}[n,3,-2]) \leqslant 4 \lceil \log_2 \lceil \log_2 n \rceil \rceil + 6.$$

Доказательство. Начнем с нижней оценки. Предположим, что мы покрыли все вершины графа независимыми множествами $I_1, \dots, I_q$. Зафиксируем порядок координат $[n]$ и рассмотрим только подмножество вершин V_{alt}, в которых знаки чередуются, то есть вершины с носителем $\{a, b, c\}$, где $a < b < c$, имеют вид $a^+b^-c^+$ и $a^-b^+c^-$.

Рассмотрим вспомогательный граф H, вершинами которого являются неупорядоченные пары координат, а ребра проведены между парами вида $\{a, b\}$ и $\{b, c\}$, где $a < b < c$. Тогда для каждого ребра H на объединении вершин, как на носителе, лежат две вершины графа G из V_{alt}; обратно – носитель любой вершины из V_{alt} единственным образом получается как объединение вершин, соответствующих ребру H.

Лемма 2. *Для каждого $1 \leqslant j \leqslant q$ ребра, соответствующие носителям I_j, образуют двудольный подграф в H.*

Назовем этот подграф H_j.

Доказательство. Поставим для каждой вершины из $I_j \cap V_{alt}$ две метки: если вершина имеет вид $a^+b^-c^+$ (в соответствии с порядком на $[n]$), то пары координат $\{a, b\}$ и $\{b, c\}$ получают метки L и R, соответственно, а если вид $a^-b^+c^-$, то наоборот. Пусть какая-то пара координат $\{d, e\}$ получила и метку L и метку R от вершин v_1 и v_2. Тогда носители v_1 и v_2 совпадают, иначе их скалярное произведение равно -2, что противоречит независимости I_j. Но тогда носитель любой другой вершины из $I_j \cap V_{alt}$ не содержит пару координат $\{d, e\}$, иначе возникает ребро либо с v_1 либо с v_2.

Теперь определим вершины H только с меткой L в одну долю, а только с меткой R в другую. Подграф на этих вершинах двудольный. Вершины с обеими метками, как мы показали выше, являются висячими, поэтому их добавление оставляет граф двудольным. □

Пусть полные двудольные подграфы на долях подграфов H_i разбивают $V(H)$ на независимые (в графе H) множества $J_1, \dots, J_w$.

Лемма 3. *Пусть J – независимое множество графа H. Тогда существует разбиение $[n] = B \sqcup E$, такое что для любой вершины $\{b, e\} \in J$ выполняется $b \in B$, $e \in E$ и $b < e$.*

Доказательство. Никакая координата не может быть первой в вершине $j_1 \in J$ и второй в $j_2 \in J$, так как J независимое множество, а такие j_1 и j_2 образовывали бы ребро. Это позволяет определить B как множество первых координат вершин $j \in J$, а E как $[n] \setminus B$. $\square$

Для каждого графа J_i рассмотрим разбиение $B_i \sqcup E_i$ из леммы 2. Пусть какая-то пара координат не лежит в различных долях никакого разбиения $B_i \sqcup E_i$. Тогда соответствующая вершина графа H не лежит в объединении независимых множеств $J_1, \dots, J_w$, противоречие. Рассмотрим объединение F двудольных графов на долях B_i, E_i для $1 \leqslant i \leqslant w$. Все доли F имеют размер 1, следовательно $w \geqslant \lceil \log_2 n \rceil$, аналогично соответствующей части доказательства теоремы 1.

Получается, что подграфы $H_1, \dots, H_q$ разбивают $V(H)$ на хотя бы $\lceil \log_2 n \rceil$ множеств, то есть подграфов не меньше $\lceil \log_2 \lceil \log_2 n \rceil \rceil$, что завершает доказательство нижней оценки.

Перейдем к верхней оценке и продемонстрируем раскраску графа в $4 \lceil \log_2 \lceil \log_2 n \rceil \rceil + 6$ цветов.

Для начала покрасим все вершины вида $a^+b^-c^+$, где $a < b < c$, в $2 \lceil \log_2 \lceil \log_2 n \rceil \rceil$ цветов. Назначим такой вершине цвет

$$\operatorname{sign}(m(a,b) - m(b,c)) \cdot m(m(a,b), m(b,c)).$$

Отметим, что для натуральных чисел $x < y < z$ выполняется неравенство $m(x,y) \neq m(y,z)$, в самом деле: из $x < y$ следует, что в бите $m(x,y)$ число x принимает значение 0, а число y – 1; аналогичное рассуждение для y и z влечет противоречие.

Пусть найдется пара вершин цвета j на носителях $\{a,b,c\}$, где $a < b < c$, и $\{b,c,d\}$ со скалярным произведением -2. Тогда, поскольку первая вершина имеет вид $a^+b^-c^+$, вторая вершина имеет знаки b^+c^-, следовательно координаты имеют порядок $a < b < c < d$. Поскольку вершины одноцветны, выражения $m(a,b) - m(b,c)$ и $m(b,c) - m(c,d)$ одинакового знака. Пусть $m(a,b) < m(b,c) < m(c,d)$, тогда $m(m(a,b), m(b,c)) = m(m(b,c), m(c,d))$ означает, что $m(b,c)$ с одной стороны в бите $|j|$ имеет единичку, а с другой стороны нолик; противоречие. Случай $m(a,b) > m(b,c) > m(c,d)$ разбирается так же.

Аналогично, можно покрасить вершины вида $a^-b^+c^-$ $(a < b < c)$ в $2 \lceil \log_2 \lceil \log_2 n \rceil \rceil$ цветов.

Наконец, последние шесть цветов состоят из вершин вида $a^+b^+c^+$, $a^+b^+c^-$, $a^+b^-c^-$, $a^-b^+c^+$, $a^-b^-c^+$ и $a^-b^-c^-$, соответственно, где $a <$

$b < c$. Прямая проверка показывает, что при подобной раскраске нет одноцветных ребер. □

§4. Обсуждение

Олимпиадная версия теоремы 3 предлагалась на студенческом соревновании IMC 2022. Я признателен Джону Джейну за настоятельную рекомендацию не посещать данное мероприятие, пришедшуюся весьма кстати.

> **Problem 4.** Let $n > 3$ be an integer. Let Ω be the set of all triples of distinct elements of $\{1, 2, \ldots, n\}$. Let m denote the minimal number of colours which suffice to colour Ω so that whenever $1 \leqslant a < b < c < d \leqslant n$, the triples $\{a, b, c\}$ and $\{b, c, d\}$ have different colours. Prove that
>
> $$\frac{1}{100} \log\log n \leqslant m \leqslant 100 \log\log n.$$

Дальнейшие вопросы. Нахождение хроматических чисел графов $J_{\pm}(n, k, t)$ и $K_{\pm}(n, k, t)$ в общем случае выглядит неподъемной задачей. В случае фиксированных k и t методы, упомянутые во введении (неравенства (1) и (2)), дают логарифмический по n зазор между верхней и нижней оценками. Мы показали, что для отрицательных t хроматическое число может не совпадать по порядку ни с одной из этих оценок. Для неотрицательных t никаких продвижений автору неизвестно.

Благодарности.

Автор благодарит Федора Петрова, Алексея Гордеева и Павла Прозорова за интерес к работе и существенную помощь в изложении результатов.

Список литературы

1. D. Cherkashin and S. Kiselev, *Independence numbers of Johnson-type graphs*, `arXiv:1907.06752`, 2019.
2. P. Frankl and A. Kupavskii, *Intersection theorems for $\{0, \pm 1\}$-vectors and s-cross-intersecting families.* — Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory **2**, No. 7 (2017), 91–109.
3. P. Frankl and A. Kupavskii, *Correction to the Intersection theorems for $\{0, \pm 1\}$-vectors and s-cross-intersecting families.* — Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory **8**, No. 4 (2019), 389–391.

4. L. Lovász, *On the ratio of optimal integral and fractional covers.* — Discrete mathematics **13**, No. 4 (1975), 383–390.

Cherkashin D. D. On the chromatic numbers of Johnson-type graphs.

A Johnson type graph $J_{\pm}(n,k,t)$ is a graph whose vertex set consists of vectors from $\{-1,0,1\}^n$ of the length $\sqrt{k}$ and edges connect vertices with scalar product t. The paper determines the order of growth of the chromatic numbers of graphs $J_{\pm}(n,2,-1)$ and $J_{\pm}(n,3,-1)$ (logarithmic on n), and also $J_{\pm}(n,3,-2)$ (double logarithmic on n).

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023, С.-Петербург, Россия
E-mail: jiocb.orlangyr@gmail.com

Поступило 22 февраля 2022 г.